

คำถามสำหรับ Mathcenter Contest Round 1/2012

ระดับโอลิมปิก

คำสั่ง: จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จงพิสูจน์โดยไม่ใช้สมภาคว่า ไม่มีจำนวนเต็ม a, b, c ซึ่งสอดคล้องกับ $a^2 + b^2 - 8c = 6$
(เสนอโดย คุณ Metamorphosis)

2. ให้ $p = 2^n + 1$ และ $3^{(p-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ จงแสดงว่า p เป็นจำนวนเฉพาะ
(เสนอโดย คุณ จุกัดเหลียง)

3. ถ้า $p, p^2 + 2$ ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนนับกี่จำนวนที่หาร $p^5 + 2p^2$ ลงตัว
(เสนอโดย คุณ จุกัดเหลียง)

4. ให้ a, b, c แทนความยาวด้านของสามเหลี่ยมใดๆ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}} \geq \sqrt{3}$$

(เสนอโดย คุณ จุกัดเหลียง)

5. ให้ $a, b, c > 0$ และ $a + b + c + abc = 4$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c)$$

(เสนอโดย คุณ จุกัดเหลียง)

6. ให้ $a, b, c > 0$ และ $abc = 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{b^2(c+a)(a+b)} + \frac{b}{c^2(a+b)(b+c)} + \frac{c}{a^2(c+a)(a+b)} \geq \frac{3}{4}$$

(เสนอโดย คุณ จุกัดเหลียง)

7. ฟังก์ชันเลขคณิต ν นิยามโดย

$$\nu(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ k, & n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \end{cases}$$

เมื่อ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ แทนการเขียนในรูปแบบบัญญัติ

จงแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ m, n ใดๆ,

$$\tau(n^m) = \sum_{d|n} m^{\nu(d)}$$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

8. (6 คะแนน) สำหรับเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ซึ่ง $A, B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ ให้ $A \equiv B \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{n}$ สำหรับทุก $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ นั่นคือ $A - B = nZ$ สำหรับบาง $Z \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ (สัญลักษณ์ $A \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ หมายถึงสมาชิกทุกตัวใน A เป็นจำนวนเต็ม)

จงแสดงว่า สำหรับ $A \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ จะมี $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ ซึ่ง $AB \equiv I \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ $(\det(A), n) = 1$ พร้อมทั้งหาค่าของ B ในรูปของ A เมื่อ I แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ $m \times m$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

9. (5 คะแนน) สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ซึ่ง $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ จงหาค่าต่ำสุดของ

$$a + b + c + \frac{3}{ab + bc + ca}$$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

10. ตารางขนาด 8×8 บรรจุเลข $1, 2, \dots, 8$ ลงไปจำนวนละเท่าไรก็ได้ โดยมีเงื่อนไขว่า สองจำนวนที่ติดกันในแนวดิ่ง, แนวนอน, แนวทแยง เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน พิสูจน์ว่ามีตัวเลขบางตัวปรากฏในตารางอย่างน้อย 12 ครั้ง

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

11. (4 คะแนน) กำหนดลำดับของจำนวนเฉพาะบวก p_1, p_2, p_3, \dots ให้เซต A คือเซตอนันต์ของจำนวนเต็มบวกที่สมาชิกแต่ละตัวมี prime divisor ไม่เกิน p_n แล้ว จะต้องเลือกสมาชิกจากเซต A อย่างน้อยเท่าใด จึงจะมั่นใจว่าจะมี 2 จำนวนซึ่งผลคูณเป็นกำลังสองสมบูรณ์

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

12. (6 คะแนน) กำหนดจำนวนนับ $n > 2$ ให้เซต $\{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}\} \subset \mathbb{Z}$ คือเซต Reduced Residue System (RRS) ของมอดุโล n (หรือก็คือ เซตของจำนวนเต็ม k โดยที่ $(k, n) = 1$ และไม่มีคู่ใดคอนกรูเอนซ์กันในมอดุโล n)

ถ้าเขียน

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{\phi(n)}} = \frac{a}{b}$$

โดยที่ $a, b \in \mathbb{N}$ และ $(a, b) = 1$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $n|a$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

13. (4 คะแนน) กำหนดฟังก์ชัน $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ซึ่ง

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

ทุกจำนวนจริงบวก x, y จงพิสูจน์ว่ามีบางจำนวนจริงบวก a ซึ่ง $f(a) < 0$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

14. (6 คะแนน) สำหรับจำนวนจริง $a, b, c > 0$ ซึ่ง $bc - ca - ab = 1$ จงหาค่าสูงสุดของ

$$P = \frac{4024}{1+a^2} - \frac{4024}{1+b^2} - \frac{2555}{1+c^2}$$

พร้อมทั้งหาว่าเกิดเมื่อใด

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

ระดับมัธยมปลาย

คำสั่ง: จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (5 คะแนน) หารากจริงบวกจากสมการ $x[x[x]] = 2012$

(เสนอโดย คุณ PP_nine)

2. นำเชือกยาว L มาตัดเป็น 2 ส่วน ส่วนที่หนึ่งนำมาตัดเป็นรูปครึ่งวงกลม ส่วนที่ 2 นำมาขดเป็นรูปครึ่งของครึ่งวงกลม ถ้า พื้นที่วงกลมทั้งสองรูปรวมกันมีค่าน้อยที่สุด แล้วเชือกส่วนที่หนึ่งยาวเท่าใด กำหนด $\pi = 3$

(เสนอโดย คุณ Metamorphosis)

3. (5 คะแนน) กำหนดเซต $A = \{ 2012, 2013, 2014, \dots, 2555 \}$ และ $\emptyset \neq B \subseteq A$ นำสมาชิกใน B มาเรียงค่าจากมากไปหาน้อย แล้วใส่เครื่องหมาย $+, -, +, -$ สลับไปที่สมาชิกจนครบทุกสมาชิกในสับเซต แล้วเรียกผลบวกสลับเครื่องหมายของสมาชิกในสับเซตนั้นว่า $S(B)$ เช่น $B_1 = \{ 2012, 2013, 2014 \}$ จะได้ $S(B_1) = 2014 - 2013 + 2012$ ถ้าผลบวกของ $S(B)$ ที่เกิดจากสับเซต B ที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดใน A มีค่าเป็น $c \cdot 2^x$ จงหาค่าของ $c + x$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

4. ถ้าทราบว่าสมการ $x^3 - (5 + i)x^2 + (9 + 4i)x + k(1 + i) = 0$ มีคำตอบหนึ่งเป็น $1 + i$ จงหาค่า k

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

5. (4 คะแนน) กำหนดให้ลำดับชุดหนึ่งมีความสัมพันธ์เป็น

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$$

ถ้า $a_{333} + a_{666} + a_{999} = 2555$ และ $a_{2554} = 2012$ จงหาค่าของ a_{2012}

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

6. (5 คะแนน) จงหาค่าที่มากที่สุดของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 45)^2 + (y - 23)^2} + \sqrt{(x - 23)^2 + (y - 45)^2}$$

โดยที่ $x^2 + y^2 = 1$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

7. (5 คะแนน) กำหนดให้ $f_1(x) = \frac{10}{11} - \frac{121}{11x+1}$ และ $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ สำหรับทุกๆ $n \geq 2$ ถ้ามีค่า x ที่ทำให้ $f_{2555}(x) = x - 3$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{m}{n}$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกและเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ต่อกันแล้ว จงหาค่าของ mn
(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

ระดับมัธยมต้น

คำสั่ง: ข้อ 1-7 จงเขียนเฉพาะคำตอบพร้อมหน่วย(ถ้ามี)

คำสั่ง: ข้อ 8-13 จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (2 คะแนน) ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ $c > b > a > 0$ ถ้า $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{7}{2}, \frac{c}{b} - \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$
จงหาค่าของ $(\frac{12c}{a} + 8)^2 + (\frac{12a}{b} - 3)^2 + 19$

(เสนอโดย คุณ Coke)

2. (2 คะแนน) ให้ a_1, \dots, a_{26} เป็นจำนวนจริง และ $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{26}$ ถ้า $\frac{A - a_i}{a_i} = 2^i - 1$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, 25$ จงหา $\frac{A}{a_{26}}$

(เสนอโดย คุณ Coke)

3. จงหาชุดของจำนวนจริง x, y, z ที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$x + y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad xz + yz = (xy + 1)^2$$

(เสนอโดย คุณ Metamorphosis)

4. (3 คะแนน) จงหาจำนวนจริงบวกทั้งหมด (ถ้ามี) ที่สอดคล้องกับ

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

(เสนอโดย คุณ Metamorphosis)

5. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็น จำนวนเต็มบวก ซึ่ง $A^3 = B^4$ และ $C^3 = D^2$ โดยที่ $C - A = 200$ จงหาค่าของ $\sqrt[3]{BD}$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

6. กำหนดให้

$$x^2 + y^2 = 7, \quad x^3 + y^3 = 10.$$

จงหาค่าที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $x + y$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงพ่าย)

7. (3 คะแนน) กำหนดให้

$$\frac{x}{668} + \frac{y}{669} + \frac{z}{670} = \frac{x}{670} + \frac{y}{671} + \frac{z}{672} = \frac{x}{674} + \frac{y}{675} + \frac{z}{676} = 1$$

จงหาค่าของ $x + y + z - 3$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงฟ้าย)

8. จงหาจำนวนเต็มที่ยอดมากที่สุดที่ทำให้ $n^3 + 100$ หารด้วย $n + 10$ ลงตัว

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงฟ้าย)

9. (4 คะแนน) จงหาค่าของ $90x + 99y + 999$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนนับที่สอดคล้องกับสมการ

$$y^2 + 15x^2y^2 = 8145x^2 + 2556$$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงฟ้าย)

10. จงหาค่าของ

$$(\sqrt{42} + \sqrt{43} + \sqrt{44})(\sqrt{42} - \sqrt{43} + \sqrt{44})(\sqrt{42} + \sqrt{43} - \sqrt{44})(-\sqrt{42} + \sqrt{43} + \sqrt{44})$$

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงฟ้าย)

11. กล้องใบหนึ่งมีจุดยอดเป็น ABCDEFGH ดังรูป

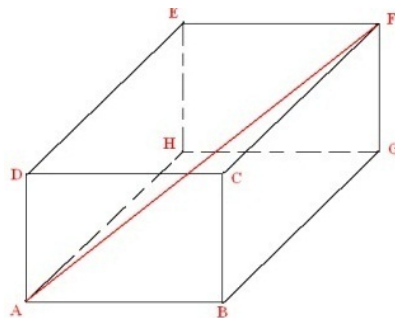
วัดระยะทางจากจุด A ไปยังจุด F ได้ 65 หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจากส่วนของเส้นตรง AF ไปยังจุด B คือ $\frac{42\sqrt{116}}{65}$ หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจากส่วนของเส้นตรง AF ไปยังจุด G คือ $\frac{24\sqrt{3649}}{65}$ หน่วย

ระยะทางที่สั้นที่สุดจากส่วนของเส้นตรง AF ไปยังจุด C คือ $\frac{300}{13}$ หน่วย

จงหาปริมาตรของกล้อง



(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดียวดายแสงฟ้าย)

12. (3 คะแนน) จำนวนนับสองจำนวน มีผลหารจากการหารค.ร.น. ด้วยห.ร.ม. เป็น 9950 และผลบวกของสองจำนวนนั้นมีค่า 7221 จงหาผลต่างของสองจำนวนนั้น
(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

13. (3 คะแนน) เมื่อเขียนจำนวน 300! ในระบบเลขฐานสิบเอ็ดจะมี 0 ลงท้ายกี่ตัว
(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

14. (4 คะแนน) ให้ AB เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางบนวงกลม O ต่อเส้นตรง AB จากจุด B ไปยังภายนอกวงกลมไปถึงจุด C โดยที่ระยะ BC เป็น 74 หน่วย แล้วลากเส้นจากจุด C ไปกับสัมผัสกับวงกลมที่จุด D ต่อ CD จากจุด D ไปถึงจุด F ทำให้ AF, DF เป็นเส้นสัมผัสวงกลม ถ้าความยาวของ AF เป็น 2220 หน่วยแล้ว จงหารัศมีของวงกลม O
(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดี๋ยวดายแสงพ่าย)

15. (4 คะแนน) กำหนดสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ มีความยาวแต่ละด้าน 12 หน่วย มีจุด P อยู่บนแนวเส้นทแยงมุม AC โดย AP ยาวกว่า CP ลาก PB, PD จากนั้นวาดวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABP และสามเหลี่ยม CDP กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็น O_1 และ O_2 ตามลำดับ วัดมุม O_1PO_2 ได้ 150 องศา ถ้าความยาวด้าน AP เขียนได้ในรูป $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวกและ $b > d > a > c$ จงหาค่าของ $11a + 22b + 33c + 44d$
(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดี๋ยวดายแสงพ่าย)

16. (4 คะแนน) สี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ มีเส้นทแยงมุม AC, BD ตัดตั้งฉากกันที่ X ถ้าเส้นที่ลากจาก X ไปตั้งฉากด้าน AB, BC, CD ยาว $\sqrt{5}, \sqrt{73}, \sqrt{7}$ ตามลำดับแล้ว จงหาความยาวเส้นที่ลากจาก X ไปตั้งฉากด้าน DA
(เสนอโดย คุณ PP_nine)

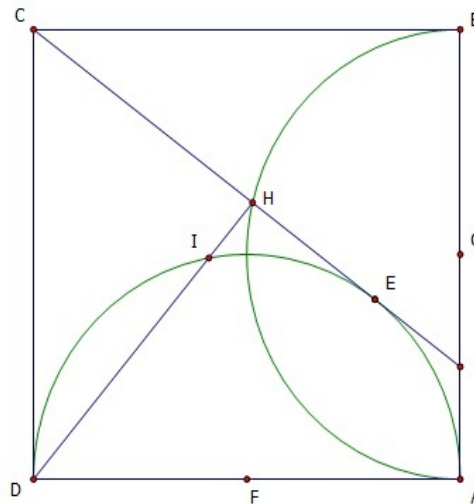
17. กำหนด $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสาม ซึ่ง $P(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับ $x = 1, 2, 3, 4$ จงหาค่าของ $P(5)$
(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

18. (4 คะแนน) กำหนดจำนวนจริงบวก $a < b < c$ เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนมุมภายในเป็น 2:3:4 ถ้า $\frac{c^2}{a+b} = 29$ แล้ว $c^2 - ab$ มีค่าเท่าไร
(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

19. (4 คะแนน) สี่เหลี่ยม ABCD มี AB ยาว 13 หน่วย , BC ยาว 45 หน่วย และ CD ยาว 52 หน่วย และ $\angle BAD = \angle ADC$ ถ้ามีครึ่งวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บน AD และสัมผัสกับด้านที่เหลือทั้งสาม สี่เหลี่ยม ABCD มีพื้นที่เท่าไร

(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

20. (4 คะแนน) จากภาพ สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD มีพื้นที่ 29 ตารางหน่วย CE เป็นเส้นสัมผัสครึ่งวงกลม F ตัดครึ่งวงกลม G ที่ H และ DH ตัดครึ่งวงกลม F ที่ I จงหาอัตราส่วนความยาว DI ต่อ IH



(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

ระดับประถมปลาย

คำสั่ง: จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. (3 คะแนน) จงหาผลรวมของจำนวนนับ ที่มีสมบัติว่า เมื่อบวกด้วย 4242 หรือลบด้วย 2424 ก็จะได้ผลลัพธ์ที่เป็นพหุคูณของจำนวนนั่นเอง

(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

2. (3 คะแนน) ตั้งนาฬิกาสามเรือนให้ตั้งปลุกทุก 24 , 44 และ 42 นาที หลังจากทีนาฬิกาทั้งสามปลุกในเวลาเดียวกันเป็นครั้งที่สาม จะได้ว่ามีการปลุกในช่วงเวลาที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ครั้ง

(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)

3. (4 คะแนน) นักมายากลบอกให้ผู้ร่วมแสดงนึกเลขสามหลัก ซึ่งเลขโดดแต่ละหลักแตกต่างกันไว้ในใจ จากนั้นให้สลับหลักของเลขสามหลักนั้นมาสร้างเลขสามหลักอีก

5 จำนวน เช่น ถ้าคิดเลข 123 ไว้ในใจให้สร้างเลขสามหลักอีก 5 จำนวนดังนี้ 132; 213; 231; 312; 321 แล้วนำเลขทั้ง 5 จำนวนที่ได้มานั้นบวกกันได้ผลลัพธ์เป็น 1209 ก็บอกค่า 1209 นี้แก่นักมายากล นักมายากลก็ทราบได้ว่าเลขที่ผู้ร่วมแสดงคิดในใจคือ 123 ถ้าสมมติว่าท่านเป็นนักมายากลแล้วผู้ร่วมแสดงบอกค่าผลรวมตัวเลข 5 จำนวนแก่ท่านว่าเป็น 3839 จงหาว่าผู้ร่วมแสดงคิดจำนวนสามหลักใดไว้ในใจ

(เสนอโดย คุณ กระป๋องเดี่ยวตายแสงพ่าย)

4. (2 คะแนน) กำหนดการกระทำ $x \otimes y$ ถ้า $1 \otimes 2 = 5$ และ $3 \otimes 4 = 25$ ดังนั้นจงหาคาของ $12 \otimes 34$

(เสนอโดย คุณScylla_Shadow)