أجوبة امتحان الدورة العادية 2012

التمرين الأول :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة مُعرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) : x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$$

يعني : $(\mathcal{S}) : (x^2-2x)+(y^2)+(z^2-2z)-1=0$

يعني : $(\mathcal{S}) : (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2-1=2$

يعني : $(\mathcal{S}) : (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;0;1)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$.

2 ب

لدينا : $\begin{cases} A(1;1;-1) \\ B(0;1;-2) \\ C(3;2;1) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1;0;-1) \\ \overrightarrow{AC}(2;1;2) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1\\-1&2\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}-1&2\\-1&2\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-1&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=1\vec{\imath}-0\vec{\jmath}-1\vec{k}=\vec{\imath}-\vec{k}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن المتجهتان $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ أي : $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$

يعني : $1(x-1)+0(y-1)-1(z+1)=0$

يعني : $x-z-2=0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1;0;1)$ و $(ABC) : x-z-2=0$

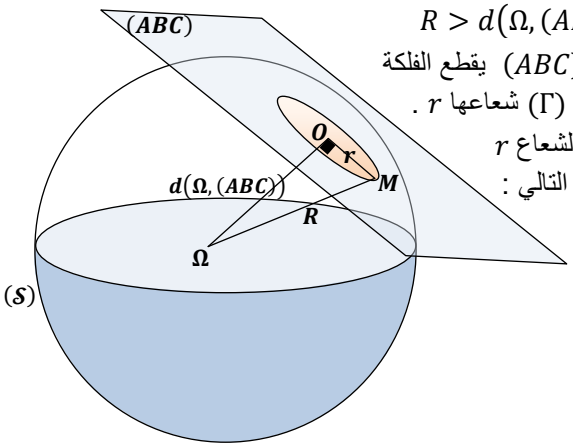
إذن : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

نعلم أن شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$ هو $R=\sqrt{3}$. و نلاحظ أن : $\sqrt{3}>\sqrt{2}$

إذن : $R>d(\Omega,(ABC))$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها r .

و لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



لدينا المثلث $OM\Omega$ قائم الزاوية في النقطة O .

لأن $d(\Omega,(ABC))$ هي أصغر مسافة بين نقط (ABC) و النقطة Ω .

و نحصل على هذه المسافة عندما يتحقق لدينا التعامد .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $M\Omega^2=O\Omega^2+OM^2$

يعني : $R^2=\left(d(\Omega,(ABC))\right)^2+r^2$ يعني : $\sqrt{3}^2=\sqrt{2}^2+r^2$

يعني : $3=2+r^2$ أي : $r=1$

3 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن : $M\epsilon(\Delta)$ و $\Omega\epsilon(\Delta)$.

فإن : $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

و بما أن : $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

و (Δ) عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M}=t\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$; $(\exists t\epsilon\mathbb{R})$ يعني : $\begin{cases} x-1=t \\ y-0=0t \\ z-1=-t \end{cases}$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$; $(t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لتكن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) .

لدينا : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x=t+1 \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} ; (t\epsilon\mathbb{R}) \\ (ABC) : x-z-2=0 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \alpha=t+1 \\ \beta=0 \\ \gamma=1-t \\ \alpha-\gamma-2=0 \end{cases}$

نعوض α و γ بقيَمها في آخر معادلة : $(t+1)-(1-t)-2=0$

يعني : $2t-2=0$ يعني : $t=1$

نعوض t بالقيمة 1 لإيجاد α و γ نجد : $\begin{cases} \alpha=1+1=2 \\ \beta=0 \\ \gamma=1-1=0 \end{cases}$

و بالتالي : $(2;0;0)$ هو مثلوث إحداثيات H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

تذكير : إذا كان (P) مستوى يقطع فلكة $(\mathcal{S})$ مركزها Ω وفق دائرة (Γ) مركزها O فإن : $(P)\perp(\Omega O)$ (إنتهى التذكير)

لتكن O مركز الدائرة (Γ) .

لدينا (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة (Γ) . إذن : $\boxed{(\Omega O)\perp(ABC)}$ **(1)**

و لدينا : $\Omega H=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}=d(\Omega,(ABC))$

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ **(2)**

من **(1)** و **(2)** نستنتج أن : $(\Omega H)\parallel(\Omega O)$

و منه (ΩO) و (ΩH) منطبقان لأنهما متوازيان و يشتركان في نقطة واحدة .

و منه : $H=O$ لأن $O\epsilon(ABC)$ و $H\epsilon(ABC)$.

و بالتالي H هي مركز الدائرة (Γ) .

www.baclive.blogspot.com

التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 12z + 61 = 0$

لدينا : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 61 = -100 = (10i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1 = \frac{12 - 10i}{2} = 6 - 5i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{12 + 10i}{2} = 6 + 5i$$

2 أ

لدينا : $\begin{cases} aff(A) = a = 6 - 5i \\ aff(B) = b = 4 - 2i \\ aff(C) = c = 2 + i \end{cases}$

إذن : $\frac{a - c}{b - c} = \frac{4 - 6i}{2 - 3i} = \frac{2(2 - 3i)}{(2 - 3i)} = 2 \in \mathbb{R}$

إذن : $\frac{a - c}{b - c} = 2 \in \mathbb{R}$

يعني : $(a - c) = 2(b - c)$ يعني : $\overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

و يمكن كذلك أن نجيب بالطريقة التالية :

لدينا : $\frac{a - c}{b - c} = 2 \in \mathbb{R}$ إذن : $\arg\left(\frac{a - c}{b - c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overline{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}}\right) \equiv 0 \equiv [2\pi]$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

2 ب

لدينا : T إزاحة معرفة بما يلي : $\begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M & \longmapsto & T_{\vec{u}}(M) \end{array}$

نضع : $d = aff(D)$. و ننطلق من الكتابة : $T_{\vec{u}}(C) = D$.

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة : $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$

و منه باستعمال الأعداد العقدية : $aff(\overrightarrow{CD}) = aff(\vec{u})$.

يعني : $(d - c) = (1 + 5i)$

يعني : $d = 1 + 5i + c = 1 + 5i + 2 + i = 3 + 6i$

إذن : $d = 3 + 6i$

2 ج

لدينا : $\frac{d - c}{b - c} = \frac{(3 + 6i) - (2 + i)}{(4 - 2i) - (2 + i)} = \left(\frac{1 + 5i}{2 - 3i}\right) = \frac{-13 + 13i}{2^2 - (3i)^2}$

$$= \frac{13(-1 + i)}{13} = -1 + i$$

و بالتالي : $\frac{d - c}{b - c} = -1 + i$

لنبين الآن أن $\frac{3}{4}$ عمدة للعدد العقدي $(-1 + i)$.

لدينا :

$$e^{\frac{i3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$$

إذن : $e^{\frac{i3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$

و منه : $\arg\left(e^{\frac{i3\pi}{4}}\right) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)\right)\ [2\pi]$

يعني : $\frac{3\pi}{4} \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arg(-1 + i)\ [2\pi]$

يعني : $\frac{3\pi}{4} \equiv 0 + \arg(-1 + i)\ [2\pi]$

و بالتالي : $\arg(-1 + i) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

يعني أن : $\frac{3\pi}{4}$ عمدة للعدد العقدي $(-1 + i)$.

2 د

لدينا : $\frac{d - c}{b - c} = -1 + i$

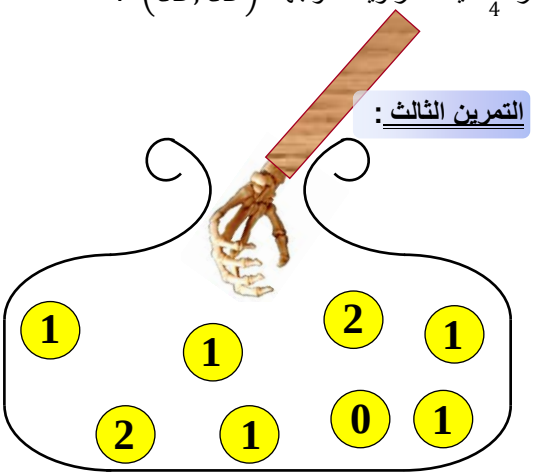
إذن : $\arg\left(\frac{d - c}{b - c}\right) \equiv \arg(-1 + i)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\frac{d - c}{b - c}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overline{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن نختار $\frac{3\pi}{4}$ قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overline{\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}}\right)$.

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يحتوي على 8 بيدقات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_8^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_8^3 = 56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $A = \{$ الحصول على ثلاث كرات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى $\}$

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى}\right) = p\left(\text{الحصول على كرة ثالثة تحمل 2} \text{ و } \text{الحصول على كرة ثانية تحمل 1} \text{ و } \text{الحصول على كرة تحمل 0}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{الحصول على كرة ثالثة تحمل 2} \text{ و } \text{الحصول على كرة ثانية تحمل 1} \text{ و } \text{الحصول على كرة تحمل 0}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{56} = \frac{1 \times 5 \times 2}{56} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

إذن : $\boxed{p(A) = \frac{5}{28}}$

www.baclive.blogspot.com

لدينا : $B = \{$ مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي $5 \}$

لدينا : $\begin{cases} 5 = 0+1+4 \\ 5 = 0+2+3 \\ 5 = 1+1+3 \\ 5 = 1+2+2 \end{cases}$

بما أن الكيس لا يضم أية بيدقة تحمل العددين 3 و 4 .

فإن : الحالة الوحيدة التي يتحقق فيها الحدث B هي : $5 = 1+2+2$

إذن : $p\left(\text{مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي 5}\right) = p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة تحمل العدد 1}\right)$

$$= \frac{card\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة تحمل العدد 1}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{56} = \frac{5 \times 1}{56} = \frac{5}{56}$$

لدينا : $C = \{$ مجموع الأعداد التي تحملها البيدقات المسحوبة يساوي $4 \}$

لدينا : $\begin{cases} 4 = 1+1+2 \\ 4 = 0+2+2 \end{cases}$

إذن : $p(C) = p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة واحدة تحمل العدد 0 أو بيدقتان تحملان العدد 1 و بيدقة واحدة تحمل العدد 2}\right)$

$$= p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة واحدة تحمل العدد 0}\right) + p\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 1 و بيدقة واحدة تحمل العدد 2}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 2 و بيدقة واحدة تحمل العدد 0}\right)}{56} + \frac{card\left(\text{بيدقتان تحملان العدد 1 و بيدقة واحدة تحمل العدد 2}\right)}{56}$$

$$= \frac{C_5^2 \times C_2^1}{56} + \frac{C_2^2 \times C_1^1}{56} = \frac{10 \times 2}{56} + \frac{1}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . لدينا : $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$

إذن : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}u_n - \frac{120}{11}$

$$= \frac{10}{11}(u_n - 12)$$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

2 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

لدينا : $u_0 = 11 < 12$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n - 12 < 0$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 < 0$

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} < 12$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بالتالي : حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

2 ب

سوف نُوَظِّفُ نتيجة السؤال 1) في إحدى مراحل الجواب .

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (u_{n+1} - 12) < 0$

يعني أن الكمية $(u_n - 12)$ سالبة كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

نعلم أن : $10 < 11$ إذن : $\frac{10}{11} < 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب $(u_n - 12)$ نحصل على :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \frac{10}{11}(u_n - 12) > 1(u_n - 12)$$

نستعمل نتيجة السؤال 1) نحصل على :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 > u_n - 12$$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} > u_n$

إذن : المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

2 ج

بما أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد 12

(لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n < 12$)

فإن هذه المتتالية متقاربة .

3 أ

نعلم حسب السؤال 1) أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$

إذن حسب تعريف المتتالية $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ نجد : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$

إذن : $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{10}{11}$

و بالتالي حدها العام v_n يُكتَب على الشكل : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = v_0\left(\frac{10}{11}\right)^{n-0}$

و لدينا : $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

إذن : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n}$ $(*)$

3 ب

لدينا حسب تعريف المتتالية $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$: $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ v_n = u_n - 12$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = 12 + v_n$

و منه باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

نلاحظ أن $\left(\frac{10}{11}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{10}{11}$ و هو عدد موجب أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n\right) = 12 - 0 = 12$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1[$. إذن : $0 < x < 1$

يعني : $(x-1) < 0$ و $(x+1) > 0$ و منه : $(x+1)(x-1) < 0$

يعني : $\boxed{(x^2 - 1) < 0}$ (1)

و لدينا كذلك : $0 < x < 1$ إذن : $\ln x < 0$ يعني : $\boxed{2x^2 \ln x < 0}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن الكميتان $(x^2 - 1)$ و $2x^2 \ln x$ سالبتان على المجال $]0;1[$.

و منه $(x) < 0$ لأن $g(x)$ عبارة عن مجموع كميتين سالبتين .

و بما أن : $g(1) = 0$ فإن : $\forall\ x \epsilon\ ]0;1]\ ;\ g(x) \leq 0$

www.baclive.blogspot.com

I 2

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$. يعني : $x>1$

و منه : $\boxed{2x^2\ln x>0}$ (1)

و لدينا كذلك $x>1$ إذن : $(x-1)>0$ و $(x+1)>0$.

و منه : $(x+1)(x-1)>0$ يعني : $\boxed{(x^2-1)>0}$ (2)

من (**1**) و (**2**) نستنتج أن الكميتان (x^2-1) و $2x^2\ln x$ موجبتين على المجال $]1;+\infty[$

و منه : $g(x)>0$ لأن $g(x)$ عبارة عن مجموع كميتين موجبتين قطعا .

و بما أن : $g(1)=0$ فإن : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-1)\ln x=(0-1)(-\infty)=+\infty$$

إذن : $\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

و تأويل هذه النهاية مبيانيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (يعني محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر "

II 1 ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)\ln x=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$ (1)

و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)(\ln x)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty}$ (2)

و من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $f(x)=(x^2-1)\ln x$

إذن :

$$f'(x)=(x^2-1)'\ln x+(\ln x)'(x^2-1)=2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}=\frac{2x^2\ln x+x^2-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

نُعَوض x بالعدد 1 نحصل على : $f'(1)=\frac{g(1)}{1}=0$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفصول 1 .

II 2 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال I) 1) : $\forall x\in]0;1]\ ;\ g(x)\leq 0$

إذن : $\forall x\in]0;1]\ ;\ \frac{g(x)}{x}\leq 0$

يعني : $\forall x\in]0;1]\ ;\ f'(x)\leq 0$

يعني أن الدالة f تناقصية على المجال $]0;1]$.

و نعلم كذلك حسب السؤال I) 2) أن : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

يعني : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ \frac{g(x)}{x}\geq 0$

يعني : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f'(x)\geq 0$

يعني أن الدالة f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

II 2 ج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x\leq 1$

و منه : $f(x)\geq f(1)$ (لأن f تناقصية على المجال $]0,1]$).

إذن : $\boxed{\forall x\in]0;1]\ ;\ f(x)\geq 0}$ (1)

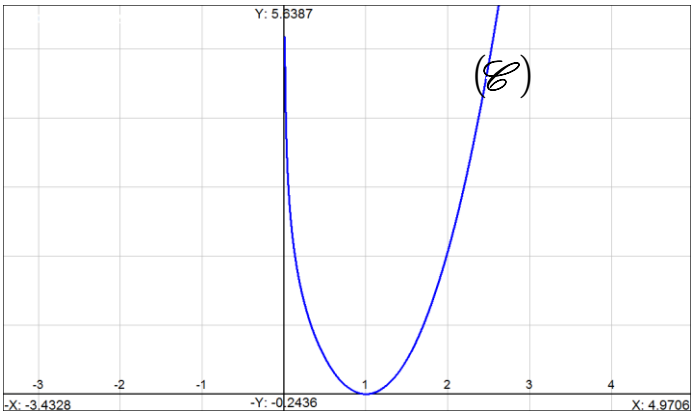
ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x\geq 1$

و منه : $f(x)\geq f(1)$ (لأن f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$).

إذن : $\boxed{\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f(x)\geq 0}$ (2)

من النتيجتين (**1**) و (**2**) نستنتج أن : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)\geq$

II 3



II 4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $u(x)=\frac{x^3}{3}-x$

إذن : $u'(x)=\frac{3x^2}{3}-1=x^2-1=v(x)$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ u'(x)=v(x)$

يعني أن الدالة u دالة أصلية للدالة v على $\mathbb{R}$.

II 4 ب

$$\int_1^2\underbrace{(x^2-1)}_{u'}\underbrace{\ln x}_{h}\,dx=[u(x)\cdot h(x)]_1^2-\int_1^2u(x)\cdot h'(x)\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+[x]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)+(2-1)$$

$$=\frac{2\ln 2}{3}-\frac{7}{9}+1=\frac{2}{9}(1+3\ln 2)$$

www.baclive.blogspot.com

II 4 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين $x = 1$ و $x = 2$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طولا أو مساحة أو حجم .

إذن : $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\, dx$

و نعلم أن : $\forall\, x \in]0; +\infty[\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $\forall\, x \in]0; +\infty[\ ;\ |f(x)| = f(x)$

و منه : $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 (x^2 - 1)\ln x\, dx$

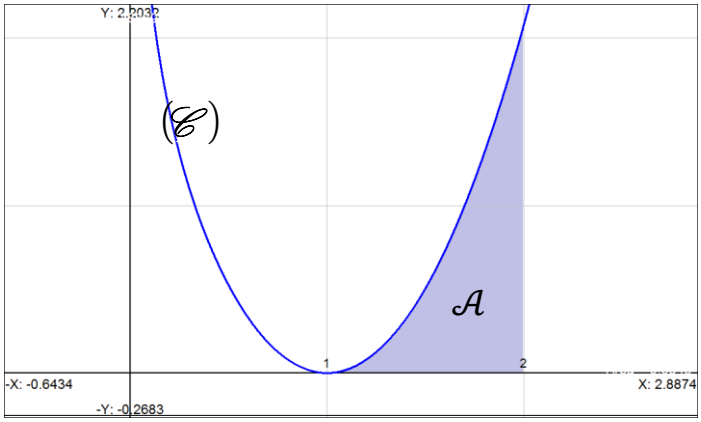
$$= \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)(unité)^2$$

$$= \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)(3\ cm)^2$$

$$= \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2) \times 9\ cm^2$$

$$= 2(1 + 3\ln 2)\ cm^2$$

$$\approx 6{,}16\ cm^2$$



www.baclive.blogspot.com