



United Arab Emirates
Ministry of Education



نسخة المعلم

الرياضيات المتقدمة

مدخل إلى التفاضل والتكامل

للفصل الثاني عشر من McGraw-Hill

نسخة الإمارات العربية المتحدة

مجلد 1



mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2017 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 9-978-1-52-681077-1 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-681077-8 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 9-978-1-52-681080-0 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-681080-8 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 XXX 20 19 18 17 16



صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان رئيس الدولة، حفظه الله

”يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة حتى تتمكن دولة الإمارات خلال
الألفية الثالثة من تحقيق نقلة حضارية واسعة.“
من أقوال صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان



ملخص المحتويات

الوحدة 0 التهيئة لحساب التفاضل والتكامل

1 الدوال الأسية وكثيرة الحدود والنسبية

2 الدوال الأسية واللوغاريتمية

3 دوال حساب المثلثات

4 المحايادات ومعادلات حساب المثلثات

5 أنظمة المعادلات والمصفوفات

6 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

7 المتجهات

8 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

9 المتتاليات والمتسلسلات

10 الإحصاء الاستقرائي

11 الحدود والمشتقات

12 موضوعات تهيئية

كتيب الطالب

المؤلفون

يضمّن مؤلفونا الرواد أن برامج Macmillan/McGraw-Hill و Glencoe/McGraw-Hill الخاصة بالرياضيات منظمة بشكل رأسي حقيقي بواسطة البداية مع النهاية في النجاح العقلي في الجبر 1 وما بعده. بواسطة "التخطيط الخلفي" للمحتوى من برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامجنا الرياضية موضحة بشكل جيد في نطاقها وتسلسلها.

المؤلفون الرواد



جلبرت جاي كويافاس، حاصل على درجة الدكتوراه.

أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس
جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية
ثرية، عمليات تمثيلية رياضية



ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.

مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي
جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير
المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية



كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا
جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب
في الجبر 1



روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي
جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمالية، والإحصائيات، وتعليم
مدرس الرياضيات

مؤلفو البرامج



الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.

المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم
الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي



لورجين براين

مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل
والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

مؤلف مشارك



جاي مكاتي

مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند



فايكن هوفيسبيان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايتيه، كاليفورنيا

الاستشاريون والمراجعون

كان لهؤلاء الخبراء أبلغ الأثر في تقديم إسهامات واقتراحات قيّمة لتحسين مدى فعالية الارشادات الخاصة بالرياضيات.

الاستشاري الرئيس



فایکن ہوفیسیان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايته، كاليفورنيا

الاستشاريون

الإعداد لدراسة المستوى المتقدم

إليزابث دبليو. بلاك

مدرس رياضيات
مدرسة جرينويتش الثانوية
جرينيتش، كونكتيكت

دیسکی روس

مدرس أول للتعيين المتقدم للرياضيات
مدرسة فلوجيرفيل الثانوية
فلوجيرفيل، تكساس

التهيئة للاختبار

سى. إف. بلاك

مدیر
مرکز تدریس کولج هیل
جرینیتش، کونیکتیکت

الحاسبة اليدوية

روث إم کاسی

معلمة محلية
(استعانة المدرس بالتقنية أثناء التدريس)
فرانكفورت، كنتاكي

جیری جای. کومینز

رئيس المجلس الوطني السابق لمشرفي الرياضيات هينسدیل، الینوی

العلوم / الفيزياء

جین برای فیلسون

معلم
كلية سانتا في
جستزفيل، فلوريدا

جیم فیلسون

معلم
كلية سانتا في
جستزفيل، فلوريدا

مرحلة تمهيدى هندسة

سیلیسٹ بین

استشارية
سبرينجفيلد، أوريجون

ألفريد سي. سولدافيني، بي. إي.

أستاذ مساعد
جامعة ديپري
ألفاريتا، جورجيا

المراجعون

كليف ألريد

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة سي. إف. فيجور الثانوية
موبايل، ألاباما

فرناندو أنتونيز

مدرس رياضيات
مدرسة سترانهان الثانوية
فورت لودردال، فلوريدا

مارك ب. بيتز

مدرس الرياضيات/منسق الاختبارات المدرسية
مدرسة سالم الثانوية
سالم، فيرجينيا

جيمي بيوكائن

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بيتوسكي الثانوية
بيتوسكي، ميتشيجان

دوجلاس كارينجر

مدرس رياضيات
مدرسة إس. إف. أوستن الثانوية
هيوستن، تكساس

ديبي إيه. تشوريل

مدرسة رياضيات
مدرسة أوك جلين الثانوية
نيو كمبرلاند، فيرجينيا الغربية

فرانكو إيه. ديباسكوا

موجه الصف 12 في مادة الرياضيات
ويست سينيك سينترال
ويست سينيك، نيويورك

روبرت دوبيسا

مدرس رياضيات
مدرسة باونير الثانوية
وايتيه، كاليفورنيا

كيمبرلي جارسيا

مدرس رياضيات
مدرسة ليون الثانوية
تالاهاسي، فلوريدا

كورتني جلاس

مدرس رياضيات
مدرسة مونروفيا الثانوية
مونروفيا، كاليفورنيا

جو جريسون

مدرس رياضيات، رئيس قسم الرياضيات
مدرسة مارتنسفيل الثانوية
مارتنسفيل، فيرجينيا

ماري إتش. هانز

مدرسة رياضيات
مدرسة كارول الثانوية
فورت واين، إنديانا

ليا بي. هودجينز

مدرس رياضيات
مدرسة دين بوزمان
بنما سيتي، فلوريدا

واندا جينز ليرت

مدرسة رياضيات، حاصلة على ماجستير في
العلوم
مدرسة إيه. إم. باربي الثانوية
ليك تشارلز، لويزيانا

جراي ناكاياما

مدرس رياضيات
مدرسة سبين بارك الثانوية
برمنجهام، ألاباما

ستيفن باريسي

مدرس رياضيات
مدرسة ويليامسفيل نورث الثانوية
ويليامسفيل، نيويورك

بول إي. بيلي

مدرس رياضيات
مدرسة إيستهامبتون الثانوية
إيستهامبتون، ماساتشوستس

بينيلوبي ساذر

مدرسة رياضيات
مدرسة آر. إل. تورنر الثانوية
كارولتون، تكساس

جولي سكالكا مارتن

منسقة مناهج قسم الرياضيات
مدارس مترو ناشفيل الرسمية
ناشفيل، تينيسي

ريتشارد آر. سيوندلين

رئيس قسم الرياضيات سابقًا
مدرسة أرسينال تيكنكال الثانوية
إنديانا بوليس، إنديانا

ألكس تايلور

مدرس أول في حساب التفاضل والتكامل
المستوى المتقدم
مدرسة زي بي فانس الثانوية
شارلوت، نورث كارولينا

فيكالين تيسون

مدرس رياضيات
منطقة بيكرينجتون المحلية التعليمية
بيكرينجتون، أوهايو

آن أوما

مدرسة رياضيات
مدرسة كينجستري الثانوية
كينجستري، كارولينا الجنوبية

فريد فوجت

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بيكين المجتمعية الثانوية
بيكين، إلينوي

جولي ويليامز

معلمة رياضيات
مدرسة لوتون الثانوية
لوتون، أوكلاند

كاثلين ويليامز

مدرسة رياضيات
مدرسة جلينديل الثانوية العليا
جلينديل، كاليفورنيا

بولا إس. ويات

معلمة ورئيسة قسم الرياضيات
مدرسة إيست جاستون الثانوية
مونت هولي، كارولينا الشمالية

ماريان دي. زامور

رئيسة قسم الرياضيات
مدرسة أواسو الثانوية
أواسو، أوكلاند

المسارات المتعددة للتعلم

سوف ينخرط الطلاب في مهام يجدونها شيقة ومحفزة ومهمة. في الفصل الدراسي، تتمثل العوامل الأساسية في العلاقة بين المعلم والطلاب وعلم أصول التدريس ومناخ التعلم في الفصل الدراسي

الرياضيات المتقدمة تهدف إلى تزويد الطلاب بنهج متوازن لتعلم الرياضيات، حيث يصبح الطلاب ناجحين من خلال مجموعة متنوعة من طرائق التدريس.

الحفاظ على التشويق

يكون الطلاب الذين ينخرطون في أنشطة الكتاب أكثر احتمالاً لتركيز انتباههم في الفصل. فمنهج **الرياضيات المتقدمة** يناقش الموضوعات التي ترتبط بالطلاب في يومنا هذا.

المحتوى المترابط

يستخدم الطلاب الخطة التدريسية "السابق، والحالي، ولماذا؟" التي تربط ما يعرفونه بما يتعلمونه الآن. ويساعد قسماً "مفردات جديدة" و"مراجعة المفردات" الطلاب على تعلم "حديث في الرياضيات".

حل معادلات الخطوة الواحدة

2-2

السابق

الحالي

لماذا؟

1. حلت المعادلات إلى معادلات.

2. حلت المعادلات باستخدام الجمع والطرح.

1. حلت معادلات باستخدام الجمع أو الطرح في أي معادلة. يمثل المتغير العدد الذي يحقق المعادلة. إن **حل معادلة** يعني إيجاد قيمة المتغير الذي يجعل المعادلة صحيحة.

تتطلب عملية حل المعادلة افتراض أن المعادلة الأصلية لها حل وعزل المتغير لمعامل 1 على أحد جوانب المعادلة. تؤدي كل خطوة بهذه العملية إلى معادلات متكافئة. **معادلات متكافئة** لها الحل نفسه.

مفهوم أساسي خاصية الجمع في المعادلة

الشرح إذا كانت معادلة ما صحيحة وتم جمع العدد نفسه مع كل طرف من المعادلة، فإن المعادلة المتكافئة الناتجة عن ذلك تكون صحيحة أيضاً.

الرموز بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b و c ، إذا كان $a = b$ ، فإن $a + c = b + c$.

أمثلة

$14 = 14$	$-3 = -3$
$14 + 3 = 14 + 3$	$+9 = +9$
$17 = 17$	$6 = 6$

مثال 1: الحل باستخدام الجمع

حل $c - 22 = 54$

الطريقة الأساسية

$c - 22 = 54$

$c - 22 + 22 = 54 + 22$

$c = 76$

أضف 22 لكل طرف.

حوّل لأبسط صورة.

للتحقق من أن 76 هو الحل، بَـل 76 محل c في المعادلة الأصلية.

الطريقة الآتية

$c - 22 = 54$

$c = 76$

معوض 76

الطرح

تفريق موجب

1A. $113 = g - 25$

1B. $j - 87 = -3$

التعلم القائم على المسائل

مجموعة ثرية من فرص حل المسائل تتضمن:

- **التمثيلات المتعددة** في كل وحدة
- مهارات التفكير العليا لحل المسائل في كل درس
- أمثلة **محلولة** باستخدام خطة الخطوات الأربع
- **نصائح إستراتيجية** حل المسائل الشاملة
- **إستراتيجيات اجتياز الاختبارات** في كل وحدة
- **النقاط الأساسية** للتمرين على المسائل الكلامية لكل درس

التعلم من خلال التطبيق

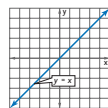
تساعد التمارين العملية في الحفاظ على تحفيز المتعلم. تقدم مختبرات الجبر المفاهيم وتعمل على تعزيزها باستخدام وسائل تعليمية يدوية مثل المربعات الجبرية. تساعد مختبرات تكنولوجيا التمثيل البياني الطلاب على استكشاف المفاهيم باستخدام الحاسبات البيانية.

1-4 مختبر تقنية التمثيلات البيانية عائلة التمثيلات البيانية الخطية



ممارسات رياضية
إعداد البنية والاستفادة منها

التمثيل البياني الأصلي
الدالة الخطية



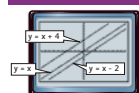
ترتبط أية عائلة من البشر بالبلاد والزواج. وعالمنا ما يتشارك الأفراد في العائلات معنو السببات. والتمثيلات البيانية الموجودة في عائلة واحدة تتشارك في سمة واحدة على الأقل.

فالتمثيلات البيانية في العائلة الخطية كلها عبارة عن مستقيمات. وأبسط تمثيل بياني في العائلة هو صاحب الدالة الأصلية المتمثلة في $y = x$

وتعرف هذه الدالة الأصلية كذلك باسم **الدالة المحايدة** (أ هـ). ويحتوي تمثيلها البياني على كل الخطوط ذات الإحداثيين (أ هـ). ومجالها ومدنها عدنان جميعاً أرقائنا حقيقيين.

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني للاستقصاء عن كيفية تأثير تغيير المعاملين m و b في المعادلة $y = mx + b$ على التمثيلات البيانية في عائلة الدوال الخطية.

نشاط 1 تغيير b في $y = mx + b$

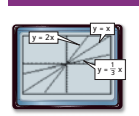


f-10, 101 scl: 1 f-10, 101 scl: 1

- مثّل كلًا من $y = x + 4$ و $y = x - 2$ في نافذة العرض الرئيسية.
- أدخل المعادلات في قائمة $Y=$ لتكون في صورة Y_1 و Y_2 و Y_3 . ثم مثّل المعادلات بيانيًا.
- خطوات العملية على الحاسبة: $Y=$ [X.T.O.] [ENTER] [X.T.O.] [+]
4 [ENTER] [X.T.O.] [=] 2 [ZOOM]
- كيف تم مقارنة أشكال الميل في التمثيلات البيانية؟
 - قارن التمثيل البياني لـ $y = x + 4$ بالتمثيل البياني لـ $y = x - 2$. كيف يمكنك الحصول على التمثيل البياني لـ $y = x + 4$ من التمثيل البياني لـ $y = x - 2$ ؟
 - كيف يمكنك الحصول على التمثيل البياني لـ $y = x - 2$ من التمثيل البياني لـ $y = x$ ؟

تعتبر نقطة التقاطع مع المحور الرأسي b يؤدي إلى تحويل أو نقل الدالة الخطية لأعلى أو أسفل المحور الرأسي y . تغيير m في $y = mx + b$ يؤثر على التمثيلات البيانية بطريقة مختلفة. أولاً، استقص عن القيم الموجبة لـ m .

نشاط 2 تغيير m في $y = mx + b$ مع b بـ 0 موجبة



f-10, 101 scl: 1 f-10, 101 scl: 1

- مثّل كلًا من $y = 2x$ و $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x$ في نافذة العرض الرئيسية.
- أدخل المعادلات في قائمة $Y=$ ومثلها بيانيًا.
- كيف تم مقارنة أشكال التقاطع مع المحور الرأسي y في التمثيلات البيانية؟
 - قارن التمثيل البياني الذي يمثل $y = 2x$ بالتمثيل البياني الذي يمثل $y = x$.
 - أعثر كمًا ميلًا: التمثيل البياني الذي يمثل $y = \frac{1}{2}x$ أم التمثيل البياني الذي يمثل $y = x$ ؟

هل يؤثر تغيير m إلى قيمة سالبة على التمثيل البياني بطريقة تختلف عن تغييره إلى قيمة موجبة؟

224 | التوسع 1-4 مختبر تقنية التمثيلات البيانية، عائلة التمثيلات البيانية الخطية

العام	الدافعة الداخلية	عدد الزوار	الإجمالي
2003	35361	624	29995
2004	36012	640	36652
2005	37092	648	37740
2006	37774	649	38423
2007	38159	635	38794
2008	38201	633	38834
2009	38605	628	39233

المصدر: ماركس إيمانويل الرسمية في شمال أمريكا

43. **أ** قاعات السينما استخدم الجدول الموجود على اليسار.

- ب. انظر الحاشية.**
- اكتب نسبة عدد القاعات الداخلية إلى إجمالي عدد القاعات لكل عام.
 - هل أي سينتين كتبتهما للجزء أ شكلان تناسباً؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فاشرح المعنى الواقعي للنسبة.
44. **اليوميات** في دراسة استقصائية، قال 36% من الطلاب إنهم احتفظوا بـ 900 طالب. وبلغ عدد الطلاب الذين يحتفظون باليوميات 2500.

45. **تمثيلات الضرب** في هذه المسألة، ستوضح كيف أن تغيير أطوال أضلاع شكل ما عن طريق أحد العوامل يغير محيط ذلك الشكل.

- أ. نموذج هندسي** ارسم مربعاً له أضلاع $ABCD$. وارسم مربعاً له أضلاع $MNPQ$ على أن تكون أضلاعه ضعف أطوال أضلاع $ABCD$. وارسم مربعاً له أضلاع $FGHJ$ على أن تكون أضلاعه نصف طول المربع $ABCD$. انظر الحاشية.

ب. نموذج جداولي أكمل الجدول التالي باستخدام المعاملين المناسبة.

	ABCD	MNPQ	FGHJ
1	طول الضلع	4	طول الضلع
2	المحيط	16	المحيط

- ج. نموذج شفوي** شغف فريضة عن التغيير في محيط المربع إذا زاد طول الضلع أو نقص بسب عامل ما. انظر الحاشية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدم مهارات التفكير العليا

46. **البنية** في عام 2007، بلغت مساحة التورادو المحصورة 2.6 مليون فدان في الولايات المتحدة وأنتجت بضائع تقدر بقيمة 17 مليار AED تقريباً. اكتب أحد الأعداد التالية على الآخر وأشرح معنى النتيجة. انظر الحاشية.
47. **الاستنتاج** قارن وبين الفرق بين النسب والمعدلات.
48. **مسألة تحفيزية** إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ و $\frac{c}{d} = \frac{1}{3}$ فأوجد قيمة $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. (تلميح: اختر قيمة a و b اللتين تكون النسب لهما صحيحة وقم $\frac{a}{b}$).

49. **الكتابة في الرياضيات** في رحلة برية، يقرأ محمود إشارات الطريق السريع ثم ينظر إلى عداد الوقود لديه.



47. **تقارن كل من النسب والمعدلات بين عددين باستخدام النسبة.** ولكن المعدلات تقارن بين قياسين يتضمنان وحدات مختلفة للقياس.
- رسم خزان الغاز الخاص بمحمود 10 جالونات وتنفق سيارته 32 ميلاً بالجالون الواحد على سرعته الحالية التي تبلغ 65 ميلاً في الساعة. فإذا حافظ على هذه السرعة، فهل يستطيع الوصول إلى أطلنطا دون التوقف للحصول على الغاز؟ اشرح استدلالك. انظر ملحق الإجابات للفصل 2.
50. **الكتابة في الرياضيات** صف كيفية استخدام النسب في الأعمال. اكتب عن موقف من واقع الحياة تستخدم النسب فيه للأعمال. انظر ملحق الإجابات للفصل 2.

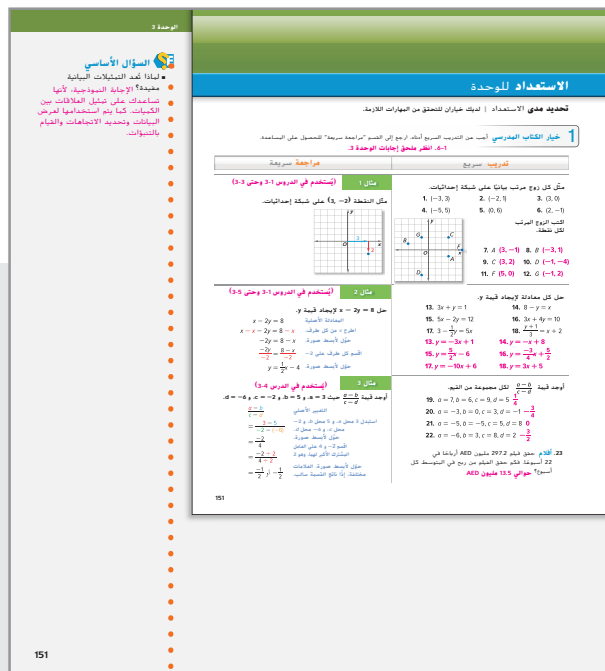
116 | الفصل 2-4 النسب والتناسب

الفهم بالتصميم

ما الذي يجب أن يعرفه الطلاب ولديهم القدرة على فعله؟ يمكن استخدام الفهم بالتصميم لمساعدة المعلمين على تحديد أهداف التعلم وتطوير عمليات تقويم فهم الطلاب والتخطيط للأنشطة التعليمية الفعالة التي تنطوي على مشاركة.

التصميم العكسي

الفهم بالتصميم (UbD) هو إطار عمل يستخدم التصميم العكسي لتطوير منهج دراسي متناسق عن طريق دراسة النتائج المرغوبة أولاً ثم التخطيط للتدريس.



تحديد النتائج المرغوبة

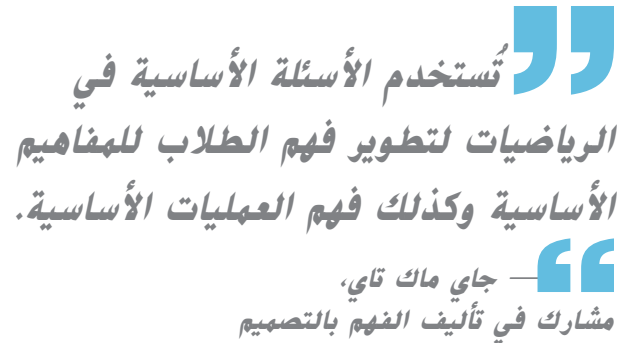
تُعد دراسة الأهداف أولى خطوات تطوير منهج دراسي فعال باستخدام إطار عمل الفهم بالتصميم. ما الذي يجب أن يعرفه الطلاب ولديهم القدرة على فعله؟

ينصب تركيز منهج **الرياضيات المتكاملة 1** على انتباه الطالب **للأسئلة الأساسية**، التي ترد في كل وحدة من وحدات كتابي الطالب والمعلم.

- يرد السؤال الأساسي في بداية كل وحدة. ويمكن استخدام هذه الأسئلة المحفزة للتفكير على شكل:
- نقطة بدء للمناقشة في الوحدة؛ حدد خلال المناقشة ما الذي يعرفه الطلاب بالفعل وما الذي يودون معرفته عن الموضوع. وبعد ذلك، راجع هذه الملاحظات أثناء تقدمك في الوحدة.
- نقطة مرجعية للفهم؛ ضع هذه الأسئلة في مكان بارز واطلب من الطلاب التوسع في إجاباتهم الأولية مع تعمق فهمهم لموضوع الدرس.

السؤال الأساسي

■ لماذا تُعد التمثيلات البيانية مفيدة؟ الإجابة النموذجية: لأنها تساعدك على تمثيل العلاقات بين

[illegible]

التقييم الهادف للتحقق من التعليم

يشعر 48% فقط من المعلمين بأن الاختبارات المعيارية تتسم بالفاعلية في مساعدتهم على تعقب أداء الطلاب.

الرياضيات المتكاملة 1 تتيح مجموعة متنوعة من عمليات التقييم المتكررة ذات الجدوى والتي تكون مضمنة مباشرة في بنية المنهج الدراسي ومواد دعم المعلمين. يتضمن البرنامج طرائق تقليدية وغير تقليدية للتقييم، بما في ذلك الاختبارات والامتحانات ومهام الأداء والتقييمات المفتوحة.

1 التقييم التشخيصي

التقييم الأولي

قوّم معرفة الطلاب في بداية العام باستخدام الاختبارات التشخيصية واختبارات التنسيب. تحدد النتائج وأدلة تسجيل الدرجات الطلاب الذين قد يحتاجون إلى موارد إضافية لتلبية المعايير الخاصة بمستوى كل صف.

تقويم المستوى المبدئي

قوّم المعرفة المسبقة للطلاب في بداية الوحدة أو الدرس.

ملاحظات حصة التقييم	
التشخيص	الحل
بدء الوحدة 2	بدء الوحدة 2
الاستعداد للوحدة 2 كتاب الطالب	الدخول التدريسي كتاب المعلم
بداية كل درس	بداية كل درس
التمارين والمهام كتاب الطالب	التمارين والمهام كتاب الطالب
أثناء/بعد كل درس	أثناء/بعد كل درس
التمارين من كتاب الطالب كل مثال	التمارين من كتاب الطالب كل مثال
ملاحظات المعلم أثناء كتاب الطالب	ملاحظات المعلم أثناء كتاب الطالب
مراجعة شذائذ كتاب الطالب	مراجعة شذائذ كتاب الطالب
التمارين من كتاب المعلم	التمارين من كتاب المعلم
التمارين من كتاب المعلم	التمارين من كتاب المعلم
منتصف الوحدة	منتصف الوحدة
اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب	اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب
اختبار ما قبل الوحدة	اختبار ما قبل الوحدة
الدخول التدريسي والمواد والتمارين كتاب الطالب	الدخول التدريسي والمواد والتمارين كتاب الطالب
تمارين على الاختبار التدريسي كتاب الطالب	تمارين على الاختبار التدريسي كتاب الطالب
تمارين على الاختبار التدريسي كتاب الطالب	تمارين على الاختبار التدريسي كتاب الطالب

1726 الوحدة 2 | الملاحظات الحصة

كتاب الطالب

■ الاستعداد للوحدة

كتاب الطالب

- تمرين موجه
- تحقق من فهمك
- مهارات التفكير العليا
- اختبار منتصف الوحدة
- دليل الدراسة والمراجعة

2 التقويم التكويني

مراقبة التقدم

حدد ما إذا كان الطلاب يحرزون تقدماً بقدر كافٍ أثناء شرح كل درس. استخدم التقييمات للتمييز بين طرائق شرح الدرس والتمرينات.

كتاب الطالب

- تمرين على الاختبار
- تمرين على الاختبار المعياري

3 التقويم الختامي

التقويم الختامي

قوّم نجاح الطالب في تعلم المفاهيم في كل فصل. استخدم اقتراحات تدارك الخطأ للتعامل مع مساحات المسائل.

التعليم المتمايز المدمج

AL قريب من مستوى الصف
OL ضمن مستوى الصف
BL أعلى من مستوى الصف

يشعر حوالي 43% من المعلمين بأن فصولهم متفاوتة للغاية من حيث قدرات الطلاب على التعلم لدرجة أنهم لا يستطيعون تعليمهم بفاعلية.

الرياضيات المتكاملة | تتيح موارد لتقييم الطلاب وتحديد مجالات احتياجاتهم وإجراء عمليات تقويم قصيرة ومتكررة لاتخاذ قرار يتسم بالدقة وفقاً لمعطيات البيانات. يأخذ كل درس في الحسبان احتياجات جميع الطلاب.

ملاحظات

مهن في العلوم والتكنولوجيا والهندسة والرياضيات

زادت رغبات الطلاب في الالتحاق بالكليات على مدار العشرين عامًا. وفي عام 1988، قال 80% إنه من المحتمل أن يلتحقوا بالكليات مقارنة بنسبة 90% اليوم.

تطوير مهن في العلوم والتكنولوجيا والهندسة والرياضيات

مع الرياضيات المتكاملة 1، يمكنك إطلاق العنان لفضول الطلاب عن العالم المحيط بهم وإعدادهم لشغل مهن في STEM (العلوم والتكنولوجيا والهندسة والرياضيات).

مهن فى الحياة اليومية

تُعدّ مهنة الحياة اليومية محل جذب وتوفر معلومات عن المهن الشائعة.

أمثلة

تكون الأمثلة ذات صلة، وترتبط التجارب التي تم اكتسابها في الفصل الدراسي بالعالم ما بعد الدراسة.

مثال 3 من الحياة اليومية: حل معادلة كثيرة الحدود

الأمثلة: بعد أول نصف ساعة، يتمكن بعض عمال ألعاب الفيديو الإلكتروني من بيعها لشركة في ذابح الإصدار كما يلي $2x^3 - 4x^2 + 2x = g(x)$ ، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المباعة بالآلات و x بعد الساعة بعد الإصدار. ما الوقت المستغرق لبيع 400 لعبة؟

بما أن $g(x)$ تمثل عدد الألعاب المباعة بالآلات، يجب أن نحل $g(x) = 400$ لتحديد الوقت المستغرق لبيع 400 لعبة.

المعادلة: $g(x) = 4$
 $2x^3 - 4x^2 - 2x = 400$
 $2x^3 + 4x^2 - 2x - 400 = 0$

نحل المعادلة باستخدام آلة حاسبة:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 400$$

نحل المعادلة باستخدام آلة حاسبة:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 400$$

نحل المعادلة باستخدام آلة حاسبة:

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 400$$

مثال 4: الإصدار الآسيوي

تتمثل البيانات التالية بالبيانات:

الوقت (ساعات)	عدد الألعاب المباعة
5.5	6.4
3.1	2.9
3.5	8.3
1.0	1.4

البيانات:

a. صمم معادلة لتقدير البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتقدير البيانات.

c. استخدم آلة حاسبة لتقدير البيانات.

مثال 5: الإصدار الآسيوي

تتمثل البيانات التالية بالبيانات:

الوقت (ساعات)	عدد الألعاب المباعة
5.5	6.4
3.1	2.9
3.5	8.3
1.0	1.4

البيانات:

a. صمم معادلة لتقدير البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتقدير البيانات.

c. استخدم آلة حاسبة لتقدير البيانات.

مثال 6: الإصدار الآسيوي

تتمثل البيانات التالية بالبيانات:

الوقت (ساعات)	عدد الألعاب المباعة
5.5	6.4
3.1	2.9
3.5	8.3
1.0	1.4

البيانات:

a. صمم معادلة لتقدير البيانات.

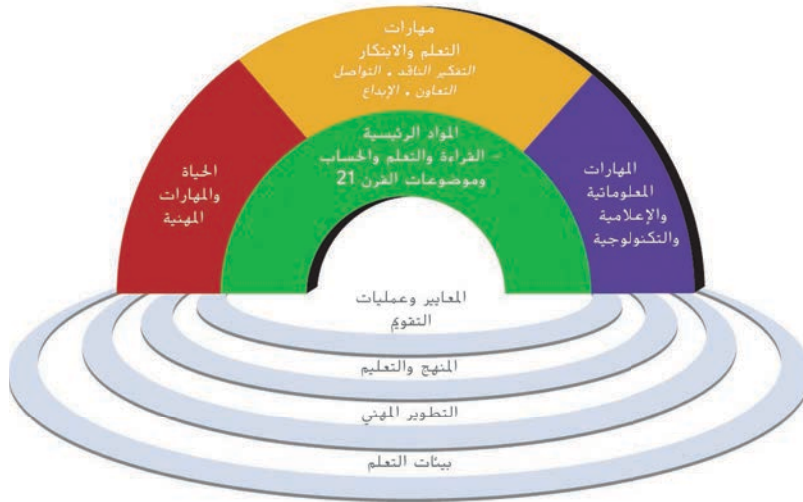
b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتقدير البيانات.

c. استخدم آلة حاسبة لتقدير البيانات.

مهارات القرن 21

تعهد الحالة الصحية الحالية والمستقبلية لاقتصاد أمريكا في القرن الحادي والعشرين اعتمادًا مباشرًا على كيف يبلغ الأمريكيون مستوى جديدًا من المعرفة - 'معرفة القرن الحادي والعشرين' - والتي تشتمل على مهارات أكاديمية فعالة ومهارات التفكير والاستدلال والعمل الجماعي والكفاءة في استخدام التكنولوجيا. -- التحالف الوطني للأعمال التابع للجنة القوى العاملة في القرن الحادي والعشرين

نتائج الطلاب وأنظمة الدعم
في القرن 21



تطوير مهارات القرن 21

تحدد الشراكة من أجل تطوير مهارات القرن 21 العناصر الأساسية التالية الخاصة بتعليم الطلاب في القرن 21.

طوال برنامج رياضيات جليكو، يحل الطلاب مسائل تشتمل على موضوعات تخص القرن الحادي والعشرين، مثل المعرفة المالية. علاوة على ذلك، يوجد أيضًا مشروع ضمن كل وحدة يشتمل على مهارات القرن الحادي والعشرين.

مهارات التعلم والابتكار

يتسم الطلاب المستعدون للتعامل مع البيئات الحياتية والعملية المعقدة على نحو متزايد بالتفكير الناقد وحل المسائل بشكل إبداعي ومبتكر والتواصل الفعال ومعرفة كيفية العمل بشكل تعاوني. طوال كل برنامج رياضيات جليكو، يتعين على الطلاب الكتابة والتفسير والتبرير والإثبات والتحليل. ويمكن للطلاب صقل مهارات التفكير الناقد العليا من خلال استخدام **مهارات التفكير العليا** كما يتم تشجيعهم على العمل بشكل تعاوني في الأنشطة العملية.

المهارات الحياتية والمهنية

تلتزم مؤسسة McGraw-Hill بمساعدة المعلمين على ضمان أن يتخرج جميع الطلاب من المدرسة الثانوية وهم مؤهلون لتحقيق النجاح في الكلية أو في وظائفهم التي يختارونها. وتعمل برامج مؤسسة McGraw-Hill على سد الفجوة بين المناهج الثانوية وما بعد المرحلة الثانوية عن طريق إدراج محتوى ما قبل الكلية وكذلك المهارات الدراسية ومهارات الحياة الانتقالية اللازمة لتحقيق النجاح في المرحلة الثانوية والجامعية على حد سواء.

المهارات المعلوماتية والإعلامية والتكنولوجية

على مدار برنامج رياضيات جليكو، يستخدم الطلاب التكنولوجيا، بما في ذلك الحاسبات البيانية لتطوير المعرفة والمهارات الخاصة بالرياضيات في القرن 21.

عمليات التقويم في القرن 21

الرياضيات المتكاملة 1 إلى الرياضيات المتكاملة 4 تتيح مجموعة متنوعة من عمليات التقويم المتكررة ذات الجدوى والتي تكون مضمنة مباشرة في بنية المنهج الدراسي ومواد دعم المعلمين. تتضمن هذه البرامج طرائق تقليدية وغير تقليدية للتقييم، بما في ذلك الاختبارات والامتحانات ومهام الأداء والتقييمات المفتوحة.



الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم



نسخة المعلم

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للفصل 12 مجلد 1

Mc
Graw
Hill
Education

mheducation.com/prek-12



جميع الحقوق محفوظة © للعام 2017 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعت له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبِعَ في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 9-978-1-52-681077-9 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-681077-8 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 9-978-1-52-681080-9 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-681080-8 (نسخة المعلم)

XXX 17 16 15 14 13 12 9 8 7 6 5 4 3 2 1



صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس الدولة، حفظه الله

**”يجب التزوّد بالعلوم الحديثة والمعارف الواسعة والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة حتى تتمكن دولة الإمارات خلال
الألفية الثالثة من تحقيق نقلة حضارية واسعة.“**
من أقوال صاحب السمو الشيخ خليفة بن زايد آل نهيان



المتطابقات والمعادلات المثلثية

4

الوحدة

228	الاستعداد للوحدة 4
230	4-1 المتطابقات المثلثية
238	4-2 إثبات المتطابقات المثلثية
245	4-3 حل المعادلات المثلثية
252	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المتباينات المثلثية
253	■ اختبار نصف الوحدة
254	4-4 متطابقات المجموع والفرق
262	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متطابقات الانخفاض
182	4-5 الزوايا المتعددة ومتطابقات ناتج الضرب إلى المجموع
	التقييم
191	■ الدليل الدراسي والمراجعة
195	■ اختبار تدريبي
196	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: معدل تغير الجيب وجيب التمام

5 أنظمة المعادلات والمصفوفات



362	الاستعداد للوحدة 5
282	5-1 الأنظمة الخطية متعددة المتغيرات وعمليات الصفوف
293	5-2 ضرب المصفوفات ومعكوساتها ومحدداتها
305	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المحددات ومساحة المضلعات
306	5-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كارمر
313	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المصفوفات والتشفير
315	■ اختبار نصف الوحدة
316	5-4 الكسور الجزئية
323	5-5 الأمثلة الخطية
	التقييم
331	■ الدليل الدراسي والمراجعة
335	■ اختبار تدريبي
336	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: الأمثلة غير الخطية

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطة

6

الرياضيات

338	الاستعداد للوحدة 6
340	6-1 القطوع المكافئة
350	6-2 القطوع الناقصة والدوائر
360	6-3 القطوع الزائدة
371	■ اختبار نصف الوحدة
372	6-4 دوران القطاع المخروطي
380	■ التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
382	6-5 المعادلات الوسيطة
390	■ التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني النمذجة باستخدام المعادلات الوسيطة
	التقييم
391	■ الدليل الدراسي والمراجعة
395	■ اختبار تدريبي
396	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجسم دوراني

المتجهات

398	الاستعداد للوحدة 7
400	7-1 مقدمة في المتجهات
410	7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
418	7-3 نواتج ضرب العددي وإسقاطات المتجهات
427	■ اختبار نصف الوحدة
428	7-4 المتجهات في الفراغ ثلاثي الأبعاد
435	■ التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني التحويلات باستخدام المصفوفات
436	7-5 نواتج ضرب العددي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفراغ
	التقييم
443	■ الدليل الدراسي والمراجعة
447	■ اختبار تدريبي
448	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجالات المتجه

8 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

450	الاستعداد للوحدة 8
452	8-1 الإحداثيات القطبية
459	الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني اختبار التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية
460	8-2 التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية
469	8-3 أشكال المعادلات القطبية والمستطيلة
478	■ اختبار نصف الوحدة
479	8-4 الأشكال القطبية للقطوع المخروطية
487	8-5 الأعداد المركبة ونظرية دي موافر
	التقييم
498	■ الدليل الدراسي والمراجعة
503	■ اختبار تدريبي
504	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: طول القوس

المتتاليات والمتسلسلات

9

المتتاليات

588	الاستعداد للوحدة 9
508	9-1 المتتاليات والمتسلسلات وترميز سيجها
517	9-2 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية
526	9-3 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
537	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني ميل المنحنى
538	اختبار نصف الوحدة
539	9-4 الاستقراء الرياضي
546	9-5 نظرية ذات الحدين
554	9-6 الدوال كمتسلسلة لا نهائية
562A	التوسع: مختبر ورقة الجدولة اكتشاف الأنماط في البيانات
	التقييم
563	الدليل الدراسي والمراجعة
567	اختبار تدريبي
568	الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: مجموع ريمان

10 الإحصاء الاستقرائي

570	الاستعداد للوحدة 10
572	10-1 الإحصاء الوصفي
582	10-2 التوزيعات الاحتمالية
592	10-3 التوزيع الطبيعي
602	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تحويل البيانات المنحرفة
603	10-4 نظرية الحد المركزي
613	■ اختبار نصف الوحدة
614	10-5 فترة الثقة
623	10-6 اختبار الفرضية
631	10-7 الارتباط والانحدار الخطي
641	التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني وسيط الخطوط المواءمة
	التقييم
643	■ الدليل الدراسي والمراجعة
649	■ اختبار تدريبي
650	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: نسبة المجتمع الإحصائي

الحدود والمشتقات

11

652	الاستعداد للوحدة 12
654	12-1 تقدير الحدود بيانيًا
664	12-2 تقييم الحدود جبريًا
675	الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني انحدار المنحنى
675	12-3 خطوط المماس والسرعة المتجهة
683	■ اختبار نصف الوحدة
684	12-4 المشتقات
693	12-5 المساحة الواقعة أسفل المنحنى والتكامل
702	12-6 نظرية حساب التفاضل والتكامل الأساسية
	التقييم
710	■ الدليل الدراسي والمراجعة
715	■ اختبار تدريبي
716	■ الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم: قاعدة السلسلة

كتيب الطالب

المراجع

R-1	المفاهيم الأساسية
G-1	القاموس
TF-1	الدوال والمتطابقات المثلثية والصيغ والرموز

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل المتقدم



الحالي

تشمل الوحدة 0 دروساً عن موضوعات من المقررات الدراسية السابقة. يمكنك استخدام هذه الوحدة بطرق عدة.

- ابدأ العام الدراسي بالخضوع للاختبار القبلي. وإذا احتجت إلى القيام بمراجعة إضافية، فأكمل الدروس المتضمنة في هذه الوحدة. للتأكد من أنك قد راجعت الموضوعات بنجاح، أكمل الاختبار البعدي.
- أثناء تقدمك في مطالعة هذا المحتوى، قد تجد موضوعات أنت بحاجة إلى مراجعتها. وعند حدوث ذلك، أكمل الدروس الفردية التي تحتاج إليها.
- اتخذ من هذه الوحدة مرجعاً. وإن كانت لديك أسئلة عن أي من هذه الموضوعات، فارجع إلى هذه الوحدة لمراجعة التعريفات أو المفاهيم الأساسية.

استخدام الوحدة 0

تعد المفاهيم الواردة في الوحدة 0 مراجعة من المقررات الدراسية السابقة. قد ترغب في استخدام جميع أجزاء الوحدة أو بعض منها في بداية العام الدراسي لتنشيط مهارات الطلاب. أو قد ترغب في البدء بالوحدة 1 واستخدام دروس الوحدة 0 بحسب الحاجة لتعزيز المهارات اللازمة أثناء سيرك في البرنامج الدراسي.

البدء في هذه الوحدة

سوف تراجع عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك للوحدة 0. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظم مصادر.

المحتويات

P2	الاختبار القبلي
P3	0-1 المجموعات
P3	0-2 العمليات باستخدام الأعداد المركبة
P9	0-3 الدوال والمعادلات التربيعية
P14	0-4 الجذور النونية والأسس الحقيقية
P18	0-5 أنظمة المعادلات الخطية والمتباينات الخطية
P23	0-6 عمليات المصفوفات
P28	0-7 استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات
P32	0-8 الإحصاء
P38	الاختبار البعدي

مراجعة المفردات

completing the square	ص12	إكمال المربع
nth root	ص14	الجذر النوني
principal root	ص14	الجذر الأساسي
system of equations	ص18	نظام المعادلات
substitution method	ص18	طريقة التعويض
elimination method	ص19	طريقة الحذف
matrix	ص23	مصفوفة
element	ص23	عنصر
dimension	ص23	بُعد
experiment	ص28	تجربة
factorial	ص28	مضروب
permutation	ص29	تباديل
combination	ص30	توافيق
measure of central tendency	ص32	مقاييس النزعة المركزية
measures of spread	ص32	مقاييس التشتت
frequency distribution	ص34	التوزيع التكراري
set	ص3	مجموعة
element	ص3	عنصر
subset	ص3	مجموعة جزئية
universal set	ص3	مجموعة كلية
complement	ص3	متمة
union	ص4	اتحاد
intersection	ص4	تقاطع
empty set	ص4	مجموعة خالية
imaginary unit	ص6	وحدة تخيلية
complex number	ص6	عدد مركب
standard form	ص6	صيغة قياسية
imaginary number	ص6	عدد تخيلي
complex conjugates	ص7	مرافقات مركبة
parabola	ص9	قطع مكافئ
axis of symmetry	ص9	محور تناظر
vertex	ص9	رأس

P1

الاختبار القبلي

استخدام الاختبار القبلي

يقيم الاختبار القبلي للوحدة 0 فهم الطلاب للمفاهيم الواردة في الوحدة 0. ويمكنك استخدام الاختبار القبلي لتحديد ما إذا كان الطلاب بحاجة إلى إكمال جميع دروس الوحدة 0 قبل البدء في محتوى الوحدة 1 أم لا.

إجابات إضافية

13. **كثيية صفري:** $(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$; **المجال:** \mathbb{R}

المدى: $y \geq -2\frac{1}{4}$

14. **كثيية عظمى:** $(-\frac{3}{4}, 3\frac{1}{8})$; **المجال:** \mathbb{R}

المدى: $y \leq 3\frac{1}{8}$

29. (4, -8): **متسق ومستقل**

30. حلول كثيرة لانهاية: **متسقة وتابعة**

31. (2, 7, -1): **متسق ومستقل**

32. لا يوجد حل: **غير متسق**

33. 

34. 

35. 

36. 

ليس لها أي حلول

استخدم ترميز المجموعة لكتابة عناصر كل مجموعة. ثم حدد ما إذا كانت العبارة المذكورة حول المجموعة صواب أم خطأ.

1. L هي مجموعة أعداد صحيحة مضروبة في 2 وأصغر من 22.

2. S هي مجموعة من الأعداد الصحيحة الأقل من 5 ولكنها أكبر من -6.

افترض أن $L = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; L صواب
أوجد كلاهما يلي.

3. $D \cap E$ 4. $C \cap E$

5. $C \cap F$ 6. $D \cup E$

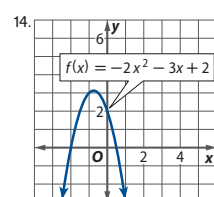
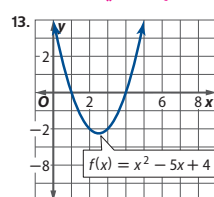
حوّل لأبسط صورة.

7. $(6 + 5i) + (-3 + 2i)$ 8. $(-3 + 4i) - (4 - 5i)$

9. $(1 + 8i)(6 + 2i)$ 10. $(-3 + 3i)(-2 + 2i)$

11. $\frac{3+i}{5-2i}$ 12. $\frac{-3+i}{4-3i}$

حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صفري. ثم أوجد القيمة العظمى أو الصفري، واذكر مجال الدالة ومداها.



أوجد حل كل من المعادلات التالية.

15. $x^2 - x - 20 = 0$ 16. $x^2 - 3x + 5 = 0$

17. $x^2 + 2x - 1 = 0$ 18. $x^2 + 11x + 24 = 0$

19. **السيارات:** ترتبط كل من القيمة الحالية V والقيمة الأصلية v لإحدى السيارات من خلال $V = v(1 - r)^n$. حيث r هي معدل الاستهلاك كل سنة و n هو عدد السنوات. فإذا كانت القيمة الأصلية للسيارة هي 10,000 AED، فأوجد القيمة الحالية للسيارة بعد 30 شهراً عند معدل الاستهلاك سنوي يصل إلى 10%.

7684.33 AED

بسّط كل تعبير.

20. $\sqrt[6]{x^{12}y^{15}}$ 21. $\sqrt[3]{8a^9b^7}$

22. $\sqrt{25r^5t^4u^2}$ 23. $\sqrt[3]{32x^{11}y^{20}z^5}$

P2 | الوحدة 0 | الاختبار القبلي

حول إلى أبسط صورة.

24. $\frac{x^2}{x^4}$ 25. $\sqrt[4]{81x^8y^{14}}$

26. $\sqrt[3]{x^{15}y^{23}}$ 27. $\sqrt[12]{49}$

28. **الوظائف:** يقوم حسام بجزّ الحشائش مقابل 8 AED لكل مرج ويزيل الأعشاب الضارة مقابل 10 AED لكل حديقة. في حالة الحصول على 8 مهام وكسب 72 AED، فكم كان عدد مهام جزّ الحشائش؟ وكم عدد مهام إزالة الأعشاب الضارة؟

4 حصاد، 4 جز العشب

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. اذكر ما إذا كان النظام متوافقاً ومستقلاً، أم متوافقاً وتابعا، أم غير متوافق. 29-32. **انظر الحاشية.**

29. $3x + y = 4$ 30. $2x - y = 2$

31. $2x + 4y - z = -1$ 32. $-3x + 9y - 3z = -12$

33. $2x - 3y + 2z = 6$ 34. $-3x + y - z = -1$

35. $-x - 5y + z = -2$ 36. $2x - 6y + 2z = 9$

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات التالية. إذا لم يكن هناك حل للنظام، فاذكر ليس لها أي حلول. 33-36. **انظر الحاشية.**

33. $y \geq x + 5$ 34. $y + x < 3$

35. $4x - 3y < 7$ 36. $3y \leq 2x - 8$

37. $y \leq 2x + 2$ 38. $y > -2x - 4$

39. $2y - x < -6$ 40. $y \geq \frac{2}{3}x - 1$

إذا كان $D = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، و $F = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد كلاهما يلي.

37. $D - F$ 38. $D + 2F$ 39. $2D - E$

40. $D + E + F$ 41. $3D - 2E$ 42. $D - 3E + 3F$

أوجد قيمة كل تبديل أو توافق.

43. ${}_5C_5$ 126 44. ${}_5P_5$ 15.120 45. ${}_5P_5$ 120

46. ${}_5C_5$ 1 47. ${}_4P_2$ 12 48. ${}_4C_2$ 6

49. **البطاقات:** تم سحب ثلاث بطاقات سحباً عشوائياً من مجموعة أوراق لعب قياسية تضم 52 ورقة لعب. أوجد كلا من الاحتمالات التالية

a. (جميع الأوراق زوجية) $P = \frac{57}{1105}$ أو حوالي 5.2%

b. (ورقنا لعب فئة الشباني وورقة لعب فئة الكثة) $P = \frac{507}{11050}$ أو حوالي 4.6%

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مجموعة من البيانات. ثم أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لكل مجتمع إحصائي. **انظر الحاشية.**

50. {7, 7, 8, 10, 10, 10} 51. {0.5, 0.4, 0.2, 0.5, 0.2}

50. **المتوسط:** ≈ 8.7 ، **الوسيط:** 9، **المنوال:** 10، **المدى:** 3، **المتغير:** ≈ 1.9 ، **الانحراف المعياري:** ≈ 1.4

51. **المتوسط:** 0.36، **الوسيط:** 0.4، **المنوال:** 0.2 و 0.5، **المدى:** 0.3، **المتغير:** ≈ 0.02 ، **الانحراف المعياري:** ≈ 0.14

$$37. \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$40. \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -5 & -5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$38. \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ -6 & -9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$41. \begin{bmatrix} -12 & 2 \\ 4 & 5 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$$

$$39. \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$42. \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -3 & -11 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-1 استخدام ترميز المجموعة للتعبير عن العناصر والمجموعات الفرعية والمتممة. إيجاد نقاط تقاطع المجموعات ونقاط اتحاد المجموعات.

بعد الدرس 0-1 صف المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية. التعرف على الدوال وتقييمها وتحديد مجالاتها.

2 التدريس

1 ترميز المجموعة

المثال 1 يوضح كيفية استخدام ترميز المجموعة في كتابة عناصر المجموعة. **المثال 2** يوضح كيفية تحديد المجموعات الفرعية والمتممة.

مثال إضافي

1

استخدم ترميز المجموعة في كتابة عناصر كل مجموعة. ثم حدد ما إذا كانت العبارة المذكورة حول المجموعة صحيحة أم خطأ.

a. N مجموعة أعداد طبيعية أصغر من 3. $N = \{1, 2\}$ $\pi \in N$ خطأ

b. S مجموعة من الولايات التي على حدود كاليفورنيا. نيفادا $S \ni S = \{\text{أوريجون، نيفادا، أريزونا}\}$ صحيح

c. D مجموعة أيام الأسبوع التي تبدأ بالحدف T. $\text{Monday} \in D$ خطأ $D = \{\text{Tuesday, Thursday}\}$

d. C مجموعة الحروف الساكنة التي قبل h في الأبجدية الإنجليزية. $D \in C$ صحيح $C = \{b, c, d, f, g\}$

1 ترميز المجموعة تُعرف المجموعة على أنها مجموعة من الكائنات. يطلق على كل كائن في المجموعة اسم **عنصر**. تُستى المجموعة باستخدام حرف كبير، وتُكتب مع وجود عناصرها بين الأقواس $\{ \}$.

اسم المجموعة	وصف المجموعة	ترميز المجموعة
C	الصفحات الموجودة في أحد فصول الكتاب	$C = \{35, 36, 37, 38, 39, 40\}$
A	الطلاب الذين حصلوا على تقدير A في الاختبار	$A = \{\text{عائشة، كريم، أمل}\}$
L	الأحرف من A إلى H	$L = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$
N	الأعداد الفردية الموجبة	$N = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

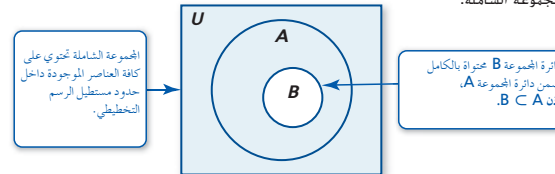
لكتابة أن عائشة هي أحد عناصر المجموعة A، اكتب $A \in \text{عائشة}$.

مثال 1 استخدام ترميز المجموعة

استخدم ترميز المجموعة لكتابة عناصر كل مجموعة. ثم حدد ما إذا كانت العبارة المذكورة حول المجموعة صواب أم خطأ.

- N هي مجموعة من الأعداد الصحيحة الأكبر من 12 والأصغر من 16 $15 \in N$. العناصر الموجودة في هذه المجموعة هي 13، 14، 15. لذا $N = \{13, 14, 15\}$. نظراً لأن أحد عناصر N فإن $15 \in N$ عبارة صحيحة.
- V مجموعة من أحرف العلة باللغة الإنجليزية. $g \in V$. العناصر الموجودة في هذه المجموعة هي الأحرف a، e، i، o، u. إذاً، $V = \{a, e, i, o, u\}$. نظراً لأن الحرف g ليس أحد عناصر V ، فإن العبارة الصحيحة هي $g \notin V$. إذاً، $g \in V$ عبارة خطأ.
- M مجموعة من الأشهر التي تبدأ بحرف ي. $\text{أبريل} \in M$. عناصر هذه المجموعة هي أشهر يناير ويونيو ويوليو. إذاً $M = \{\text{يناير، يونيو، يوليو}\}$. نظراً لأن شهر أبريل ليس أحد عناصر هذه المجموعة، فإن العبارة الصحيحة هي $\text{أبريل} \notin M$. إذاً، $\text{أبريل} \in M$ عبارة خطأ.
- X مجموعة أعداد موجودة على النرد. $4 \in X$. عناصر هذه المجموعة هي 1، 2، 3، 4، 5، 6. إذاً $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. نظراً لأن أحد عناصر X إذاً $4 \in X$ عبارة صحيحة.

في حالة أن كل عنصر من عناصر المجموعة B مضمّن أيضاً في المجموعة A، فسيطلق على B **مجموعة جزئية** من A، وتكتب $B \subset A$. **المجموعة الكلية** U هي مجموعة تضم جميع العناصر المحتملة للحل. وتعد جميع المجموعات الأخرى الموجودة في هذه الحالة مجموعات **جزئية** من المجموعة الشاملة.



افترض أن $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$. لأن $B \subset A$ ، $3 \in A$ ، $2 \in A$ ، $1 \in A$.

تعرف مجموعة العناصر الموجودة في U التي لا تعد من بين عناصر المجموعة B بأنها **متممة** للمجموعة B، وتكتب B' في مخطط فن، يكون متمم B هو كل المنطقة المظللة.

P3

مثال 2 حدد المجموعات الجزئية ومتممة المجموعات

افترض: $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 7\}$, $C = \{1, 5, 7, 8\}$, $D = \{2, 3\}$, $E = \{6, 3\}$

a. حدد ما إذا كان $A \subset B$ صواب أم خطأ.

$$B = \{5, 7\} \quad A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

صواب: $5 \in A$ و $7 \in A$ ، إذا فإن جميع عناصر B هي أيضا عناصر من A إذا. B مجموعة جزئية من A .

b. حدد ما إذا كان $E \subset D$ صواب أم خطأ.

$$D = \{2, 3\} \quad E = \{6, 3\}$$

خطأ: $6 \notin D$ ، إذا ليس جميع عناصر E موجودة في D ، إذا. E ليست مجموعة جزئية من D .

c. أوجد A' .

حدد عناصر U التي لا توجد في A .

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad A = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$\text{إذا: } A' = \{0, 2, 3, 6\}$$

d. أوجد D' .

حدد عناصر U غير الموجودة في D .

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad D = \{2, 3\}$$

$$\text{إذا: } D' = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

نصيحة دراسية

رموز الرياضيات
 \in أحد العناصر (ينتمي)
 \notin ليس أحد عناصر
 \subset مجموعة جزئية من (محتواه في)
 A' متمم للمجموعة A
 $A \cap B$ تقاطع من المجموعة A والمجموعة B
 $A \cup B$ اتحاد من المجموعة A والمجموعة B

مثال إضافي

2 لنفرض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 $B = \{0, 6\}$ وأن $A = \{1, 3\}$
 $C = \{4, 5, 6\}$ وأن $D = \{2, 4, 6\}$ وأن $E = \{0\}$

a. حدد إذا كانت العبارة $D \subset B$

صحيحة أم خطأ. **صحيحة**

b. حدد إذا كانت العبارة $E \subset C$

صحيحة أم خطأ. **خطأ**

c. أوجد D' . **$\{0, 1, 3, 5\}$**

d. أوجد B' . **$\{1, 3, 5\}$**

2 نقاط الاتحاد والتقاطع

مثال 3 يوضح كيفية إيجاد الاتحاد والتقاطع

بين المجموعتين.

مثال إضافي

3 لنفرض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$
 $R = \{3, 4, 8, 10\}$ وأن $S = \{0, 2, 4\}$
 $T = \{1, 3, 10\}$

a. أوجد $R \cup S$. **$\{0, 2, 3, 4, 8, 10\}$**

b. عيّن $T \cap S$. **\emptyset**

c. عيّن $S \cap R$. **$\{4\}$**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات كلف الصف بعدة مسائل

مثل المثال 3 وامنح الطلاب الوقت لحلها.

ثم اختر مجموعة من الطلاب لعرض حلولهم

وشرحها أمام الوحدة. تأكد من أن الطلاب

يرسمون مخطط فن وشرح كيف حددوا مكان

عناصر كل مجموعة.

انتبه!

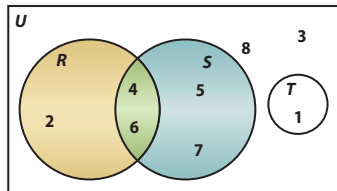
المجموعات المتصلة تكون
 المجموعتان A و B متصلتين في حالة
 عدم وجود عناصر مشتركة بينهما.
 بعد تقاطع مجموعتين منفصلتين
 هو المجموعة الخالية. بينما اتحاد
 المجموعتين المنفصلتين فيتضمن جميع
 العناصر الموجودة في كل مجموعة.

2 الاتحاد والتقاطع اتحاد المجموعتين A و B . ويكتب $A \cup B$. هو مجموعة جديدة تتكون من جميع العناصر الموجودة إما في A أو B أو $A \cap B$. ويكتب $A \cap B$. هو مجموعة جديدة تتكون من العناصر الموجودة في A و B . في حالة عدم وجود عناصر مشتركة، يطلق على تقاطعها **مجموعة خالية**. وتكتب \emptyset أو $\{ \}$.

مثال 3 أوجد اتحاد وتقاطع مجموعتين

افترض أن $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $R = \{2, 4, 6\}$, $S = \{4, 5, 6, 7\}$, $T = \{1\}$

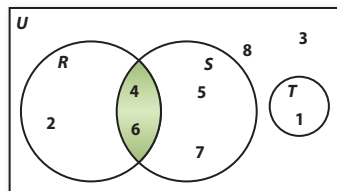
a. أوجد $R \cup S$.



اتحاد R و S هو مجموعة تضم جميع العناصر التي تنتمي إلى R , S ، أو للمجموعتين.

$$\text{إذا: } R \cup S = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

b. أوجد $R \cap S$.



تقاطع R و S هو مجموعة تضم جميع العناصر الموجودة في كل من R و S . إذا: $R \cap S = \{4, 6\}$.

c. أوجد $T \cap S$.

نظرا لعدم وجود عناصر تنتمي إلى كل من T و S ، فإن تقاطع T و S هو المجموعة الخالية. إذا: $T \cap S = \emptyset$.

استخدم ترميز المجموعة لكتابة عناصر كل مجموعة. ثم حدد ما إذا كانت العبارة المذكورة حول المجموعة صواب أم خطأ. (أمثال 1)

1. J هي مجموعة الأعداد الصحيحة من مضاعفات 3 وأقل من 15 $J \in 15$.
2. K هي مجموعة أحرف العلة في الأبجدية الإنجليزية. $h \in K$
انظر الحاشية.
3. L هي مجموعة أول ستة أعداد أولية. $9 \in L$
 $L = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ خطأ
4. V هي مجموعة مناطق المحيطة بإمارة جورجيا. $V \notin$ ألاباما
انظر الحاشية.
5. N هي مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن 12 $0 \in N$
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ خطأ
6. D هي مجموعة الأيام التي تبدأ بحرف $A \in D$ الأحد
 $D = \{\text{أحد، اثنين}\}$ صواب
7. A هي مجموعة أسماء الفتيات التي تبدأ بحرف $A \in A$ أمل
 $\{\text{جميع أسماء الفتيات تبدأ بحرف } A\}$ صواب
8. S هي مجموعة تضم 48 ولاية في الولايات المتحدة. $S \notin$ هاواي
 $\{\text{جميع الولايات باستثناء ألاسكا وهاواي}\}$ صواب

للتدريبات 9-24، استعن بالمعلومات التالية.
افتراض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $A = \{1, 2, 6, 9, 10, 12\}$, $B = \{2, 9, 10\}$, $C = \{0, 1, 6, 9, 11\}$
 $D = \{4, 5, 10\}$, $E = \{2, 3, 6\}$, $F = \{2, 9\}$.
حدد ما إذا كانت كل عبارة صواب أم خطأ. اشرح استدلالك. (أمثال 1 و2)

9. $3 \in D$
10. $8 \notin A$
11. $B \subset A$
12. $U \subset A$
13. $5 \notin D$
14. $2 \in E$
15. $0 \in F$
16. $6 \notin F$

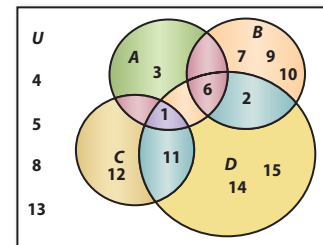
أوجد كل ما يلي. المثالان (2 و3)

17. $C' \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12\}$
18. $U' \cap \emptyset$
19. $A' \cap \{0, 3, 4, 5, 7, 8, 11\}$
20. $D \cap E \cap \emptyset$
21. $C \cap E \cap \{6\}$
22. $E \cup F \cap \{2, 3, 6, 9\}$
23. $A \cup B \cap \{1, 2, 6, 9, 10, 12\}$
24. $A \cap B \cap \{2, 9, 10\}$

استخدم مخطط فن لإيجاد كل مما يلي.

(المثالان 2 و3)

28. $\{2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$



25. $A \cup B \cap \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10\}$
26. $A \cap D \cap \{1, 6\}$
27. $C \cup D \cap \{1, 2, 6, 11, 12, 14, 15\}$
28. A'
29. $A \cap B \cap D \cap \{6\}$
30. $(A \cup B) \cup C \cap \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-39 لتقييم مدى فهم الطلاب لاستخدام ترميز المجموعة للتعبير عن العناصر والمجموعات الفرعية والمتممة وكيفية إيجاد نقاط التقاطع والاتحاد بين المجموعات.

افترض!

خطأ شائع في التمارين 34-39،
يعين الطلاب التقاطع والاتحاد بين
المجموعات في صورة نقاط مفردة.
ذكر الطلاب بأن أجزاء الخط مكونة
من نقاط كثيرة لانتهائية وأن الطريقة
الوحيدة لتعيينها كلها هي تعيين
الجزء بنقاطه النهائية.

عين المصطلح الرياضي اطلب من الطلاب توضيح الكيفية التي يعرفون بها أن المجموعة P والمجموعة Q متفصلتان، باعتبار أن المجموعة $P = \{\text{الأعداد الفردية}\}$ والمجموعة $Q = \{\text{الأعداد الزوجية}\}$. الإجابة النموذجية: المجموعات المتفصلة هي التي ليس بينها عناصر مشتركة. لا توجد أرقام فردية تكون زوجية في الوقت نفسه ومن ثم فإن نتيجة التقاطع بين هاتين المجموعتين هي المجموعة الخالية.

إجابات إضافية

2. $K = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, T, v, w, x, y, z\}$
صحيح
4. $V = \{\text{ألاباما، فلوريدا، كارولينا الشمالية، كارولينا الجنوبية، تينيسي}\}$
خطأ
9. خطأ: $D = \{4, 5, 10\}$ ؛ 3 ليس عنصراً في D .
10. خطأ: $A = \{1, 2, 6, 9, 10, 12\}$ ؛ 8 ليس عنصراً في A .
11. صحيح: جميع عناصر B أيضاً عناصر في A .
12. خطأ: ليس جميع عناصر B عناصر في A .
13. خطأ: 5 عنصر في D .
14. صحيح: 2 عنصر في E .
15. خطأ: 0 ليس عنصراً في F .
16. صحيح: 6 ليس عنصراً في F .

31. الرياضة ستة عشر طالباً في فصل التربية الرياضية للأستاذ صالح. كل منهم يشارك في نوع واحد أو أكثر من الألعاب الرياضية كما يوضح الجدول. المثالان (2 و3) انظر ملحق إجابات الوحدة 0.

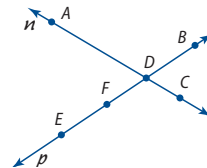
فصل التربية الرياضية للأستاذ صالح		
كرة السلة	كرة القدم	كرة اليد
عائشة	هند	دانا
دانا	عائشة	هند
مراد	خالد	عبد الله
هند	سمية	أحمد
خالد	أحمد	دانا
أحمد	دانا	خلود
طارق	طارقة	فصل
خلود	ناثلة	عمر
ناثلة	منى	منى

- افتراض أن B تمثل مجموعة لاعبي كرة السلة، S تمثل مجموعة لاعبي كرة القدم، و V تمثل لاعبي كرة اليد. ارسم مخطط فن لهذا الموقف.
- أوجد $S \cap V$. ما الذي تمثله هذه المجموعة؟
- أوجد S' . ما الذي تمثله هذه المجموعة؟
- أوجد $B \cup V$. ما الذي تمثله هذه المجموعة؟

32. أكاديميات يوجد 26 طالباً في مدرسة الشارقة يدرسون إما التفاضل والتكامل أو الفيزياء أو كليهما. ويتم تمثيل كل طالب بأحد أحرف الأبجدية كما تم التوضيح أدناه. ارسم مخطط فن لهذا الموقف. المثالان (2 و3)

التفاضل والتكامل	الفيزياء
A, D, F, I, J, K, L, M, P, R, T, V, X, Y, Z	B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, N, O, Q, S, U, W

- انظر ملحق إجابات الوحدة 0.
- المشروبات لتفترض أنه يمكنك اختيار عصير من بين هذه الأنواع الثلاثة المحتملة: التفاح أو البرتقال أو العنب. أو يمكنك اختيار مشروب صودا من النوعين المحتملين، الماركة A أو الماركة B . إذا كان بإمكانك اختيار العصير أو الصودا، وفقاً لمبدأ الإضافة أثناء العد، فسيكون لديك $3 + 2 = 5$ اختيارات محتملة. باستخدام الترميز الذي تعلمته في هذا الدرس، برر هذه الإجابة. ما الموقف الذي لا يمكن فيه تطبيق هذا المبدأ؟ انظر الحاشية.
- الهندسة استخدم هذا الشكل لاكتشاف أبسط اسم لكل مما يلي.



34. $\overrightarrow{DE} \cap \overrightarrow{BF}$ \overrightarrow{DF}
35. $\overrightarrow{AD} \cup \overrightarrow{DC}$ \overrightarrow{AC}
36. $\overrightarrow{DE} \cup \overrightarrow{DC}$ $\angle CDE$
37. المستقيم $h \cap$ المستقيم p $\{D\}$
38. $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{EF}$ \emptyset
39. $\overrightarrow{FB} \cup \overrightarrow{EB}$ \overrightarrow{EB}

P5

هذه القاعدة لا تُطبق إذا وجدت عناصر مشتركة بين المجموعتين.

33. لنفرض أن المجموعة $J = \{\text{عصير تفاح، عصير برتقال، عصير عنب}\}$. لنفرض أن المجموعة $S = \{\text{العلامة التجارية A، العلامة التجارية B}\}$. الكلمة أو في العبارة "عصير أو صودا" تشير إلى الاتحاد بين هذه المجموعات. ولأنه لا توجد عناصر مشتركة بين المجموعتين، فإن $S \cup J =$ هو $\{\text{عصير تفاح، عصير برتقال، عصير عنب، العلامة التجارية A صودا، العلامة التجارية B صودا}\}$. حيث يشتمل على جميع العناصر التي بكلتا المجموعتين. ولذا، فإن مجموع عدد العناصر في كل مجموعة يكون إجمالي عدد العناصر في اتحاد المجموعتين.

العمليات باستخدام الأعداد المركبة

الهدف

1 الأعداد التخيلية والأعداد المركبة يتم تعريف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الأساسي لـ -1 ويمكن كتابتها في صورة $i = \sqrt{-1}$. فيما يلي أول ثماني قيم أسية لـ i .

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^5 &= i^4 \times i = i \\ i^2 &= -1 & i^6 &= i^4 \times i^2 = -1 \\ i^3 &= i^2 \times i = -i & i^7 &= i^4 \times i^3 = -i \\ i^4 &= i^2 \times i^2 = 1 & i^8 &= i^4 \times i^4 = 1 \end{aligned}$$

لاحظ تكرار النمط، $1, -i, -1, i, \dots$ بعد أول أربع نتائج. ويوجه عام، يمكن العثور على قيمة i^n حيث n هو عدد كلي، عن طريق قسمة n على 4 وفحص الباقي.

المفهوم الأساسي قوى i

للعثور على قيمة i^n افترض أن R هو الباقي عند قسمة n على 4.

$n < 0$	$n > 0$
$R = -3 \rightarrow i^n = i$	$R = 1 \rightarrow i^n = i$
$R = -2 \rightarrow i^n = -1$	$R = 2 \rightarrow i^n = -1$
$R = -1 \rightarrow i^n = -i$	$R = 3 \rightarrow i^n = -i$
$R = 0 \rightarrow i^n = 1$	$R = 0 \rightarrow i^n = 1$

مثال 1 قوى i

حول لأبسط صورة.

<p>الطريقة 1</p> $i^{53} = (i^4)^{13} \times i = (1)^{13} \times i = i$	<p>الطريقة 2</p> $i^{53} = (i^4)^{13} \times i = (1)^{13} \times i = i$
<p>الطريقة 1</p> $i^{53} = i$ <p>إذا كان $R = 1$، فإن $i^n = i$</p>	<p>الطريقة 2</p> $i^{53} = i$ <p>إذا كان $R = 1$، فإن $i^n = i$</p>
<p>الطريقة 1</p> $i^{-18} = (i^4)^{-5} \times i^2 = (1)^{-5} \times (-1) = -1$	<p>الطريقة 2</p> $i^{-18} = (i^4)^{-5} \times i^2 = (1)^{-5} \times (-1) = -1$
<p>الطريقة 1</p> $i^{-18} = -1$ <p>إذا كان $R = -2$، فإن $i^n = -1$</p>	<p>الطريقة 2</p> $i^{-18} = -1$ <p>إذا كان $R = -2$، فإن $i^n = -1$</p>

تنتمي مجموعات الأعداد الحقيقية ومضاعفات الأعداد الحقيقية لـ i إلى نظام امتداد الأعداد، المعروف بالأعداد المركبة. بعد العدد المركب $a + bi$ ، حيث يكون العدد الحقيقي a هو جزء حقيقي والعدد الحقيقي b هو الجزء التخيلي.

حقيقي \mathbb{R}	تخيلي \mathbb{I}
	تخيلي بحت

إذا كان $a \neq 0$ و $b = 0$ ، فإن العدد المركب هو $a + 0i$ أو a .
 إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$ ، فإن جميع الأعداد الحقيقية هي أعداد مركبة أيضًا.
 إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، فسيعرف العدد المركب على أنه **عدد تخيلي**.
 إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$ ، مثل $4i$ أو $-9i$ ، فسيكون العدد المركب هو **عدد تخيلي بحت**.

1 إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة والأعداد المركبة.

2 استخدام المرافقات المركبة في كتابة خارج قسمة الأعداد المركبة بصيغة قياسية.

مفردات جديدة

وحدة تخيلية (imaginary unit)
 عدد مركب (complex number)
 صيغة قياسية (standard form)
 جزء حقيقي (real part)
 جزء تخيلي (imaginary part)
 عدد تخيلي (imaginary number)
 عدد تخيلي (pure imaginary number)
 بحت (number)
 مرافقات مركبة (complex conjugates)

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-2 إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة والأعداد الأولية.
 استخدام المرافقات المركبة في كتابة خارج قسمة الأعداد الأولية بصيغة قياسية.

بعد الدرس 0-2 إجراء العمليات على الأعداد الأولية بصيغة قطبية.

2 التدريس

1 الأعداد التخيلية والأعداد الأولية

مثال 1 يوضح كيفية حساب القوى الأسية الموجبة والسالبة من الأعداد i . **مثال 2** يوضح كيفية جمع الأعداد الأولية وطرحها.
مثال 3 يوضح كيفية ضرب الأعداد الأولية.

مثال إضافي

1 حول لأبسط صورة قوى i .

- a. i^{25}
 b. i^{-12}

يمكن جمع الأعداد المركبة وطرحها عن طريق تنفيذ العملية المختارة على الأجزاء الحقيقية والتخيلية كل على حدة.

مثال 2 جمع الأعداد المركبة وطرحها

حوّل لأبسط صورة.

a. $(5 - 3i) + (-2 + 4i)$

$$(5 - 3i) + (-2 + 4i) = [5 + (-2)] + (-3i + 4i) \\ = 3 + i$$

جمع الأجزاء الحقيقية والتخيلية معًا.
حول إلى أبسط صورة.

b. $(10 - 2i) - (14 - 6i)$

$$(10 - 2i) - (14 - 6i) = 10 - 2i - 14 + 6i \\ = -4 + 4i$$

خاصية التوزيع
حول إلى أبسط صورة.

كما أن الكثير من خصائص الأعداد الحقيقية، مثل خاصية التوزيع، تصلح أيضًا للأعداد المركبة. ولهذا السبب، يمكن ضرب الأعداد المركبة باستخدام أساليب مشابهة لتلك المستخدمة عند ضرب الأعداد ذات الحدين.

مثال 3 ضرب الأعداد المركبة

حوّل لأبسط صورة.

a. $(2 - 3i)(7 - 4i)$

$$(2 - 3i)(7 - 4i) = 14 - 8i - 21i + 12i^2 \\ = 14 - 8i - 21i + 12(-1) \\ = 2 - 29i$$

طريقة فويل

$$i^2 = -1$$

حوّل إلى أبسط صورة.

b. $(4 + 5i)(4 - 5i)$

$$(4 + 5i)(4 - 5i) = 16 - 20i + 20i - 25i^2 \\ = 16 - 25(-1) \\ = 41$$

طريقة فويل

$$i^2 = -1$$

حوّل إلى أبسط صورة.

استخدام المرافقات المركبة يطلق على العددين المركبين اللذين يظهران بصيغة $a + bi$ و $a - bi$ **المرافقات المركبة**. ويمكن استخدام المرافقات المركبة لتأكيد إنطاق التخييل. اضرب البسط والمقام في مرافق مركب للمقام.

مثال 4 إنطاق المقام للتعبير المركب

بسّط $(5 - 3i) \div (1 - 2i)$.

$$(5 - 3i) \div (1 - 2i) = \frac{5 - 3i}{1 - 2i}$$

أعد الكتابة بصيغة كسور عشري.

$$= \frac{5 - 3i}{1 - 2i} \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i}$$

اضرب البسط والمقام في مرافقات المقام، $1 + 2i$

$$= \frac{5 + 10i - 3i - 6i^2}{1 - 4i^2}$$

قم بالضرب.

$$= \frac{5 + 7i - 6(-1)}{1 - 4(-1)}$$

$$i^2 = -1$$

$$= \frac{11 + 7i}{5}$$

حوّل إلى أبسط صورة.

$$= \frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$$

أعد كتابة الإجابة على شكل $a + bi$

تلميح تقني

الأعداد المركبة بعض العمليات الحسابية تتضمن منوال عدد مركب. وفي هذا المنوال، يمكن تنفيذ العمليات الحسابية للأعداد المركبة.

انتبه!

المرافقات المركبة تأكد من تغيير إشارة الجزء التخيلي للعدد المركب للعتور على المرافق المركب.

أمثلة إضافية

2 حول لأبسط صورة التعابير.

a. $(4 - i) + (-3 + 5i)$ **$1 + 4i$**

b. $(8 - 5i) - (4 - 2i)$ **$4 - 3i$**

3 حول لأبسط صورة التعابير.

a. $(2 - 3i)(6 + 7i)$ **$33 - 4i$**

b. $(3 - 2i)^2$ **$5 - 12i$**

2 استخدام المرافقات المركبة

المثال 4 يوضح كيفية إيجاد خارج قسمة عددين مركبين عن طريق تخلص المقام من الجذور.

مثال إضافي

4 حول لأبسط صورة

$$(12 + 3i) \div (1 + 2i)$$

$$\frac{18}{5} - \frac{21}{5}i$$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

معدونة اطلب من الطلاب كتابة إدخال يوضح النمط المرفوع إلى قوى من الأعداد i . اطلب منهم تعريف الأعداد الأولية ووصف كيفية جمعها وطرحها وضربها وقسمتها.

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-60 لتقييم مدى فهم الطلاب لكيفية إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة والأعداد الأولية وكيفية استخدام المرافقات المركبة في كتابة خارج قسمة الأعداد الأولية بصيغة قياسية.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 2، قد يجمع الطلاب الأسس للحصول على i^{10} . ذكر الطلاب بأن جمع قوتين من i مشابه لما يحدث عند جمع قوتين من الأعداد الحقيقية. يجب تحويل كل القوى لأبسط صورة قبل الجمع. على سبيل المثال $i^3 = i(2+3) = i^2 \cdot i^3 = -1 - i$

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب ضع في حقيبة بطاقات ورقية مكتوبًا عليها أعدادًا صحيحة موجبة أو سالبة. قبل أن يغادر الطلاب الغرفة، اطلب منهم سحب قصاصة من الحقيبة ورفع العدد i إلى تلك القوة التي على القصاصة والتحويل لأبسط صورة.

إجابات إضافية

26. $\frac{31}{37} + \frac{1}{37}i$
27. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$
28. $\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$
29. $-\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$
30. $-\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$
31. $\frac{23}{26} - \frac{11}{26}i$
32. $\left(\frac{2}{5} - \frac{2\sqrt{3}}{15}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)i$
33. $\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$

حوّل لأبسط صورة. (مثال 1)

1. i^{-10} **-1**
2. $i^2 + i^8$ **0**
3. $i^3 + i^{20}$ **$1 - i$**
4. i^{100} **1**
5. i^{77} **i**
6. $i^4 + i^{-12}$ **2**
7. $i^5 + i^9$ **$2i$**
8. i^{18} **-1**

حوّل لأبسط صورة. (مثال 2)

9. $(3 + 2i) + (-4 + 6i)$ **$-1 + 8i$**
10. $(7 - 4i) + (2 - 3i)$ **$9 - 7i$**
11. $(0.5 + i) - (2 - i)$ **$-1.5 + 2i$**
12. $(-3 - i) - (4 - 5i)$ **$-7 + 4i$**
13. $(2 + 4.1i) - (-1 - 6.3i)$ **$3 + 10.4i$**
14. $(2 + 3i) + (-6 + i)$ **$-4 + 4i$**
15. $(-2 + 4i) + (5 - 4i)$ **3**
16. $(5 + 7i) - (-5 + i)$ **$10 + 6i$**

17. **الكهرباء** يستخدم المهندسون أعدادًا تخيلية للتعبير عن الكمية ذات البعدين للتيار التبادلي، وهذا يتضمن كلاً من السعة والزاوية. وفي هذه الأعداد التخيلية، يتم استبدال i بـ j لأن المهندسين يستخدمون i كمختصر للكمية الكلية للتيار. المقاومة هي مقياس حجم الموانع التي تعيق تدفق التيار في الدائرة ذات التيار التبادلي. تبلغ المقاومة في أحد أجزاء دائرة نوالي $5j$ ohms $2 +$ وفي جزء آخر من الدائرة $3j$ ohms $7 -$. اجمع هذه الأعداد المركبة للعنور على إجمالي المقاومة في الدائرة. (مثال 2) **$9 + 2j$ ohms**

حوّل لأبسط صورة. (مثال 3)

18. $(-2 - i)^2$ **$3 + 4i$**
19. $(1 + 4i)^2$ **$-15 + 8i$**
20. $(5 + 2i)^2$ **$21 + 20i$**
21. $(3 + i)^2$ **$8 + 6i$**
22. $(2 + i)(4 + 3i)$ **$5 + 10i$**
23. $(3 + 5i)(3 - 5i)$ **34**
24. $(5 + 3i)(2 + 6i)$ **$-8 + 36i$**
25. $(6 + 7i)(6 - 7i)$ **85**

26-33. انظر الحاشية.

حوّل لأبسط صورة. (المثال 4)

26. $\frac{5+i}{6+i}$
27. $\frac{i}{1+2i}$
28. $\frac{5-i}{5+i}$
29. $\frac{3-2i}{-4-i}$
30. $\frac{1+2i}{2-3i}$
31. $\frac{3+4i}{1+5i}$
32. $\frac{2-\sqrt{2}i}{3+\sqrt{6}i}$
33. $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{2}i}$

P8 | الدرس 0-2 | العمليات باستخدام الأعداد المركبة

الكهرباء ترتبط العولتية E ، والتيار I ، والمقاومة Z الموجودة في دائرة من خلال العلاقة $E = I \times Z$. أوجد العولتية (بالفولت) في كل من الدوائر التالية باستخدام التيار والمقاومة.

34. $I = 1 + 3j$ amps $Z = 7 - 5j$ ohms **22 + 16j فولت**
35. $I = 2 - 7j$ amps $Z = 4 - 3j$ ohms **13 - 34j فولت**
36. $I = 5 - 4j$ amps $Z = 3 + 2j$ ohms **23 - 2j فولت**
37. $I = 3 + 10j$ amps $Z = 6 - j$ ohms **28 + 57j فولت**

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

38. $5x^2 + 5 = 0$ **$\pm i$**
39. $4x^2 + 64 = 0$ **$\pm 4i$**
40. $2x^2 + 12 = 0$ **$\pm \sqrt{6}i$**
41. $6x^2 + 72 = 0$ **$\pm 2\sqrt{3}i$**
42. $8x^2 + 120 = 0$ **$\pm \sqrt{15}i$**
43. $3x^2 + 507 = 0$ **$\pm 13i$**

44. **الكهرباء** يعتمد نسبة الدخول Z للدائرة على المقاومة R ، والمفاعلة بسبب السعة الكهربائية X_C ، والمفاعلة بسبب السعة الكهربائية X_L . ويمكن كتابتها كعدد مركب $Z = R + (X_L - X_C)j$. فيما يلي القيم (بـ ohms) لـ R ، X_C ، و X_L في الجزأين الأول والثاني من دائرة نوالي محددة.

Series Circuit

R	X_C	X_L
10	2	1
3	1	1

- a. اكتب الأعداد المركبة التي تمثل نسبة موانع دخول الكهرباء إلى هذين الجزأين من الدائرة. **$10 - j$ ohms; $3 + 0j$ ohms**
- b. اجمع إجاباتك من الجزء a للعنور على إجمالي نسبة مقاومة دخول الكهرباء إلى الدائرة. **$13 - j$ ohms**
- c. يقبس الضوّل S للدائرة درجة سهولة سماح الدائرة للتيار بالتدفق وهي تبادلية مع المقاومة. أوجد نسبة الضوّل (بوحدة siemens) في دائرة لها مقاومة تصل إلى $3j$ ohms $6 +$.

$$\frac{2}{15} - \frac{1}{15}j \text{ siemens}$$

أوجد قيم x و y لجعل كل معادلة صحيحة.

45. $3x + 2iy = 6 + 10i$ **2, 5**
46. $5x + 3iy = 5 - 6i$ **1, -2**
47. $x - iy = 3 + 4i$ **3, -4**
48. $-5x + 3iy = 10 - 9i$ **-2, -3**
49. $2x + 3iy = 12 + 12i$ **6, 4**
50. $4x - iy = 8 + 7i$ **2, -7**

حوّل لأبسط صورة.

51. $(2 - i)(3 + 2i)(1 - 4i)$ **$12 - 31i$**
52. $(-1 - 3i)(2 + 2i)(1 - 2i)$ **$-12 - 16i$**
53. $(2 + i)(1 + 2i)(3 - 4i)$ **$20 + 15i$**
54. $(-5 - i)(6i + 1)(7 - i)$ **$-24 - 218i$**

الدوال والمعادلات التربيعية

الهدف

- 1 التمثيل البياني للدوال التربيعية.
- 2 حل المعادلات التربيعية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-3 تمثيل الدوال التربيعية. حل المعادلات التربيعية.

بعد الدرس 0-3 استخدم اختبار الحد الرئيسي والأصغار في تمثيل الدوال كثيرة الحدود.

2 التعليم

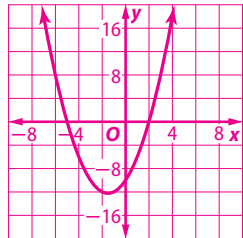
1 تمثيل الدوال التربيعية

المثال 1 يوضح كيفية تمثيل الدالة التربيعية باستخدام جدول القيم. **المثال 2** يوضح كيفية تمثيل الدالة التربيعية باستخدام محور التناظر والتقاطع مع المحور الرأسي y والرأس. **المثال 3** يوضح كيفية إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمجال والمدى للدالة التربيعية.

مثال إضافي

1 مثل $f(x) = x^2 + 3x - 10$ عن طريق عمل جدول قيم.

x	$f(x) = x^2 + 3x - 10$	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = 0^2 + 3(0) - 10$	-10	(0, -10)
1	$f(1) = 1^2 + 3(1) - 10$	-6	(1, -6)
2	$f(2) = 2^2 + 3(2) - 10$	0	(2, 0)
3	$f(3) = 3^2 + 3(3) - 10$	8	(3, 8)
4	$f(4) = 4^2 + 3(4) - 10$	18	(4, 18)



1 التمثيل البياني للدوال التربيعية يطلق على التمثيل البياني للدالة التربيعية **التقطع المكافئ**. لتمثيل دالة تربيعية بيانياً، مثل الأزواج المرتبة التي تحقق متطلبات الدالة بيانياً.

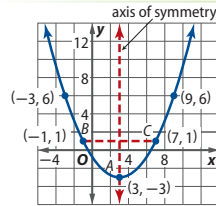
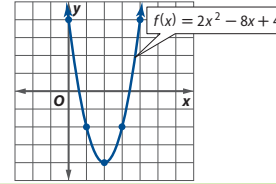
مثال 1 تمثيل دالة تربيعية بيانياً باستخدام جدول

مثل بيانياً $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$ عن طريق تكوين جدولاً يضم القيم.

الخطوة 1 اختر قيم أعداد صحيحة لـ x وقيم الدالة لكل قيمة.

x	$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	$f(0) = 2(0)^2 - 8(0) + 4$	4	(0, 4)
1	$f(1) = 2(1)^2 - 8(1) + 4$	-2	(1, -2)
2	$f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 4$	-4	(2, -4)
3	$f(3) = 2(3)^2 - 8(3) + 4$	-2	(3, -2)
4	$f(4) = 2(4)^2 - 8(4) + 4$	4	(4, 4)

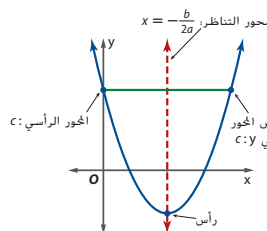
الخطوة 2 مثل بيانياً زوج الإحداثيات الناتج، ووصل التقاطع باستخدام منحني منظم.



بعد **مستقيم التناظر** خطاً يقسم القطع المكافئ إلى نصفين يعكسان بعضهما البعض. لاحظ أنه بسبب الطبيعة التناظرية للقطع المكافئ حول مستقيم التناظر، فإن نقطتي B و C على بُعد 4 وحدات من إحداثي x للرأس، ويبتلكان نفس إحداثي y .

يتقاطع مستقيم التناظر مع القطع المكافئ عند نقطة يطلق عليها **رأس**. رأس التمثيل البياني على اليسار هو $A(3, -3)$.

المفهوم الأساسي التمثيل البياني لدالة تربيعية



إذا كان التمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.

- التقاطع مع المحور الرأسي y يكون $a(0)^2 + b(0) + c$.
- معادلة محاور التناظر هي $x = -\frac{b}{2a}$.
- الإحداثي x للرأس هو $-\frac{b}{2a}$.

مثال إضافي

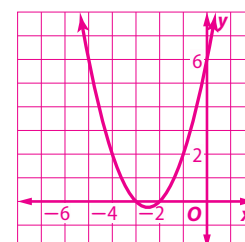
2 استخدم محور التناظر والتقاطع مع

المحور الرأسى y والرأس في تمثيل

$f(x) = x^2 + 5x + 6$. محور التناظر:

$x = -2.5$: التقاطع مع المحور

الرأسى y : الرأس: $(-0.25, -2.5)$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

التسجيل الصوتي اطلب من الطلاب

عمل تسجيلات صوتية تشرح كيفية إيجاد

محور التناظر والتقاطع مع المحور الرأسى

y ورأس الدالة المعطاة في الصيغة

$f(x) = ax^2 + bx + c$

مثال 2 محور التناظر، التقاطع مع المحور y والرأس

مثّل بيانياً محور التناظر والتقاطع مع المحور y والرأس لتمثيل $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

الخطوة 1 حدد a و b و c .

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

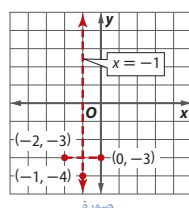
$$f(x) = 1x^2 + 2x - 3$$

الخطوة 2 استخدم a و b لإيجاد على معادلة محور التناظر.

معادلة محور التناظر

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{2}{2(1)} = -1$$



الخطوة 3 أوجد إحداثيات الرأس.

حيث إن معادلة محور التناظر هي $x = -1$. يكون إحداثي x للرأس هو -1 .

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

المعادلة

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3$$

قيم $f(x)$ for $x = -1$

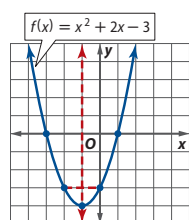
$$f(-1) = -4$$

حول لأبسط.

الرأس موجود عند $(-1, -4)$.

الخطوة 4 أوجد تقاطع y وانعكاسه.

حيث إن $c = -3$. تكون إحداثيات تقاطع y هو $(0, -3)$. محور التناظر هو $x = -1$. لذا فسيكون انعكاس تقاطع y هو $(-2, -3)$.



الخطوة 5 مثّل بيانياً محور التناظر والرأس وتقاطع y وانعكاسه. أوجد نقطة واحدة أو نقطتين إضافيتين وانعكاسهما مع تمثيلهما بيانياً. ثم وصل النقاط باستخدام منحني منظم.

نصيحة دراسية

رسم الدوال التربيعية

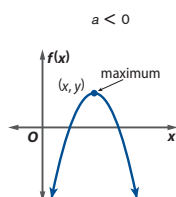
يمكنك دائماً استخدام جدول القيم لإنشاء المزيد من النقاط للتمثيل البياني لدالة تربيعية.

بعد إحداثي y لرأس دالة تربيعية هو قيمة عظمى أو صغرى للدالة. تمثل هذه القيم أعلى أو أقل قيمة ممكنة يمكن أن تصل إليها الدالة.

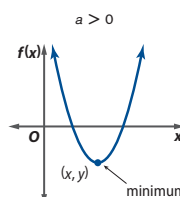
المفهوم الأساسي القيم العظمى والقيم الصغرى

التمثيل البياني لـ $f(x) = ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$

- ترتفع ولها قيمة صغرى عندما تكون $a > 0$
- تنخفض ولها قيمة عظمى عندما تكون $a < 0$



بعد إحداثي y للرأس هو قيمة عظمى.



بعد إحداثي y للرأس هو قيمة صغرى.

مثال إضافي

3 لنفرض أن $f(x) = 5x^2 - x + 1$

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى . **صغرى**

b. أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة. **(10, 0.95.0)**

c. حدد المجال والمدى للدالة. **$D = \mathbb{R}$, $R = y \geq 0.95$ حيث $y \in \mathbb{R}$**

2 حل الدوال التربيعية

مثال 4 يوضح كيفية حل المعادلة التربيعية بطريقة التحليل إلى العوامل. **مثال 5** يوضح كيفية حل المعادلة التربيعية بطريقة إكمال المربع. **مثال 6** يوضح كيفية حل المعادلة التربيعية باستخدام الصيغة التربيعية.

مثال إضافي

4 قم بحل $3x^2 + x - 2 = 0$ بطريقة التحليل إلى العوامل. **$-1, \frac{2}{3}$**

يعد مجال الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية. وسيكون المدى إما جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو المساوية للقيمة العظمى أو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو المساوية للقيمة الصغرى.

مثال 3 القيمة العظمى والقيمة الصغرى

إذا كان $f(x) = -3x^2 + 12x + 11$

a. حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم صغرى. بالنسبة لهذه الدالة، $a = -3$. نظرًا لأن a قيمة سالبة، يتم فتح التمثيل البياني لأسفل ويكون للدالة قيمة عظمى.

b. أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة. القيمة العظمى للدالة هو إحداثي y للرأس. للعثور على إحداثيات الرأس، يجب أولاً العثور على معادلة محور التناظر.

معادلة محور التناظر
 $x = -\frac{b}{2a}$
 $= -\frac{12}{2(-3)}$
 $= 2$
 حوّل إلى أبسط صورة: $a = -3$ و $b = 12$

نظرًا لأن معادلة محور التناظر هي $x = 2$ ، يكون إحداثي x للرأس هو 2. يمكنك الآن إيجاد إحداثي y للرأس أو قيمة عظمى للدالة، عن طريق تقييم الدالة الأصلية لـ $x = 2$.

الدالة الأصلية
 $f(x) = -3x^2 + 12x + 11$
 $f(2) = -3(2)^2 + 12(2) + 11$
 $= -12 + 24 + 11$
 $= 23$
 حوّل إلى أبسط صورة: اضرب،

لذا، تمتلك $f(x)$ قيمة عظمى التي تبلغ 23 عند $x = 2$.

c. حدد المجال والمدى للدالة. يكون مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية أو \mathbb{R} . أما مدى الدالة فهو جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو المساوية لقيمة عظمى 23 أو $y \leq 23$.

نصيحة دراسية

راجع إجاباتك بيانيًا
 يمكنك التحقق من إجاباتك في المثال 3 عن طريق التمثيل البياني $f(x) = -3x^2 + 12x + 11$

من التمثيل البياني، يمكنك رؤية أن القيمة العظمى للدالة هي $y = 23$ والمجال هو \mathbb{R} ، والمدى هو $y \leq 23$.

2 حل المعادلات التربيعية نعد **المعادلة التربيعية** معادلة كثيرة الحدود من الدرجة 2. ونعد الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية هي $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$. ويمكن استخدام عوامل المعادلة التربيعية كثيرة الحدود لحل المعادلات التربيعية ذات الصلة. يعد حل المعادلات التربيعية عن طريق العوامل أحد تطبيقات خاصية ناتج الضرب الصغرى.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصغرى

لأي أعداد حقيقية a و b ، إذا كان $ab = 0$ ، إما $a = 0$ ، أو $b = 0$ ، أو كل من a و b يساويان صفر.

مثال 4 حل باستخدام تحليل العوامل

قم بحل $x^2 - 8x + 12 = 0$ عن طريق تحليل العوامل.

المعادلة الأصلية
 $x^2 - 8x + 12 = 0$
عامل.
 $(x - 2)(x - 6) = 0$
خاصية ناتج الضرب الصغرى
 $x - 2 = 0$ $x - 6 = 0$
حوّل إلى أبسط صورة.
 $x = 2$ $x = 6$

حلا المعادلة هما 2 و 6.

من الطرق الأخرى المستخدمة لحل المعادلات التربيعية طريقة إكمال المربع.

المفهوم الأساسي إكمال المربع

لاستكمال المعادلة التربيعية لأي صيغة تعبير تربيعية $x^2 + bx$ ، اتبع الخطوات الموجودة أدناه.

الخطوة 1 أوجد أحد نصفي b ، معامل x .

الخطوة 2 تربيع النتيجة الموجودة في الخطوة 1.

الخطوة 3 اجمع شئجة الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

مثال 5 الحل عن طريق إكمال المربع

حل $x^2 - 4x + 1 = 0$ باستخدام طريقة إكمال المربع.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = -1$$

$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 3$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = 2 \pm\sqrt{3}$$

$$x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\approx 3.73$$

$$\approx 0.27$$

المعادلة الأصلية

أعد الكتابة بحيث يكون الطرف الأيسر من الصيغة $x^2 + bx$.

لأن $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$ ، اجمع 4 لكل طرف.

اكتب الطرف الأيسر كـ مربع تام.

خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

اجمع 2 إلى كل طرف.

اكتب كمعادلتين.

استخدم حاسبة.

حلا المعادلة هما 0.27 و 3.73 تقريبًا.

يمكن استخدام طريقة إكمال المربع لوضع صيغة عامة يمكن استخدامها لحل أي معادلة تربيعية على صيغة $ax^2 + bx + c = 0$ ، والمعروفة أيضًا بـ **الصيغة التربيعية**.

المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية (القانون العام)

يتم تقديم حلي المعادلة التربيعية للصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، من خلال الصيغة التالية.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال 6 الحل باستخدام الصيغة التربيعية

قم بحل $x^2 - 4x + 15 = 0$ باستخدام الصيغة التربيعية.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(15)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 60}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-44}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2i\sqrt{11}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{11}i$$

الصيغة التربيعية

استبدل a بـ 1، b بـ -4، و c بـ 15

اضرب

حوّل إلى أبسط صورة

$$\sqrt{-44} = \sqrt{4} \sqrt{-11} = 2i\sqrt{11}$$

حوّل إلى أبسط صورة

الحلول هي $2 + \sqrt{11}i$ و $2 - \sqrt{11}i$

نصيحة دراسية

التمييز يطلق على التعبير $b^2 - 4ac$ التمييز ويستخدم لتحديد العدد وأنواع الجذور التربيعية للمعادلة التربيعية. على سبيل المثال، عندما يكون التمييز 0 ، يوجد جذران تربيعيان منطقيان.

أمثلة إضافية

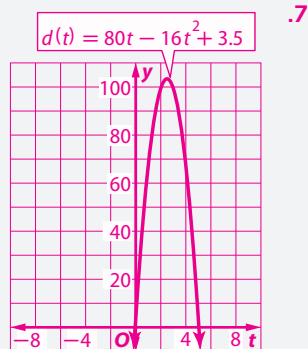
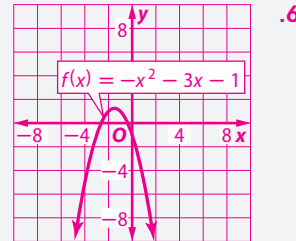
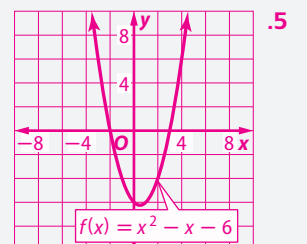
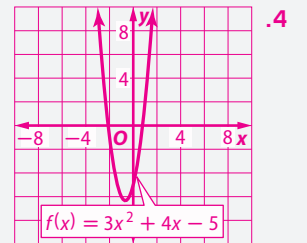
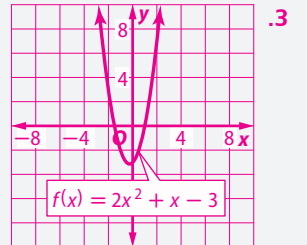
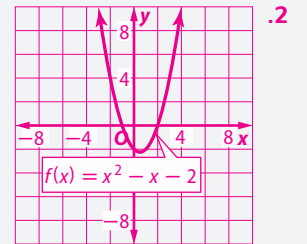
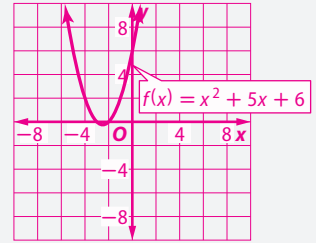
5 قم بحل $x^2 + 6x - 3 = 0$ بطريقة إكمال المربع.

المربع. $x \approx -6.46$ أو $x \approx 0.46$

6 قم بحل $2x^2 + 3x + 5 = 0$ باستخدام الصيغة التربيعية.

$$\frac{-3 \pm i\sqrt{31}}{4}$$

إجابات إضافية



P12 | الدرس 3-0 | الدوال التربيعية والمعادلات التربيعية

P12 | الدرس 3-0 | الدوال التربيعية والمعادلات التربيعية

3 تقييم

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-54 في تقييم مدى فهم الطلاب لكيفية تمثيل الدوال التربيعية وحل المعادلات التربيعية.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 29-34، قد يضيف الطلاب الثابت الخطأ عند إكمال المربع. يواجه الطلاب صعوبات في إكمال المربع حيث إنهم لا يفهمون ما يوصل إلى إكمال المربع وحل المعادلة التربيعية. اطلب من الطلاب توسعة مجموعة من المربعات ذات الحدين لملاحظة النمط ثم عكس العملية لإكمال المربع.

تعليق الأمس اطلب من الطلاب كتابة فقرة تشرح كيف ساعد ما تعلموه بالأمس عن الأعداد التخيلية في استخدام الصيغة التربيعية.

إجابات إضافية

19. قيمة صغرى: $D = \mathbb{R}$; $(-1, 5)$;

$R = y \geq 5$ حيث $y \in \mathbb{R}$

20. قيمة صغرى: $D = \mathbb{R}$; $(-\frac{1}{4}, -1\frac{3}{8})$;

$R = y \geq -1\frac{3}{8}$, for $y \in \mathbb{R}$

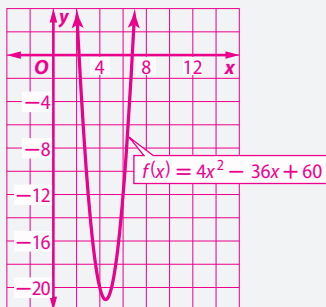
21. قيمة عظمى: $D = \mathbb{R}$; $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$;

$R = y \leq -\frac{2}{3}$ حيث $y \in \mathbb{R}$

22. قيمة عظمى: $D = \mathbb{R}$; $(1, -1)$;

$R = y \leq -1$ حيث $y \in \mathbb{R}$

41b



حل كل معادلة عن طريق إكمال المربع. (مثال 5)

29. $x^2 + 8x - 20 = 0$ **-10, 2** 30. $2a^2 + 11a - 21 = 0$ **-7, $\frac{3}{2}$**

31. $z^2 - 2z - 24 = 0$ **-4, 6** 32. $p^2 - 3p - 88 = 0$ **-8, 11**

33. $t^2 - 3t - 7 = 0$ **$\frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$** 34. $3g^2 - 12g = -4$ **$\frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$**

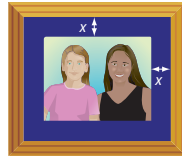
حل كل معادلة باستخدام الصيغة التربيعية. (مثال 6)

35. $m^2 + 12m + 36 = 0$ **-6** 36. $t^2 - 6t + 13 = 0$ **$\frac{3 \pm 2i}{2}$**

37. $6m^2 + 7m - 3 = 0$ **$-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$** 38. $c^2 - 5c + 9 = 0$ **$\frac{5 \pm i\sqrt{11}}{2}$**

39. $4x^2 - 2x + 9 = 0$ **$\frac{1 \pm i\sqrt{35}}{4}$** 40. $3p^2 + 4p = 8$ **$\frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$**

41. **التصوير** ترغب سبيلة في وضع إطار لصورة مقطوعة مساحتها 20 بوصة مربعة مع عرض متجانس لمخطط التمثيل بين الصورة وحافة الإطار كما تم التوضيح.



a. اكتب معادلة لوضع نموذج للموقف إذا كان الطول والعرض لمخطط التمثيل يجب أن يكون 8 بوصات في 10 بوصات. على التوالي.

لبلاءمة الإطار. **$(8 - 2x)(10 - 2x) = 20$**

b. مثل الدالة ذات الصلة بيانياً. **انظر الحاشية.**

c. ما هو عرض الجزء المعرض لمخطط التمثيل؟ **حوالي 2.21 in.**

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

42. $x^2 + 5x - 6 = 0$ **-6, 1** 43. $a^2 - 13a + 40 = 0$ **5, 8**

44. $x^2 - 11x + 24 = 0$ **3, 8** 45. $q^2 - 12q + 36 = 0$ **6**

46. $-x^2 + 4x - 6 = 0$ **$2 \pm \sqrt{2}i$** 47. $7x^2 + 3 = 0$ **$\pm \frac{\sqrt{21}}{7}i$**

48. $x^2 - 4x + 7 = 0$ **$2 \pm \sqrt{3}i$** 49. $2x^2 + 6x - 3 = 0$ **$\frac{-3 \pm \sqrt{15}}{2}$**

50. **الحيوانات الأليفة** يبلغ طول قلم مستطيل على شكل سلحفاة 6 أقدام وعرضه 4 أقدام. يتم تكبير القلم عن طريق زيادة الطول والعرض بنسب متساوية لبضاعة المساحة. ما هي أبعاد القلم الجديد؟ **8 ft في 6 ft**

نظرية الأعداد استخدم معادلة تربيعية لإيجاد عددين حقيقيين يلبيان كل معادلة. أو وضح عدم وجود مثل هذه الأعداد. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

51. مجموعها هو -17 وناتجها هو 72. **-8, -9**

52. مجموعها هو 7 وناتجها هو 14. **1, 7**

53. مجموعها هو -9 وناتجها هو 24. **-4, -6**

54. مجموعها هو 12 وناتجها هو -28. **-2, 14**

مثل كل معادلة بيانياً عن طريق تكوين جدول للقيم. (مثال 1) **1-6. انظر الحاشية.**

1. $f(x) = x^2 + 5x + 6$ 2. $f(x) = x^2 - x - 2$

3. $f(x) = 2x^2 + x - 3$ 4. $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

5. $f(x) = x^2 - x - 6$ 6. $f(x) = -x^2 - 3x - 1$

7. **البيسول** قام لاعب بضرر الكرة بسرعة مبدئية تصل إلى 80 قدماً في الثانية. فإذا كان الارتفاع المبدئي للكرة هو 3.5 أقدام فوق الأرض. فإن الدالة $d(t) = 3.5 - 16t^2 + 80t$ تمثل ارتفاع الكرة فوق الأرض بالقدم كدالة للزمن بالثانية. مثل الدالة باستخدام جدول قيم. (مثال 1) **انظر الحاشية.**

استخدم محور التناظر، وتقاطع y ، والرأس لتمثيل كل دالة بيانياً. (مثال 2)

8. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ 9. $f(x) = x^2 - 9x + 8$

10. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 11. $f(x) = x^2 - 6x - 16$

12. $f(x) = 2x^2 - 8x - 5$ 13. $f(x) = 3x^2 + 12x - 4$

13-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

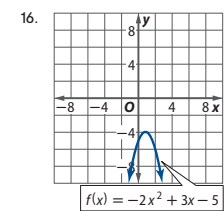
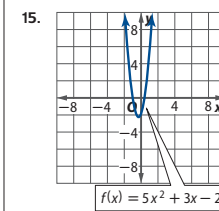
14. **الصحة** يمكن وضع نموذج للضغط الانقباضي الطبيعي P بالملليمتر الزئبقي (mm Hg) للسيدات من خلال $P(x) = 0.01x^2 + 0.05x + 107$. حيث x هو العمر بالسنوات. (مثال 2)

a. أوجد محور التناظر وتقاطع y والرأس للتمثيل البياني لـ $P(x)$.

$x = -2.5$; 107 ; $(-2.5, 160.9375)$

b. مثل $P(x)$ باستخدام القيم الموجودة في الجزء a. **انظر الحاشية.**

حدد ما إذا كان الدالة قيمة عظمى أو صغرى. ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى. واذكر مجال الدالة ومداها. (مثال 3) **15-22. انظر الحاشية.**



17. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

18. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

19. $f(x) = 2x^2 + 4x + 7$

20. $f(x) = 6x^2 + 3x - 1$

21. $f(x) = -3x^2 - 2x - 1$

22. $f(x) = -5x^2 + 10x - 6$

حل كل معادلة عن طريق تحليل العوامل. (مثال 4)

23. $x^2 - 10x + 21 = 0$ **3, 7**

24. $p^2 - 6p + 5 = 0$ **1, 5**

25. $x^2 - 3x - 28 = 0$ **-4, 7**

26. $4w^2 + 19w - 5 = 0$ **$\frac{1}{4}, -5$**

27. $4r^2 - r = 5$ **$\frac{5}{4}, -1$**

28. $g^2 + 6g - 16 = 0$ **-8, 2**

16. قيمة صغرى: $D = \mathbb{R}$; $(-2.45, -0.3)$;

$R = y \geq -2.45$ حيث $y \in \mathbb{R}$

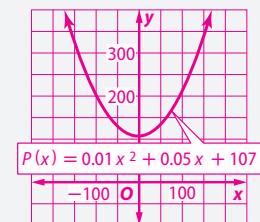
17. قيمة عظمى: $D = \mathbb{R}$; $(\frac{3}{4}, -2, \frac{3}{2})$;

$R = y \leq -2\frac{3}{4}$ حيث $y \in \mathbb{R}$

18. قيمة صغرى: $D = \mathbb{R}$; $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 2)$;

$R = y \leq -\frac{1}{4}$ حيث $y \in \mathbb{R}$

14b



15. قيمة عظمى: $D = \mathbb{R}$; $(\frac{7}{8}, -3, \frac{3}{4})$;

$R = y \leq -3\frac{7}{8}$ حيث $y \in \mathbb{R}$

الدرس 0-4 الجذور النونية والأسس الحقيقية

الهدف

- 1 تحويل التعابير ذات الصيغة الجذرية إلى أبسط صورة.
- 2 تحويل التعابير التي بصيغة أسية لأبسط صورة.

مفردات جديدة

الجذر النوني
الجذر النوني الأساسي
(nth root)
(principal nth root)

1 تبسيط الجذور بعد الجذر التربيعي لعدد أحد عاملين متساويين لهذا العدد. على سبيل المثال، العدد 4 هو جذر تربيعي للعدد 16 لأن $4 \times 4 = 16$ أو $4^2 = 16$. بوجه عام، إذا كان a و b عددين حقيقيين و n عددًا صحيحًا موجبًا أكبر من 1، إذا يكون $b^n = a$ ، إذن b يكون **الجذر النوني** لـ a .

المفهوم الأساسي الجذر النوني لعدد

- افترض أن a و b عددان حقيقيان. وافترض أن n أي عدد صحيح موجب أكبر من 1.
- فإذا كان $a = b^n$ ، إذا b هو الجذر النوني لـ a .
 - إذا كان a له جذر نوني، فسيكون **الجذر النوني الأساسي** لـ a يحمل نفس إشارة a .
- يتم استنتاج الجذر النوني الأساسي لـ a من التعبير الجذري $\sqrt[n]{a}$ ، حيث n هي مؤشر الجذر و a تعبر عن المجذور.

فيما يلي بعض أمثلة الجذر النوني.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{81} &= 3 & \text{تشير إلى الجذر التربيعي الرابع الأساسي للعدد 81} \\ -\sqrt[4]{81} &= -3 & \text{تشير إلى عكس الجذر التربيعي الرابع للعدد 81} \\ \pm \sqrt[4]{81} &= \pm 3 & \text{تشير إلى كل من الجذرين التربيعيين الرابع للعدد 81} \end{aligned}$$

وسواء كان للتعبير الجذري جذور تربيعية موجبة و/أو سالبة، فإن هذا يعتمد على قيمة الجذر وما إذا كان المؤشر موجبًا أم سالبًا.

الجذور النونية الحقيقية للأعداد الحقيقية		
افترض أن n تعبر عن عدد صحيح أكبر من 1 و a تعبر عن عدد حقيقي.		
a	n عدد زوجي.	n عدد فردي.
$a > 0$	جذر حقيقي واحد موجب وجذر حقيقي واحد سالب: $\pm \sqrt[n]{a}$	جذر حقيقي واحد موجب ولا يوجد جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	لا جذور حقيقية	بلا جذر حقيقي موجب وجذر حقيقي سالب واحد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	جذر حقيقي واحد: $n\sqrt[0]{0} = 0$	جذر حقيقي واحد: $n\sqrt[0]{0} = 0$

مثال 1 أوجد الجذر النوني

أوجد قيمة كل مما يلي.

a. $-\sqrt{49}$
 $-\sqrt{49} = -(\sqrt{49}) = -7$ **حوّل لأبسط صورة**

b. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$
 $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$ **حوّل لأبسط صورة**

c. $\sqrt[4]{-121}$
 بسبب عدم وجود عدد حقيقي يمكن ترفيته ليكون الأس الرابع للحصول على -121، $\sqrt[4]{-121}$ ليس عددًا حقيقيًا.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-4 تحويل التعابير التي بصيغة جذرية لأبسط صورة. تحويل التعابير التي بصيغة أسية لأبسط صورة.

بعد الدرس 0-4 قم بتمثيل وتحليل الدوال الأسية والدوال الجذرية.

2 التدريس

1 حول لأبسط صورة الجذور

المثالان 1 و2 يوضحان كيفية استخدام خواص الأسس في تحويل التعابير الجذرية لأبسط صورة.

مثال إضافي

1 قِيم كل تعبير مما يلي.

a. $-\sqrt{81}$ **-9**

b. $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ **$\frac{2}{5}$**

c. $\sqrt[6]{-243}$ **ليس عددًا حقيقيًا**

مثال إضافي

2 حول لأبسط صورة التعابير.

- $\sqrt[8]{b^{24}} |b^3|$
- $\sqrt[6]{64(y+2)^{30}} 2|(y+2)^5|$
- $\sqrt{48x^5} 4x^2\sqrt{3x}$
- $\sqrt[3]{-27a^6b^3c^5} -3a^2bc\sqrt[3]{c^2}$

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للجذور

افترض أن a و b أعدادا حقيقية أو متغيرات أو تعابير جبرية و n أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1. حيث تكون كل الجذور أعدادا حقيقية وكل المعامات أكبر من الصفر. إذا، فإن الخصائص التالية صحيحة.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{خاصية ناتج الضرب}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{خاصية ناتج القسمة}$$

إذا كان مؤشر الجذر عددا زوجيا، والأس عددا فرديا، فيجب استخدام القيمة المطلقة للناتج عدم وجود إجابة سالبة.

مثال 2 التبسيط باستخدام القيمة المطلقة

حول لأبسط صورة.

$$a. \sqrt[6]{n^{18}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{n^{18}} &= \sqrt[6]{(n^3)^6} \\ &= |n^3| \end{aligned}$$

لاحظ أن n^3 هو الجذر السادس لـ n^{18} . نظرا لأن المؤشر عدد زوجي والأس هو عدد فردي، يجب استخدام القيمة المطلقة لـ n^3 .

$$b. \sqrt[3]{81(a+1)^{12}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{81(a+1)^{12}} &= \sqrt[3]{[3(a+1)^3]^4} \\ &= 3|(a+1)^3| \end{aligned}$$

$$c. \sqrt{63y^3} \quad \text{نظرا لأن المؤشر هو عدد زوجي والأس هو عدد فردي، فيجب استخدام القيمة المطلقة لـ } (a+1)^3.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{63y^3} &= \sqrt{9y^2 \times 7y} \\ &= \sqrt{(3y)^2 \times 7y} \\ &= 3y\sqrt{7y} \end{aligned}$$

لاحظ أن $\sqrt{63y^3}$ يكون عددا حقيقيا فقط عندما يكون y عددا غير سالب. لذا، فليس من الضروري استخدام القيمة المطلقة.

$$d. \sqrt[5]{-p^{10}q^7}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{-p^{10}q^7} &= \sqrt[5]{-1p^{10}q^5 \times q^2} \\ &= \sqrt[5]{(-1p^2q)^5 \times q^2} \\ &= -p^2q\sqrt[5]{q^2} \end{aligned}$$

نظرا لأن المؤشر عدد فردي، فليس من الضروري استخدام القيمة المطلقة.

نصيحة دراسية

المؤشر الفردي إذا كان n عددا فرديا، فسيكون هناك جذر حقيقي واحد فقط. لذا، فلن تكون هناك حاجة نهائيا لأي رموز قيم مطلقة.

2 الأسس النسبية

المثال 3 يوضح كيفية تحويل التعابير ذات الأسس النسبية لأبسط صورة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

اللوحة التفاعلية اكتب على السبورة تعبيرًا يتضمن قوة أسية نسبية. قم بعرض قالب مثل $b^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{b^a}$ ، واسحب بسط الأس ومقامه لإعادة كتابة التعبير في صورة جذرية.

مثال إضافي

3 حول لأبسط صورة التعابير.

- a. $\frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[6]{5}}$ $5^{\frac{1}{3}}$ or $\sqrt[3]{5}$
- b. $\sqrt[6]{x^{31}y^{20}}$ $|x^5||y^3|\sqrt[6]{xy^2}$

انتبه!

خطأ شائع يجب الانتباه لعدم الخلط بين الأسس النسبية والأسس السالبة.

$$b^{-n} \neq b^{\frac{1}{n}}$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

المفهوم الأساسي الأسس النسبية

إذا كان b عدد حقيقي أو متغير أو تعبير جبري و m و n أعداد حقيقية موجبة أكبر من 1، فإن

- $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ، في حالة وجود الجذر النوني الأساسي لـ b
- $(\sqrt[n]{b})^m = b^{\frac{m}{n}}$ أو $\sqrt[n]{b^m}$ ، إذا كان $\frac{m}{n}$ بصيغة مختصرة.

مثال 3 تبسيط التعابير باستخدام الأسس النسبية

حوّل لأبسط صورة.

a. $\frac{\sqrt[10]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

$$\frac{\sqrt[10]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{32^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{(2^5)^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= 2^{\frac{5}{10} - \frac{1}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}} \text{ or } \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$$32 = 2^5$$

الأس لأس

نتائج قسمة الأس

حوّل لأبسط صورة.

b. $\sqrt[4]{x^{21}y^{15}}$

$$\sqrt[4]{x^{21}y^{15}} = \sqrt[4]{x^{20} \times y^{12} \times y^3}$$

$$= x^{\frac{20}{4}} \times y^{\frac{12}{4}} \times y^{\frac{3}{4}}$$

$$= x^5 \times y^3 \times \sqrt[4]{y^3}$$

نتائج الجذور

$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

نتائج ضرب الأس

حوّل لأبسط صورة.

c. $\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}}$

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}$$

$$= 16^{\frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{16} \text{ or } 4$$

نتائج قسمة الأس

حوّل لأبسط صورة.

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

P16 | الدرس 4-0 | الجذور النونية والأسس الحقيقية

2 الأسس النسبية تعد عمليات تربيع العدد وأخذ الجذر التربيعي من العمليات العكسية. ويمكن استخدام هذه العلاقة للتعبير عن الجذور بطريقة أسية.

افترض أن $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$.

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$$

معطيات

$$(\sqrt{b})^2 = (b^{\frac{1}{2}})^2$$

قم بتربيع كل طرف.

$$b = b^{2 \times \frac{1}{2}}$$

حوّل لأبسط صورة.

$$1 = 2n$$

إذا كان $a^m = a^n$ إذا $m = n$.

$$\frac{1}{2} = n$$

اقسم كل طرف على 2.

إذا $\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$ ، يمكن استخدام هذه العملية لتحديد الصيغة الأسية لأي جذر نوني. يمكنك تحديد القيمة الأسية لأي جذر نوني باستخدام الخصائص الموضحة أدناه.

أوجد قيمة كل مما يلي. (المثال 1)

1. $-13 - \sqrt{169}$
2. $\sqrt{-100}$ ليس عدداً حقيقياً
3. $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$ $\frac{6}{5}$
4. $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$ $-\frac{4}{7}$
5. $\sqrt[4]{-81}$
6. $\sqrt[4]{625}$ 5
7. $\sqrt[3]{243}$ 3 ليس عدداً حقيقياً
8. $\sqrt[3]{-1024}$ -4

حوّل لأبسط صورة. (المثال 2)

9. $\sqrt[3]{-27x^9}$ $-3x^3$
10. $\sqrt[4]{16a^{20}}$ $2|a^5|$
11. $\sqrt[8]{8y^{16}}$ $\sqrt[8]{8y^2}$
12. $\sqrt[3]{54x^{17}}$ $3x^5\sqrt[3]{2x^2}$
13. $\sqrt{20x^{16}}$ $2x^8\sqrt{5}$
14. $\sqrt{121(z-2)^{14}}$ $11|z-2|^7$
15. $\sqrt[4]{a^{12}b^9}$ $|a^3|b^2\sqrt[4]{b}$
16. $\sqrt[7]{-q^{13}r^{16}}$ $-qr^2\sqrt[7]{q^6r^2}$

حوّل لأبسط صورة. (المثال 3)

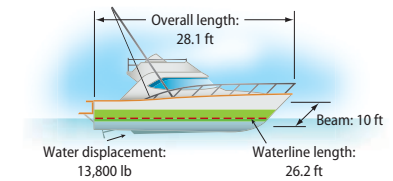
17. $\frac{b^{\frac{5}{4}} \times b^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}$ $b^{\frac{7}{4}} = b\sqrt[4]{b^3}$
18. $\left(2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)\left(3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{3}}\right)$
19. $\sqrt[6]{640a^3}$ $2\sqrt[6]{10a^3}$
20. $\sqrt[6]{128b^4}$ $2\sqrt[6]{2b^4}$
21. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{4}}$ $\sqrt[15]{2^{14}}$
22. $\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}$ $\frac{\sqrt[12]{3^5}}{3}$

23. الإبحار. فيما يلي نسبة راحة الحركة M لإحدى المراكب

$$M = \frac{D}{0.65(B)^{\frac{4}{3}}(0.71W + 0.3A)}$$

حيث يعبر D عن إزاحة المياه للمركب بالرجل، ويعبر B عن شعاع المركب أو العرض بالقدم، ويعبر W عن طول المركب بالقدم عند خط المياه، ويعبر A عن الطول الكلي للمركب. وكلما زادت النسبة، زاد مستوى الراحة التي يشعر بها الموجودون على المركب أثناء مواجهة المركب للأمواج. (المثال 3)

a. أوجد نسبة راحة الحركة على المركب الموضحة أدناه. ≈ 36.8



b. أوجد شعاع المركب لأقرب قدم مع نسبة راحة 27 والتي تعمل على إزاحة 15,000 رطل من المياه، ولها طول خط مياه يصل إلى 30.4 قدماً. وإجمالي طول يصل إلى 32.3 قدماً. $\approx 12.0 \text{ ft}$

3 التقييم

التقييم التكويني

استخدم التمارين 1-35 في تقييم مدى فهم الطلاب لكيفية تحويل التعبيرات التي بصيغة جذرية والتعبيرات التي بصيغة أسية لأبسط صورة.

انتبه!

الإجابة المبسطة

الطلاب صعوبات في تحديد الإجابة الأكثر بساطة. على سبيل المثال،

في التمرين 19، ربما يكتب بعض الطلاب الإجابة المبسطة كالتالي

$$2\left(\sqrt[6]{10}\right)(\sqrt{a}) \text{ أو } 2\left(10^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$$

، بدلاً من $2\sqrt[6]{10a^3}$ وضع أن الإجابة

الثلاث كلها صحيحة. الصيغة التي إليها

يتم تحويل التعبير المشتتم على أسس

نسبية إلى أبسط صورة تعتمد على

كيفية استخدام التعبير المحول لأبسط

صورة. على سبيل المثال، تعبير مثل

$$\sqrt[6]{640a^3}$$

يُسهّل إدخاله في حاسبة

التمثيل البياني عندما يكون محوّل

لأبسط صورة إلى تعبير مشتتم على

جميع الأسس النسبية.

عين المصطلح الرياضي اطلب من الطلاب

استخدام قيمة b لتوضيح الفرق بين b^{-2} و $b^{\frac{1}{2}}$.

الإجابة النموذجية: إذا كانت $b = 16$ ، فإن

$$16^{-2} = \frac{1}{16^2} = \frac{1}{256}$$

$$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16} = 4.$$

إجابات إضافية

29b. 2؛ الإجابة النموذجية: العدد التام

الثامن عبارة عن 12 نقطة نصفية فوق

العدد التام الأول. تقييم

$$r = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n \text{ } n = 12,$$

$r = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$ or $2^{\frac{12}{12}}$ ،
2 or 2^1 التي يمكن تبسيطها إلى

$$30. -5r^3t^2u^3\sqrt[3]{2r^2u^2}$$

$$31. 4a^3b^2c^3\sqrt[3]{2bc}$$

$$32. 2a^2|bc^5|\sqrt[4]{6b^2}$$

$$33. 2x|yz^3|\sqrt[6]{x}$$

$$34. |c|a^4\sqrt[4]{a^2b^3d}$$

$$35. wxy^2z^2\sqrt[5]{wx^3z^3}$$

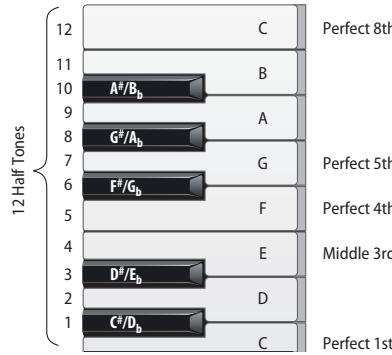
P17

24. السيارات. تتعرض قيمة السيارات للاستهلاك أو الانخفاض على مدار فترة صلاحيتها للعمل. وترتبط القيمة الجديدة V والقيمة الأصلية v للسيارة من خلال الصيغة $V = v(1-r)^n$. حيث يعبر r عن معدل الاستهلاك السنوي ويعبر n عن عدد السنوات. فلنفترض أن القيمة الحالية لسيارة مستخدمة هي 12,000 AED. فما ستكون قيمة السيارة بعد مرور 18 شهراً عند معدل استهلاك سنوي يصل إلى 20%؟ (المثال 3) **8,586.50 AED**

أوجد قيمة كل مما يلي.

25. $216^{\frac{1}{3}}$ 6
26. $4096^{\frac{1}{4}}$ 8
27. $49^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{7}$
28. $27^{-\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{3}$

29. الموسيقى. يتكون تقدم النوتة وفق مقياس الاثنتي عشرة نقطة من سلسلة من أنصاف النوت. ولتتمكن الأداة الموسيقية من "التناغم"، فإن لكل نوتة نسبة مثالية مع تردد النوتة المتوسطة C يطلق عليها الأول المثالي.



ويمكن حساب نسبة التردد المثالي r، التي يتم التعبير عنها بعدد عشري باستخدام العلاقة $r = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n$ حيث n هو عدد أنصاف النوتة حيث تكون النوتة فوق الأول المثالي، بما في ذلك النوتة نفسها. (المثال 1)

a. قرب نسبة التردد المثالي للنوتة الثالثة المتوسطة مع الأول المثالي. **حوالي 1.26**

b. بدون استخدام الآلة الحاسبة، قرب نسبة التردد المثالي للثامن المثالي والأول المثالي، ببر إجابتك. **انظر الحاشية.**

حوّل لأبسط صورة. 30-35. انظر الحاشية.

30. $\sqrt[3]{-250r^{11}t^6u^5}$
31. $\sqrt[4]{128a^9b^7c^4}$
32. $\sqrt[4]{96a^8b^6c^{20}}$
33. $\sqrt[6]{64x^7y^6z^{18}}$
34. $\sqrt[4]{a^2b^3c^4d^5}$
35. $\sqrt[3]{w^6x^8y^{10}z^{13}}$

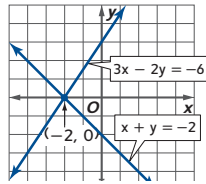
P17

أنظمة المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

الهدف

أنظمة المعادلات بعد نظام المعادلات مجموعة تتكون من معادلتين أو أكثر. ولتتمكن من حل نظام معادلات، فإن هذا يعني وجوب العثور على قيم للمتغيرات الموجودة في المعادلات والتي تجعل جميع المعادلات صحيحة. وبعد التمثيل البياني للمعادلات على نفس مخطط الإحداثيات من بين طرق حل نظام المعادلات، وتُمثل نقطة تقاطع التمثيل البياني للمعادلات حل النظام.

مثال 1 إيجاد الحل باستخدام التمثيل البياني
أوجد حل أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.



$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -6 \\ x + y &= -2 \end{aligned}$$

حل كل معادلة لـ y . ثم مثل كل معادلة بيانياً.
 $y = \frac{3}{2}x + 3$ $y = -x - 2$

يقع التقاطع عند النقطة $(-2, 0)$. وبعد هذا الزوج المرتب هو حل النظام.

$3x - 2y = -6$	المعادلات الأصلية	$x + y = -2$	تحقق
$3(-2) - 2(0) \stackrel{?}{=} -6$	$x = -2$ و $y = 0$	$-2 + 0 \stackrel{?}{=} -2$	
$-6 = -6$ ✓	حُلّ أبسط صورة	$-2 = -2$ ✓	

نستخدم أساليب علم الجبر للعثور على الحلول الدقيقة لأنظمة المعادلات، ويطلق على إحدى هذه الطرق الجبرية **طريقة التعويض**.

المفهوم الأساسي طريقة التعويض

- الخطوة 1** قم بحل إحدى المعادلات لأحد المتغيرات نسبة إلى الآخر.
- الخطوة 2** استبدل الصيغة الموجودة في الخطوة الأولى داخل المعادلة الأخرى للحصول على معادلة لها متغير واحد. ثم قم بحل المعادلة.
- الخطوة 3** استبدل لحل المتغير الآخر.

مثال 2 إيجاد الحل باستخدام التعويض

استخدم التعويض في حل نظام المعادلات التالي.

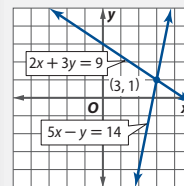
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 5x - y &= 14 \end{aligned}$$

الخطوة 1 $5x - y = 14$ $y = 5x - 14$ أوجد الحل لـ y

الخطوة 2 $2x + 3y = 9$ المعادلة الأولى
 $2x + 3(5x - 14) = 9$ استبدل $x - 14$ لـ y
 $2x + 15x - 42 = 9$ حلل إلى أبسط صورة
 $17x - 42 = 9$ أوجد الحل لـ x
 $x = 3$

الخطوة 3 $y = 5x - 14$ معادلة الخطوة 1
 $= 5(3) - 14$ الحل هو $(3, 1)$

تحقق من التمثيل البياني الموجود في الشكل 0.5.1. يمكنك رؤية تقاطع المستقيمتين عند النقطة $(3, 1)$.



الشكل 0.5.1

1 التركيز

التخطيط الرئيسي

الدرس 0-5 استخدام أساليب متنوعة في حل أنظمة المعادلات.
حل أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

بعد الدرس 0-5 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.

2 التدريس

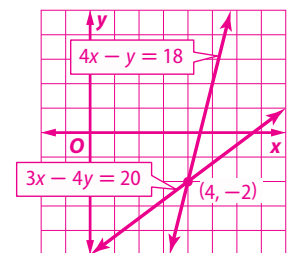
1 تحليل المعادلات

المثال 1 يوضح كيفية حل نظام المعادلات التي بمتغيرين باستخدام التمثيل البياني. **المثال 2** يوضح كيفية حل نظام المعادلات باستخدام التعويض. **المثال 3** يوضح كيفية حل نظام المعادلات باستخدام الحذف. **المثال 4** يوضح كيفية حل أنظمة المعادلات التي بثلاثة متغيرات.

مثال إضافي

1 حل أنظمة المعادلات باستخدام التمثيل البياني.

$$\begin{aligned} 4x - y &= 18 \\ 3x - 4y &= 20 \end{aligned} \quad (4, -2)$$



يمكنك استخدام **طريقة الحذف** لحل النظام عندما يمتلك أحد المتغيرات نفس المعامل في المعادلتين.

المفهوم الأساسي طريقة الحذف

- الخطوة 1** اضرب معادلة أو معادلتين في عدد للحصول على معادلتان لهما حدان متضادان.
- الخطوة 2** أضف المعادلتين ثم احذف متغيراً واحداً. ثم حل المعادلة.
- الخطوة 3** استبدل لحل المتغير الآخر.

مثال 3 إيجاد الحل باستخدام طريقة الحذف

استخدم الحذف في حل نظام المعادلات التالي.

$$\begin{array}{rcl} 1.5x + 2y = 20 & & \\ 2.5x - 5y = -25 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1.5x + 2y = 20 & \xrightarrow{\text{اضرب في 5}} & 7.5x + 10y = 100 \\ 2.5x - 5y = -25 & \xrightarrow{\text{اضرب في 2}} & 5x - 10y = -50 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 12.5x & = & 50 \\ x & = & 4 \end{array}$$

اجمع.
اقسم كل طرف على 12.5

المعادلة 1
المعادلة 2
أوجد الحل لـ y

$$\begin{array}{rcl} 1.5x + 2y = 20 & & \\ 1.5(4) + 2y = 20 & & \\ y = 7 & & \end{array}$$

إذاً الحل هو (4, 7).

يمكنك استخدام أي طريقة أو مجموعة من الطرق لحل أنظمة المعادلات في متغيرين لحل أنظمة المعادلات لثلاثة متغيرات.

مثال 4 أنظمة المعادلات لثلاثة متغيرات

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z = 15 & & \\ 2x + 3y - z = 7 & & \\ 4x + 10y - 5z = -3 & & \end{array}$$

الخطوة 1 حذف متغير واحد باستخدام زوجين من المعادلات.

$$\begin{array}{rcl} 5x - 10y + 5z = 75 & & \\ (+) [4x + 10y - 5z = -3] & & \\ \hline 9x & = & 72 \\ x & = & 8 \end{array}$$

المعادلة 1
المعادلة 2
اجمع.
قسم.

الخطوة 2 أوجد حل نظام مكوناً من معادلتين.

معادلة بمتغيرين
أوجد الحل لـ y

$$\begin{array}{rcl} 3x + y = 22 & & \\ 3(8) + y = 22 & & \\ y = -2 & & \end{array}$$

الخطوة 3 استبدل القيمتين بواحدة في المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة z .

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z = 15 & & \\ 8 - 2(-2) + z = 15 & & \\ z = 3 & & \end{array}$$

المعادلة 1
 $x = 8$ و $y = -2$
أوجد الحل لـ z .

الحل هو (8, -2, 3).

انتبه!

الحذف تذكر عند إضافة معادلة إلى أخرى أن تضيف كل شرط، بما في ذلك الثابت الموجود على الطرف الآخر من إشارة يساوي.

نصيحة دراسية

طرق أخرى كان بإمكانك أيضاً استخدام طريقة التعويض عن طريق أولاً حل z ثم استبدال التعبير الناتج في المعادلات الأخرى.

أمثلة إضافية

2 استخدم التعويض في حل نظام المعادلات.

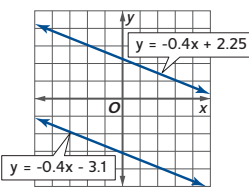
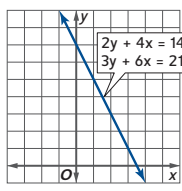
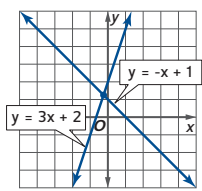
$$\begin{array}{rcl} 3x - y = 8 & & \\ 2x + y = 22 & (6, 10) & \end{array}$$

3 استخدم الحذف في حل نظام المعادلات.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 2y = 340 & & \\ 3x - 4y = 360 & (80, -30) & \\ \text{أوجد حلاً لنظام المعادلات.} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z = 5 & & \\ -x + y - 2z = -5 & & \\ 3x - 2y + z = -3 & (-1, 2, 4) & \end{array}$$

ليس من الضروري أن يتقاطع التمثيل البياني للمعادلتين عند نقطة واحدة. فعلى سبيل المثال، قد يحتوي نظام المعادلات الخطية على مستقيمات متوازية أو نفس الخط. وفي هذه الحالات، فقد لا يكون هناك حل لنظام المعادلات أو قد يكون هناك عدد كبير لانتهائي من الحلول. يتضمن النظام **المتوافق** حلاً واحداً على الأقل. في حالة وجود حل واحد فقط، يكون النظام **مستقلاً**. أما في حالة وجود حلول كثيرة لانتهائية، يكون النظام **تابعاً**. في حالة عدم وجود حل، يكون النظام **غير متوافق**.

غير متوافق	متوافق ومستقل	متوافق وتابع
		
$y = -0.4x + 2.25$ $y = -0.4x - 3.1$	$2y + 4x = 14 \rightarrow y = -2x + 7$ $3y + 6x = 21 \rightarrow y = -2x + 7$	$y = 3x + 2$ $y = -x + 1$
نفس الميل، تقاطع y مختلف	نفس الميل، نفس تقاطع y	ميلان مختلفان
المستقيمات متوازية.	التمثيلات البيانية على نفس الخط.	تقاطع المستقيمات.
لا يوجد حل	عدد لانتهائي من الحلول	حل واحد

مثال 5 بلا حل والحلول الكثيرة اللانهائية

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. اذكر ما إذا كان النظام **متوافقاً** و **مستقلاً**، أم **متوافقاً** و **تابعاً**، أم **غير متوافق**.

a. $-7x + 3y = 21$
 $7x - 3y = 17$

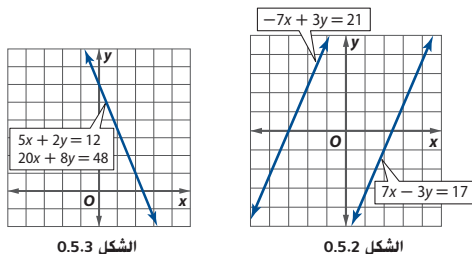
$$\begin{array}{r} -7x + 3y = 21 \\ (+) [7x - 3y = 17] \\ \hline 0 = 38 \end{array}$$

نظراً لأن $0 = 38$ يعتبر غير صحيح، فإن هذا النظام ليس له حل. لذا، فإن النظام غير متوافق. ومعادلات هذا النظام لها مستقيمات متوازية، كما يوضح الشكل 0.5.2.

b. $5x + 2y = 12$
 $20x + 8y = 48$

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 48 \\ (-) [20x + 8y = 48] \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

نظراً لأن $0 = 0$ دائماً صحيح، فهذا يعني وجود عدد لانتهائي من الحلول. لذا، فإن النظام متوافق ومستقل. ومعادلات هذا النظام لها نفس التمثيل البياني، كما يوضح الشكل 0.5.3.



نصيحة دراسية

الأنظمة المتوافقة تذكر أن الأنظمة المستقلة والتابعة تعد دائماً أنظمة متوافقة.

المثال 5 يوضح كيفية معرفة ما إذا كان لنظام المعادلات حل واحد أو حلول كثيرة لانتهائية أو ليس له حلول.

مثال إضافي

5 أوجد حلاً لكل نظام معادلات. اذكر ما إذا كان النظام متسقاً ومستقلاً، أم متسقاً وتابعاً أم غير متسق.

a. $2x - y = 7$
 $6x - 3y = 21$

حلول كثيرة لانتهائية، متسقة وتابعة

b. $2x - y = 3$
 $6x - 3y = 12$

لا يوجد حل، غير متسق

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب اكتب نظام معادلات على السبورة. اطلب من الطلاب التحديد البياني لعدد الحلول المتاحة لهذا النظام. اطلب منهم الإجابة بـ A للإجابة لا يوجد حلول، أو B للإجابة حل واحد، أو C للإجابة حلول كثيرة لانتهائية.

2 أنظمة المتباينات

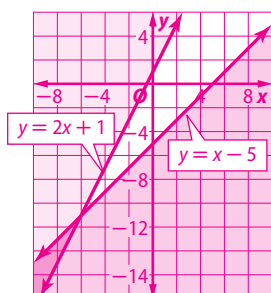
المثالان 6 و 7 يوضح كيفية حل نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

أمثلة إضافية

6 أوجد حلاً لنظام المتباينات.

$$y \geq 2x + 1$$

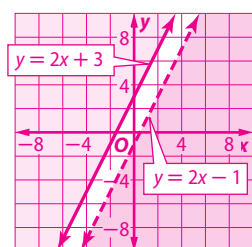
$$y \leq x - 5$$



7 أوجد حلاً لنظام المتباينات.

$$y \geq 2x + 3$$

$$y < 2x - 1$$



ليس لها أي حلول

2 أنظمة المتباينات المقصود بحل نظام المتباينات هو إيجاد جميع الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينات الموجودة في النظام.

المفهوم الأساسي حل أنظمة المتباينات

الخطوة 1

مثل كل متباينة ثم ظلل المنطقة الصحيحة. مثل خطاً سميكاً لتمثيل المتباينات التي تحتوي على \leq أو \geq بياناً. استخدم خطاً متقطعاً لتمثيل المتباينات التي تحتوي على $<$ أو $>$ بياناً.

الخطوة 2

حدد المنطقة المظلمة لكل المتباينات. هذه هي طريقة الحل للنظام.

الخطوة 3

راجع الحل باستخدام نقطة اختبار داخل منطقة الحل.

مثال 6 المناطق المتقاطعة

أوجد حلاً لنظام المتباينات.

$$y \geq 0.5x - 3$$

$$y \leq -2x + 7$$

الخطوة 1

مثل كل متباينة.

استخدم خطاً سميكاً لتمثيل كل متباينة بياناً. حيث إن كل متباينة تتضمن إما \leq أو \geq ثم ظلل المنطقة الموجودة أعلى أو أسفل الخط الذي يحتوي على الإحداثيات التي تجعل كل متباينة صحيحة.

الخطوة 2

حدد المنطقة المظلمة لجميع المتباينات.

حل $y \geq 0.5x - 3$ هو المنطقتان 1 و 3.

حل $y \leq -2x + 7$ هو المنطقة 2 و 3.

المنطقة 3 هي جزء من الحل للمتباينتين، لذا فهي حل النظام.

تحقق

يمكنك استخدام نقطة اختبار من منطقة الحل لمراجعة حلك. استبدل قيم x و y لنقطة الاختبار في المتباينات.

$$y \geq 0.5x - 3 \quad y \leq -2x + 7$$

$$0 \geq 0.5(0) - 3 \quad 0 \leq -2(0) + 7$$

$$0 \geq -3 \quad 0 \leq 7$$

وفي حالة عدم تقاطع المناطق، فإن هذا يعني أن النظام ليس له حل. وهذا يعني أن مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

مثال 7 نظام المتباينات مع المناطق المنفصلة

أوجد حلاً لنظام المتباينات.

$$y < 3x - 8$$

$$y > 3x + 4$$

مثل كل مستقيم بياناً وظلل المنطقة الموجودة أعلى أو أسفل الخط والتي تجعل المتباينة صحيحة.

حل $y < 3x - 8$ هو المنطقة 1.

حل $y > 3x + 4$ هو المنطقة 2.

ونظراً لأن التمثيلات البيانية للمتباينات لا تتقاطع، فإن هذا يعني عدم وجود نقاط مشتركة ولا يوجد حل لهذا النظام.

انتبه!

الأنظمة المتباينة لا تعد جميع الأنظمة المتباينة والتي لها حدود ولها نفس الميل من الأنظمة التي ليس لها حل. على سبيل المثال، إذا كان النظام في المثال 7 هو

$$y > 3x - 8$$

$$y > 3x + 4$$

فإن الحل سيكون المنطقة الموجودة إلى يمين الخط $y = 3x + 4$

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-49 لتقييم مدى فهم الطلاب لكيفية استخدام أساليب متنوعة في حل أنظمة المعادلات وكيفية حل أنظمة البيانات باستخدام التمثيل البياني.

انتبه!

حل معادلة y

قد ينسى الطلاب قسمة الثابت على المعامل y عند تغيير المعادلة التي بصيغة قياسية ($Ax + By = C$) إلى صيغة الميل-الجزء المحصور ($y = mx + b$). اقترح على الطلاب الرجوع إلى المعادلة التالية كدليل.

$$Ax + By = C \rightarrow y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اكتب نظام معادلتين على السبورة. اطلب من الطلاب أن يحددوا ميل المستقيمتين وما إذا كانت المستقيمتين متقاطعة أو متوازية أو متطابقة. ثم اطلب من الطلاب تحديد ما إذا كان النظام متسقًا ومستقلًا، أم متسقًا وتابعًا أم غير متسق.

إجابات إضافية

28. $(-2, -1)$ ؛ متسق ومستقل
29. لا يوجد حل؛ غير متسق
30. $(-6, 8)$ ؛ متسق ومستقل
31. حلول كثيرة لانهاية؛ متسقة وتابعية
32. حلول كثيرة لانهاية؛ متسقة وتابعية
33. $(\frac{1}{2}, 3)$ ؛ متسق ومستقل
34. لا يوجد حل؛ غير متسق
35. $(5, -8)$ ؛ متسق ومستقل

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية باستخدام التمثيل البياني. (مثال 1)

1. $y = 5x - 2$ (1, 3)
 $y = -2x + 5$
2. $y = 2x - 5$ (4, 3)
 $y = 0.5x + 1$
3. $x + y = -2$ (2, -4)
 $3x - y = 10$
4. $y = -3$ (4, -3)
 $2x = 8$
5. $3y = 4x + 6$ (-3, -2)
 $2y = x - 1$
6. $x = 5$ (5, 0)
 $4x + 5y = 20$

استخدم التعويض في حل كل نظام من أنظمة المعادلات التالية.

(مثال 2)

7. $5x - y = 16$ (3, -1)
 $2x + 3y = 3$
8. $3x - 5y = -8$ (-1, 1)
 $x + 2y = 1$
9. $y = 6 - x$ (5.25, 0.75)
 $x = 4.5 + y$
10. $x = 2y - 8$ (-2, 3)
 $2x - y = -7$
11. $4x - 5y = 6$ (9, 6)
 $x + 3 = 2y$
12. $x - 3y = 6$ (1.8, -1.4)
 $2x + 4y = -2$

13. **الوظائف** يعمل فيصل في متجر لتأجير الأفلام ويكسب AED 8 في الساعة. كما يقوم أيضًا برعاية الحيوانات الأليفة مقابل AED 10 في الساعة في نهاية الأسبوع. عمل فيصل لمدة 10 ساعات هذا الأسبوع وحقق AED 110. فكم عدد الساعات التي عملها في متجر تأجير الأفلام؟ وكم عدد الساعات التي قضاها في رعاية الحيوانات خلال نهاية الأسبوع؟

تأجير الأفلام: 10 ساعات، رعاية الحيوانات الأليفة: 3 ساعات استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام من أنظمة المعادلات التالية. (المثال 3)

14. $7x + y = 9$ (2, -5)
 $5x - y = 15$
15. $2x - 3y = 1$ (8, 5)
 $4x - 5y = 7$
16. $-3x + 10y = 5$ (1, 2)
 $2x + 7y = 24$
17. $2x + 3y = 3$ (1, 2)
 $12x - 15y = -4$
18. $3x + 4y = -1$ (1, -2)
 $6x - 2y = 3$
19. $5x - 6y = 10$ (-4, -5)
 $-2x + 3y = -7$

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. (المثال 4)

20. $x + 2y + 3z = 5$ (7, -1, 1)
 $3x + 2y - 2z = -13$
 $5x + 3y - z = -11$
21. $x - y - z = 7$ (-6, -4, 7)
 $-x + 2y - 3z = -12$
 $3x - 2y + 7z = 30$
22. $7x + 5y + z = 0$ (-2, 2, 4)
 $-x + 3y + 2z = 16$
 $x - 6y - z = -18$
23. $3x - 5y + z = 9$ (10, -7, 1)
 $x - 3y - 2z = -8$
 $5x - 6y + 3z = 15$
24. $4x + 2y + z = 7$ (3, -3, 1)
 $2x + 2y - 4z = -4$
 $x + 3y - 2z = -8$
25. $x - 3z = 7$ (5, 8, -9)
 $2x + y - 2z = 11$
 $-x - 2y + 2z = 6$
26. $8x - z = 4$ (2, -7, 12)
 $y + z = 5$
 $11x + y = 15$
27. $4x - 2y + z = -5$
 $5x + y + 3z = 6$
 $-2x + 3y + 2z = -4$

P22 | الدرس 0-5 | أنظمة المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. اذكر ما إذا كان النظام متوافقًا ومستقلًا، أم متوافقًا وتابعًا، أم غير متوافق. (مثال 5) 28-35. انظر الحاشية.

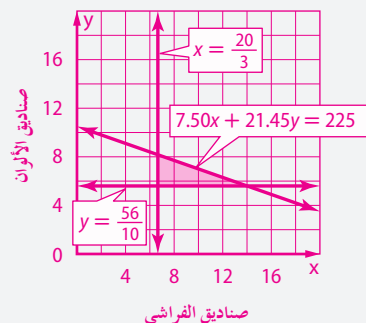
28. $8x - 5y = -11$ (3, -1)
 $-8x + 9y = 7$
29. $x - y = 2$ (2, 2)
 $2x = 2y + 10$
30. $5x + 4y = 2$ (4, -3)
 $6x + 5y = 4$
31. $12x - 9y = 3$ (1, 1)
 $4x - 3y = 1$
32. $1.5x + y = 3.5$ (2, 1)
 $3x + 2y = 7$
33. $10x - 3y = -4$ (1, 1)
 $-8x + 5y = 11$
34. $2x - 2y + 3z = 2$ (1, 1, 1)
 $2x - 3y + 7z = -1$
 $4x - 3y + 2z = 0$
35. $-3x + 2y + z = -23$ (1, 1, 1)
 $4x + 2y + z = 5$
 $5x + 3y + 3z = 11$

36. **التخييم** قدم نادي متسلفي الجبال رحلتين للتخييم خلال فصل الصيف. أجرة النادي 5 خيم وكابينة واحدة لـ 30 عضوًا ذهبوا في الرحلة الأولى. وأجر النادي 4 خيم وكابنتين لـ 36 عضوًا ذهبوا في الرحلة الثانية. في حالة إكمال التخييم والكابينة لأقصى سعة في الرحلتين، فكم عدد الأفراد الذين يمكنهم الإقامة في كل كابينة؟ (مثال 5) **خيمة: 4 أفراد؛ كابينة: 10 أفراد**

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات التالية. إذا لم يكن هناك حل للنظام، فاذكر ليس لها أي حلول. (المثال 6) 37-48. انظر ملحق إجابات الوحدة 0.

37. $y \geq x - 3$ (1, 1)
 $y \leq 2x + 1$
38. $y + x < 1$ (1, 1)
 $y > -x - 1$
39. $x + 2y \geq 12$ (1, 1)
 $x - y \geq 3$
40. $y \leq \frac{1}{3}x - 7$ (1, 1)
 $3y \geq x + 6$
41. $y + 5 < 4x$ (1, 1)
 $2y > -2x + 10$
42. $y \leq -x + 8$ (1, 1)
 $y \geq 0.5x - 4$
43. $8y \leq -2x - 1$ (1, 1)
 $4y + x \geq 3$
44. $y + 7 < 3x$ (1, 1)
 $2y + 5x > 8$
45. $-6y \geq -5x + 6$ (1, 1)
 $y \leq -3x - 1$
46. $y + 4 \leq \frac{4}{3}x$ (1, 1)
 $3y \geq 4x + 9$
47. $y \leq 2x + 1$ (1, 1)
 $y \geq 2x - 2$
 $3x + y \leq 9$
48. $x - 3y > 2$ (1, 1)
 $2x - y < 4$
 $2x + 4y \geq -7$

49. **الفن** يستطيع أحمد إنفاق مبلغ لا يزيد عن AED 225 على مستلزمات نادي الفن من الفرش والألوان. ويحتاج إلى 20 فرشاة و56 أنبوب ألوان على الأقل. مثل بياننا منطقة توضح عدد الفرش التي يمكنه شراؤها من كل عنصر. (مثال 6) انظر الحاشية.



49.

عمليات المصفوفات

الهدف

- 1 استخدام الخصائص لوصف المصفوفات.
- 2 جمع المصفوفات وطرحها وضربها باستخدام كمية قياسية.

مفردات جديدة

مصفوفة (matrix)	عنصر
أبعاد (dimensions)	أبعاد
(row matrix)	مصفوفة الصف
(column matrix)	مصفوفة العمود
(square matrix)	المصفوفة المربعة
(zero matrix)	المصفوفة الصفرية
(equal matrices)	المصفوفة المتساوية
(scalar)	الكمية العددية

1 التركيز

التخطيط الرئيسي

الدرس 0-6 استخدام الخواص في وصف المصفوفات.
جمع المصفوفات وطرحها وضربها باستخدام كمية قياسية.

بعد الدرس 0-6 ضرب المصفوفات. إيجاد محددات ومعكوسات المصفوفة 2×2 والمصفوفة 3×3 .

2 التدريس

1 وصف المصفوفات وتحليلها
المثال 1 يوضح كيفية وصف المصفوفة باستخدام أبعادها وكيفية تحديد عناصر المصفوفة.

مثال إضافي

1 استخدم $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة على ما يلي.
a. تحديد أبعاد A.
b. إيجاد قيمة a_{24} .

1 وصف المصفوفات وتحليلها إن **المصفوفة** هي مستطيل من المتغيرات أو الثوابت توجد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية. وعادة تكون مضمنة ضمن أقواس. يطلق على كل قيمة في المصفوفة اسم **عنصر**. عادة تتم تسمية المصفوفة باستخدام أحرف كبيرة.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3 صفوف
3 أعمدة

يوجد العنصر -8 في الصف رقم 3 والعمود رقم 2. ويتم التعبير عنه كـ a_{32} .

العنصر -1 في الصف رقم 2 والعمود رقم 1. ويتم التعبير عنه كـ a_{21} .

ويمكن وصف المصفوفة حسب **أبعادها**. والمصفوفة التي لها m صفوف و n أعمدة هي مصفوفة $m \times n$. والتي يمكن قراءتها كـ m ضرب n. يُعد المصفوفة A أعلاه هي مصفوفة 3×4 لأنها تتضمن 3 صفوف و 4 أعمدة.

مثال 1 أبعاد المصفوفة وعناصرها

استعن بـ $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -18 \\ -2 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ للإجابة على ما يلي.

a. اذكر أبعاد A.
ب. أوجد قيمة a_{13} .

نظرًا لأن A تتضمن صفين و 3 أعمدة، فستكون أبعاد A هي 2×3 .

صفان
3 أعمدة

نظرًا لأن a_{13} هو العنصر الموجود في الصف رقم 1 والعمود رقم 3، فستكون قيمة a_{13} هي -18.

صف واحد
3 أعمدة

وبعض المصفوفات لها أسماء خاصة. على سبيل المثال، فإن المصفوفة التي تتضمن صفًا واحدًا يطلق عليها **مصفوفة صف**. والمصفوفة التي تتضمن عمودًا واحدًا هي **مصفوفة عمود**. والمصفوفة التي تتضمن نفس عدد الصفوف والأعمدة تعرف بـ **مصفوفة مربعة**. والمصفوفة التي كل عناصر تساوي صفر تعرف بـ **مصفوفة صفرية**.

مصفوفة العمود

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الصف

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

والمصفوفتان تكونان **مصفوفات متساوية** فقط في حالة أن كل عنصر موجود في إحدى المصفوفات مساوي للعنصر المقابل (المناظر له) في المصفوفة الأخرى. إذا، فإن المصفوفتين A و B الموضحتين أدناه متساويتان.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه لكون المصفوفتين متساويتين، يجب أن تمتلكا نفس عدد الصفوف والأعمدة.

P23

2 عمليات المصفوفة

يمكن جمع المصفوفات أو طرحها فقط في حالة أن يكون لها نفس الأبعاد.

المفهوم الأساسي جمع المصفوفات وطرحها

لجمع أو طرح مصفوفتين لهما نفس الأبعاد، قم بجمع أو طرح نظائر العناصر في المصفوفتين.

$$\begin{aligned} A + B &= A + B \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\ A - B &= A - B \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نصيحة دراسية

العناصر المتقابلة
المقابل يشير إلى العناصر الموجودة في نفس الموضع في كل مصفوفة.

مثال 2 جمع المصفوفات وطرحها

إذا كان $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 6 & -23 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة كل مما يلي:

a. $A + B$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 6 & -23 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+12 & 3+(-7) \\ -5+6 & 14+(-23) \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إضافة عناصر متقابلة.

b. $B - C$

$$B - C = \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 6 & -23 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

التبويض

هي مصفوفة 2×1 ، وبما أن هذه الأبعاد ليست مطابقة، فلا يمكنك طرح المصفوفتين C هي مصفوفة 2×2 و B.

كما يمكنك ضرب أي مصفوفة عن طريق استخدام ثابت يطلق عليه **الكمية العددية**. وعند تنفيذ هذا الأمر، فإنك تضرب كل عنصر وحده في قيمة الكمية العددية.

مثال 3 ضرب الكمية العددية

أوجد ناتج ضرب كل مما يلي.

a. $3 \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 10 & 2 & -15 \end{bmatrix}$

$$3 \begin{bmatrix} -6 & -3 & 7 \\ 10 & 2 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-6) & 3(-3) & 3(7) \\ 3(10) & 3(2) & 3(-15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -9 & 21 \\ 30 & 6 & -45 \end{bmatrix}$$

b. $-4 \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 3 \\ -11 & 4 \end{bmatrix}$

$$-4 \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 3 \\ -11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4(2) & -4(-9) \\ -4(7) & -4(3) \\ -4(-11) & -4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 36 \\ -28 & -12 \\ 44 & -16 \end{bmatrix}$$

نصيحة دراسية

ضرب الكمية العددية
نتائج أفراس
المصفوفة نفس سلوك رموز التجميع
الأخرى. لذا، فعند الضرب في كمية
عددية، يجب أن يتم التوزيع بنفس الطريقة
التي يتم بها الأمر مع رمز التجميع.

2 عمليات المصفوفة

مثال 2 يوضح كيفية جمع المصفوفات

وطرحها. مثال 3 يوضح كيفية ضرب

مصفوفة في ثابت (كمية قياسية). مثال

4 يوضح كيفية تنفيذ عمليات متعددة

الخطوات على المصفوفات. المثال 5

والمثال 6 يوضحان كيفية حل معادلات

المصفوفات.

أمثلة إضافية

2 أوجد حل كل مما يلي حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -3 & 16 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

a. $A + C$ غير ممكن

b. $B - A = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 13 \end{bmatrix}$

3 أوجد ناتج كل من.

a. $4 \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 12 & 24 & -4 & 16 \\ 28 & 32 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

b. $-3 \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ 0 & 6 \\ 18 & -12 \end{bmatrix}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب

اعرض أمام الطلاب شرائح توضح مسائل

مختلفة على جمع المصفوفات وطرحها.

في كل شريحة، اسأل الطلاب عن مدى

إمكانية تحقيق عملية الجمع أو الطرح.

اطلب من الطلاب الرد بـ A للإجابة

نعم والرد بـ B للإجابة لا. في كل

مثال، اختر بعض الطلاب لتوضيح سبب

الإمكانية أو سبب عدم الإمكانية.

تتشابه الكثير من خصائص الأعداد الحقيقية مع المصفوفات. وفيما يلي سرّد لملخص هذه الخصائص.

المفهوم الأساسي خصائص عمليات المصفوفات

بالنسبة لأي مصفوفة A و B و C والتي يكون ناتج ضرب المصفوفة لها معروف وأي قيمة عددية k . تكون الخصائص التالية صحيحة.

$$A + B = B + A$$

خاصية التبديل في الجمع

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

خاصية التجميع في الجمع

$$k(A + B) = kA + kB$$

خاصية توزيع الكمية العددية إلى اليسار

$$(A + B)k = kA + kB$$

خاصية توزيع الكمية العددية إلى اليمين

يمكن تنفيذ العمليات متعددة الخطوات على المصفوفات. وترتيب هذه العمليات هو نفس ترتيب الأعداد الحقيقية.

مثال 4 العمليات متعددة الخطوات

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج $4(P + Q)$ إذا كان

$$4(P + Q) = 4 \left(\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & -10 & -6 \end{bmatrix} \right)$$

التعويض

$$= 4 \left[\begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & -10 & -6 \end{bmatrix} \right]$$

خاصية التوزيع

$$= \begin{bmatrix} 12 & 32 & -8 \\ -20 & 20 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 20 & 28 \\ 12 & -40 & -24 \end{bmatrix}$$

اضرب في الكمية العددية.

$$= \begin{bmatrix} 12 + (-16) & 32 + 20 & -8 + 28 \\ -20 + 12 & 20 + (-40) & -16 + (-24) \end{bmatrix}$$

اجمع

$$= \begin{bmatrix} -4 & 52 & 20 \\ -8 & -20 & -40 \end{bmatrix}$$

حوّل إلى أبسط صورة

ويمكنك استخدام نفس الأساليب الجبرية لحل المعادلات مع الأعداد الحقيقية لحل معادلات المصفوفات.

مثال 5 حل معادلة مصفوفة

$$4X - B = A \text{ for } X \text{ أوجد حل } B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 14 & 10 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} -9 & 15 & 4 \\ 2 & -10 & -5 \end{bmatrix} \text{ إذا كان}$$

$$4X - B = A$$

المعادلة الأصلية

$$4X = A + B$$

اجمع B إلى كل طرف.

$$X = \frac{1}{4}(A + B)$$

اقسم كل طرف على 4.

$$X = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} -9 & 15 & 4 \\ 2 & -10 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -7 & 8 \\ 14 & 10 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

التعويض

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 8 & 12 \\ 16 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

اجمع.

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

اضرب في الكمية العددية.

انتبه!

معادلات المصفوفة تذكر أن المتغير X في معادلات المصفوفة يمثل المصفوفة. بينما المتغير x في المعادلات الجبرية، يمثل عدد.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والنشر © محفوظة

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والنشر © محفوظة

أمثلة إضافية

4 أوجد $3(A - B)$ إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ و}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -9 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

5 باعتبار $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ و

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \text{ قم بحل}$$

$$2X - A = B \text{ حيث } X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال 6 من الحياة اليومية استخدام معادلات المصفوفات

الهواتف المحمولة أجرت عائشة استطلاعاً للرأي في مدرستها الثانوية لمعرفة الفصل الأكثر إرسالاً للرسائل النصية والصور والأكثر استهلاكاً للدقائق في التحدث على الهواتف المحمولة كل أسبوع. فيما يلي متوسطات طلاب العام الأول والثاني والثالث والعام النهائي.

السنة	الرسائل النصية	الصور	المكالمات
العام الأول	20	3	163
العام الثاني	25	4	170
العام الثالث	15	7	178
العام النهائي	22	3	190

a. إذا كانت تكلفة كل رسالة 0.10 فلس، وكل صورة 0.75 فلس، وكل دقيقة 0.05 فلس، أوجد المتوسط الأسبوعي لتكاليف الهواتف المحمولة لكل فصل. عبر عن إجابتك في صورة مصفوفة.

الخطوة 1 اكتب معادلة المصفوفة للتكلفة الإجمالية X. افترض أن T يمثل عدد الرسائل لجميع الفصول، و P يمثل عدد الصور و C عدد دقائق المكالمات.

$$X = 0.10T + 0.75P + 0.05C$$

الخطوة 2 حل المعادلة.

$$X = 0.10T + 0.75P + 0.05C$$

المعادلة الأصلية

$$= 0.10 \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 15 \\ 22 \end{bmatrix} + 0.75 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} 163 \\ 170 \\ 178 \\ 190 \end{bmatrix}$$

التبويض

$$= \begin{bmatrix} 2.00 \\ 2.50 \\ 1.50 \\ 2.20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 \\ 3.00 \\ 5.25 \\ 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.15 \\ 8.50 \\ 8.90 \\ 9.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.40 \\ 14.00 \\ 15.65 \\ 13.95 \end{bmatrix}$$

اضرب في الكمية العددية.

وتشير المصفوفة الأخيرة إلى المتوسط الأسبوعي لتكاليف الهواتف المحمولة لكل فصل. لذا، فمتوسط، كل طالب من طلاب العام الأول ينفق 12.40 AED وكل طالب في العام الثاني ينفق 14.00 AED وكل طالب في العام الثالث ينفق 15.65 AED وكل طالب في العام النهائي ينفق 13.95 AED.

b. في حالة وجود 100 طالب في العام الأول و 180 في العام الثاني و 250 في العام الثالث و 300 في العام النهائي يستخدمون الهواتف المحمولة في مدرسة عائشة، استخدم نتائج استطلاع الرأي الخاص بها لتقييم إجمالي عدد الرسائل النصية والصور المرسلة والدقائق المستهلكة التي ينفقها هؤلاء الطلاب على الهواتف المحمولة كل أسبوع. عبر عن إجابتك في مصفوفة.

الخطوة 1 اكتب معادلة المصفوفة لإجمالي الاستخدام X. افترض أن F يمثل طلاب العام الأول و S يمثل طلاب العام الثاني و L يمثل طلاب العام الثالث و N يمثل طلاب العام النهائي.

$$X = 100F + 180S + 250L + 300N$$

الخطوة 2 حل المعادلة.

$$X = 100F + 180S + 250L + 300N$$

$$= 100[20 \ 3 \ 163] + 180[25 \ 4 \ 170] + 250[15 \ 7 \ 178] + 300[22 \ 3 \ 190]$$

$$= [16,850 \ 3670 \ 148,400]$$

تشير المصفوفة الأخيرة إلى إجمالي المتوسط الأسبوعي لكل نوع من استخدامات الهاتف المحمول. لذا، كان هناك 16,850 رسالة و 3670 صورة و 148,400 دقيقة استهلكها هؤلاء الطلاب.



الربط بالحياة اليومية

كم متوسط. فإن الطلاب بين أعمار 13 إلى 17 يرسلون رسائل أكثر مما يتحدثون ويستلمون أكثر من 1700 رسالة نصية شهرياً ولكنهم يجرون ويتلفون 230 مكالمات فقط شهرياً.

المصدر: هاتف ماجد

مثال إضافي

6 الكافيتريا أجرى زياد استطلاعاً بمدرسته الثانوية لتحديد متوسط عدد المرات التي اختار فيها الطلاب بوفيه السلطات أو بوفيه البيتزا أو وجبة غداء ساخنة. جاء متوسط الطلاب الجدد وطلاب العام الثاني وطلاب العام الثالث وطلاب العام النهائي كما يلي.

العام	سلطة	وجبة ساخنة	بيتزا
العام الأول	1.8	1.6	1.6
العام الثاني	0	2.2	2.8
العام الثاني	1.2	1.4	2.2
العام الثالث	0.2	2.6	2.2

a. إذا كانت تكلفة السلطة 3.50

AED وتكلفة وجبة الغداء

الساخنة 3 AED وتكلفة البيتزا

AED، فأوجد متوسط تكلفة

الطعام الأسبوعية لكل سنة. عبر

عن إجابتك في صورة مصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 15.10 \\ 13.60 \\ 13.90 \\ 14.00 \end{bmatrix}$$

b. إذا اشترى 360 من الطلاب الجدد

و 320 من طلاب السنة الثانية و 180

من طلاب السنة الثالثة و 250 من

طلاب السنة النهائية وجبة غداء

في مدرسة زياد، فاستخدم نتائج

استطلاعهم لتقدير العدد الكلي لكل

نوع وجبة غداء يتم شراؤها كل

أسبوع. عبر عن إجابتك في صورة

مصفوفة. [914 2,182 2,418]

إجابات إضافية

11. $\begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -3 & -1 \\ 8 & 15 \end{bmatrix}$

12. غير ممكن

13. $\begin{bmatrix} -16 & 5 & 6 \\ 10 & -23 & 8 \end{bmatrix}$

14. غير ممكن

15. $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 7 & -19 \\ -16 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 8 \\ -2 & 5 & 24 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 93 & 101 & 164 \\ 94 & 105 & 170 \\ 101 & 99 & 167 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 12 & -36 & 14 \\ 6 & 8 & 22 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -9 & -45 \\ 72 & 36 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 6 & 24 \\ -21 & 45 \\ 36 & -18 \end{bmatrix}$

P26 | الدرس 0-6 | عمليات المصفوفة

P26 | الدرس 0-6 | عمليات المصفوفة

21. $\begin{bmatrix} -18 & 60 & -30 & 54 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 140 & -63 & 28 \\ -7 & 35 & 77 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -16 & 24 \\ -48 & 20 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 37 & -43 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 13 & -17 \\ 9 & -26 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 9 & 33 \\ -3 & 9 \\ -15 & -66 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 16 \\ 8 & -8 \\ -1 & -29 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 15 & -23 \\ 19 & 18 \end{bmatrix}$

استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

الهدف

1. إيجاد عدد النتائج المحتملة لتجربة ما.
2. استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.

المفهوم الأساسي مبدأ العد الأساسي

افترض أن A و B حدثان. إذا كان الحدث A له شجرة واحدة محتملة هي n_1 يتبعه الحدث B نتيجتها ممّا نتيجة محتملة هي n_2 . إذا الحدث A يتبعه الحدث B الذي له $n_2 \times n_1$.

ويمكن أيضًا استخدام مبدأ العد الأساسي للعثور على عدد النتائج المحتملة لثلاثة أحداث أو أكثر. على سبيل المثال، عدد الطرق التي يمكن من خلالها وقوع الحدث k مقدمة من خلال $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$.

يطبق على الأحداث التي لها نتائج لا تؤثر على بعضها البعض **أحداث مستقلة**. أما الأحداث التي تتضمن نتائج تؤثر على بعضها البعض، فيطلق عليها **أحداث غير مستقلة**.

مثال 1 مبدأ العد الأساسي

a. يقدم أحد المطاعم عشاء خاصًا حيث يستطيع العميل الاختيار من بين 6 أنواع مقبلات وشورية أو سلطة وواحد من بين 12 طبقًا أساسيًا وواحد من بين 8 أنواع حلوى. فما هو عدد الوجبات الخاصة للعشاء المحتملة؟

نظرًا لأن اختيار عنصر قائمة واحد لا يؤثر على اختيار أي عنصر آخر، فإن كل اختيار يعتبر مستقلًا. ولتحديد عدد وجبات العشاء الخاصة المحتملة، اضرب عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار كل عنصر.

$$6 \times 2 \times 12 \times 8 = 1,152$$

لذا، يوجد 1,152 وجبة عشاء خاصة.

b. يعمل سعد في متجر لبيع الكتب. ويقوم بترتيب أكثر خمسة كتب مبيعًا للعرض. فإذا تمكن سعد من وضع البطاقات بأي ترتيب، فكم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لسعد ترتيب الكتب بها؟

يؤثر اختيار الكتاب للموضع الأول على الكتب المتاحة للموضع الثاني، ويؤثر اختيار الموضوع الثاني على الكتب المتاحة للموضع الثالث وهكذا. لذا، فإن اختيار الكتب يعد من الأحداث غير المستقلة.

توجد خمس كتب يمكن الاختيار من بينها للموضع الأول، و4 كتب للموضع الثاني و3 كتب للموضع الثالث وكتاب واحد للموضع الخامس. لتحديد العدد الإجمالي لطرق ترتيب الكتب، اضرب في عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار الكتب لكل موضع.

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

لذا، يوجد 120 طريقة محتملة يمكن لسعد الاختيار من بينها لترتيب الكتب.

يمكن كتابة التعبير المستخدم في المثال 1b لحساب عدد ترتيبات الكتب، $5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ والتي تقرأ 5 مضروب. بعد **مضروب** العدد الموجب n هو ناتج ضرب الأعداد الموجبة أصغر من أو تساوي، ويتم التعبير عنها من خلال

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 \text{ حيث } 0! = 1.$$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-7 إيجاد عدد النتائج المحتملة لتجربة ما. استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.

بعد الدرس 0-7 استخدم التوافيق في إيجاد معامل ذي حدين في الحد النوني n في التوسع $(a + b)^n$.

2 التدريس

1 مساحة للنموذج

المثال 1 يوضح كيفية استخدام مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد النتائج المحتملة لحدث ما.

مثال إضافي

1 a. يقوم متجر لوازم مكتبية بتقديم ورقة فيها يختار العميل لونًا من 5 ألوان. ومبطنًا أو غير مبطن. وواحدًا من 6 أحجام. واختيار نوع من 3 طلاءات مختلفة. كم عدد احتمالات الأنواع المختلفة من الورقة؟ **180**

b. تعمل سلمى في متجر بطاقات هدايا. حيث تقوم في ترتيب أفقي بلف شريط من ست بطاقات تمنى الشفاء على أحد الأبواب. إذا تمكنت سلمى من وضع البطاقات بأي ترتيب، فكم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لسلمى ترتيب البطاقات بها؟ **720**

2 التباديل والتوافيق يمكن أيضاً استخدام مبدأ العد الأساسي لتحديد عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب n الكائنات بطريقة محددة. ويطلق على ترتيب n الكائنات **تباديل** الكائنات.

المفهوم الأساسي للتباديل

أما عدد تباديل n الكائنات n المأخوذة في كل مرة فهو $n!P_n = n!$.
عدد تباديل n الكائنات المأخوذة r في كل مرة هو $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$.

مثال 2 التباديل مع الاحتمالات

يحتاج نظام الإنذار إلى رمز مكون من 7 أرقام باستخدام الأعداد من 0 إلى 9. ويمكن استخدام كل عدد مرة واحدة فقط.

a. كم عدد الرموز المختلفة المحتملة؟

يعتبر ترتيب الأعداد في الرمز عاملاً هاماً. لذا فإن هذا الموقف يمتلك 10 أعداداً تبادلية يتم أخذ 7 في كل مرة.

$$\begin{aligned} nPr &= \frac{n!}{(n-r)!} & \text{تعريف التباديل} \\ 10P_7 &= \frac{10!}{(10-7)!} & n=10 \text{ و } r=7 \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} & \text{قم بتوسيع 10! وتنقسم المضروببات المشتركة.} \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 & \text{حوّل إلى أبسط صورة.} \\ &= 604,800 & \text{اضرب.} \end{aligned}$$

إذن، يوجد 604,800 رمز محتمل.

b. عند تكوين الرمز بطريقة عشوائية، ما احتمالات أن يكون أول ثلاثة أعداد فردية؟

لاكتشاف احتمال أن يكون أول ثلاثة أعداد فردية، يجب العثور على عدد طرق اختيار ثلاثة أعداد فردية وضربها في عدد طرق اختيار الأعداد المتبقية، ثم قسمتها على إجمالي الرموز المحتملة.

$$\frac{\text{طرق اختيار 3 أعداد فردية} \times \text{طرق اختيار آخر 4 أعداد}}{\text{إجمالي الرموز المحتملة}} = P \quad (\text{أول ثلاثة أعداد فردية})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5P_3 \times 7P_4}{10P_7} \\ &= \frac{\frac{5!}{(5-3)!} \times \frac{7!}{(7-4)!}}{\frac{10!}{(10-7)!}} & nPr = \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= \frac{\frac{5!}{2!} \times \frac{7!}{3!}}{\frac{10!}{3!}} & \text{اطرح.} \\ &= \frac{\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}} & \text{قم بتوسيع 5!, 7!, 10! وقم بتقسيم المضروببات المشتركة.} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} & \text{بسط.} \\ &= \frac{50,400}{604,800} = \frac{1}{12} & \text{اضرب.} \end{aligned}$$

لذا، فإن الاحتمال هو $\frac{1}{12} = 0.08$ حوالي.

P29

2 التباديل والتوافيق

المثال 2 يوضح كيفية استخدام التباديل في الاحتمالات.

المثال 3 يوضح كيفية استخدام التوافيق في الاحتمالات.

مثال إضافي

2 يتطلب نظام مفاتيح أحد الأبواب وجود شفرة مكونة من 4 أحرف من A إلى G على ألا يستخدم حرف واحد أكثر من مرة.

a. كم عدد الشفرات الممكنة؟ 840

b. عند تكوين الشفرة بطريقة عشوائية، ما احتمالات وجود حرفين متحركين في بداية الشفرة؟

$$\frac{1}{21}$$

نصيحة دراسية

الترتيبات في التباديل. يعد ترتيب الكائنات أمراً هاماً. على سبيل المثال، عند ترتيب كاشين A و B باستخدام التباديل، يختلف الترتيب AB عن الترتيب BA.

مثال إضافي

3

افترض وجود 5 كلاب كولي و4 كلاب داشهند و6 كلاب استرداد في مكتب أحد الأطباء البيطريين. يريد الدكتور ضياء اختيار 10 كلاب من المجموعة لتصويرها لمحاضرة يلقيها عن رعاية الكلاب.

a. كم عدد الطرق التي يمكن اختيار بها 10 كلاب؟ **3,003**
b. عند اختيار الكلاب اختيارًا عشوائيًا، ما احتمالات وجود 3 كولي و3 داهشند و4 استرداد؟

$$\frac{200}{1001}$$

باستخدام التكنولوجيا

مدونة في مدونة الوحدة، اطلب من الطلاب كتابة إدخال يوضح الفرق بين التباديل والتوافيق. اطلب منهم ذكر مثال لكل منهما.

أفنته!

التوافيق لكلمة التوافيق العديد من الاستخدامات خارج مجال العمليات الحسابية الرياضية للتوافيق. على سبيل المثال، فإن توافيق الفعل يتم التعبير عنها من خلال التباديل.

الربط بالحياة اليومية

تطوع متنا ألف شخص من جميع أنحاء العالم للمشاركة في فرقة التشجيع لأولمبيات صيف 2008. من هذا الرقم، تم تكوين حوالي 600 فريق.

المصدر: سجلات NFL Fanhouse

في التوافيق، الترتيب ليس مهمًا. أما **التوافيق** للكائنات n الأخوة r في كل مرة، فتحسب عن طريق قسمة عدد التباديل على عدد الترتيبات التي تحتوي على نفس العناصر ويتم التعبير عنها من خلال ${}_nC_r$.

المفهوم الأساسي للتوافيق

عدد توافيق الكائنات n الأخوة r في كل مرة هو

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ويمكن الاختلاف الأساسي بين التباديل والتوافيق فيما إذا كان يتم وضع الترتيب في الاعتبار (مثل التباديل) أم لا (مثل التوافيق). على سبيل المثال، فيما يلي سرًا للكائنات E و F و G و H مع أخذ اثنين في كل مرة، يتم سرد التباديل والتوافيق.

التوافيق	
FG	EF
FH	EG
GH	EH

التباديل			
HE	GE	FE	EF
HF	GF	FG	EG
HG	GH	FH	EH

في التباديل، يختلف EF عن FE. ولكن في التوافيق، EF هو نفسه FE.

مثال 3 التوافيق مع الاحتمالات

يوجد 7 طلاب بالسنة النهائية و5 بالسنة الثانية و4 بالسنة الثالثة في فرقة التشجيع. ويحتاج الأستاذ سعيد إلى اختيار 12 طالبًا من المجموعة لبيع بعض المنتجات الترويجية التشجيعية للفريق خلال فترة الغذاء.

a. كم عدد الطرق التي يمكن استخدامها لاختيار 12 طالب؟

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

تعريف التوافيق

$${}_nC_{12} = \frac{16!}{(16-12)!12!}$$

$$n = 16 \text{ و } r = 12$$

$$= \frac{16!}{4!12!}$$

اطرح.

$$= \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 12!}$$

قم بتوسيع 16! و 4! وتقسيم المضروبكات المشتركة.

$$= \frac{43,680}{24}$$

اضرب.

$$= 1820$$

حوّل إلى أبسط صورة.

إذًا، توجد 1820 طريقة يمكن من خلالها اختيار 12 طالب.

b. عند اختيار الطلاب اختيارًا عشوائيًا، ما احتمالات وجود 4 من طلاب السنة النهائية و4 من طلاب السنة الثالثة و4 من طلاب السنة الثانية؟

$$\text{طرق اختيار 4 من طلاب السنة النهائية من بين 7: } \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!}$$

$$\text{طرق اختيار 4 من طلاب السنة الثالثة من بين 5: } \frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5!}{1!4!}$$

$$\text{طرق اختيار 4 من طلاب السنة الثانية من بين 4: } \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{4!}{0!4!}$$

يوجد $\frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!}{1!4!} \times \frac{4!}{0!4!}$ أو 175 طريقة لاختيار 4 من طلاب السنة النهائية و4 من السنة الثالثة و4 من السنة الثانية. لذا، فإن الاحتمال هو $\frac{175}{1820} = \frac{5}{52}$

استخدم مبدأ العد الأساسي لتحديد عدد نتائج كل حدث. (مثال 1)

1. كم عدد أنواع الخبز المتوفرة؟ 30

الحجم	الألوان
XS, S, M, L, XL, XXL	أزرق، أحمر، أخضر، رمادي، أسود

2. بالنسبة لنوع محدد من السيارات، عرض التاجر 3 أحجام للحركات ونوعين لأجهزة الاستريو و18 لون لهيكل السيارة و7 ألوان للتنجيد. كم عدد الاحتمالات المختلفة المتاحة لهذا الطراز؟ 756

3. إذا قمت بإلقاء قطعة نقد معدنية وتسجيل الوجه الظاهر إلى أعلى ثم لف دائرة تضم 4 ألوان لها أقسام متساوية، فكم عدد النتائج المحتملة؟ 48

4. إذا قدم أحد التجار 12 نوعًا مختلفًا من اللحوم و4 أنواع مختلفة من الجبن و 6 أنواع مختلفة من الخبز، فكم عدد الشطائر المختلفة التي يمكن صنعها باستخدام نوع واحد من اللحوم ونوع واحد من الجبن ونوع واحد من الخبز؟ 360

5. يقدم أحد متاجر الآيس كريم 20 نكهة مختلفة وخمس إضافات مختلفة و 3 أحجام مختلفة. كم عدد الاختيارات المتوفرة من الآيس كريم؟ 300

6. كم عدد أنواع البيتزا ذات الإضافة الواحدة المختلفة المتوفرة؟ 24

البيتزا المفضلة	
الإضافات	النظيرة
العلف	رقبة
الطنانق	سبيكة
المشروم	الصوص
الخضروات	مارينارا
	ألفريدو
	طماطم طازجة

7. كم عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب ستة كتب مختلفة على الرف في حالة إمكانية ترتيبها بأي ترتيب؟ 720

8. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها سرد أسماء ثمانية ممثلين في حفل افتتاح فيلم إذا كان هناك إلزام بوضع اسم الممثل الرئيس في المقدمة؟ 5040

أوجد قيمة كل مما يلي. (المثالان 2 و3)

9. $6P_6$ 720
10. $5P_3$ 60
11. $7C_4$ 35
12. $20C_{15}$ 15,504
13. $8P_1$ 8
14. $6P_4$ 360
15. $6P_3$ 120
16. $7P_4$ 840
17. $9P_5$ 15,120
18. $4C_2$ 6
19. $12C_4$ 495
20. $9C_9$ 1

21. مسؤولو الفصل يوجد في مدرسة الشارقة الثانوية 15 اسما على قائمة ترشيحات رؤساء الفصول لطلاب السنة الثالثة. وسيتم اختيار خمسة لتكوين لجنة الفصل. (المثالان 2 و3)

- a. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن تشكيلها؟
- b. كم عدد الطرق التي يمكن من خلالها تشكيل اللجنة إذا كان كل طالب يمتلك مسؤولية مختلفة؟ 360,360
- c. في حالة وجود 8 فتيات و 7 أولاد في قائمة الترشيحات، فما هو احتمال تشكيل اللجنة من طالبين و 3 طالبات؟ $\frac{56}{143}$

22. الفن يرغب أمين أحد المتاحف في اختيار أربع لوحات من بين عشرين لوحة لوضعها للعرض. كم عدد المجموعات البكونة من أربع لوحات التي يمكن اختيارها؟ 4845

23. أرقام الهواتف في الإمارات. تتكون أرقام الهواتف المحلية القياسية من 7 أرقام. حيث لا يمكن أن يكون الرقم الأول 1 أو 0.

a. أوجد عدد أرقام الهواتف المختلفة. 8,000,000

b. أوجد الاحتمالات الخاصة بالاختيار العشوائي لرقم هاتف محدد من بين جميع الأعداد المحتملة.

c. كم عدد أرقام الهواتف المختلفة المحتملة في حالة استخدام أعداد زوجية فقط؟ 62,500

d. أوجد الاحتمالات الخاصة باختيار رقم هاتف يضم أرقامًا زوجية فقط. $\frac{1}{128}$

e. أوجد عدد احتمالات أرقام الهواتف في حالة أن أول ثلاثة أرقام هي 593. أوجد الاحتمالات الخاصة بالاختيار العشوائي لرقم هاتف أول ثلاثة أرقام به هي 593؟

24. البطاقات ثم سحب خمس بطاقات من مجموعة أوراق قياسية تضم 52 ورقة.

a. حدد عدد طرق سحب البطاقات الخمس. 10,000; $\frac{1}{800}$ a. 2,598,960

b. أوجد احتمالات وجود ترتيب يضم 3 بطاقات لعب فئة الكبة وبطاقتين لعب فئة السباتي. $\frac{5577}{649,740}$

c. أوجد احتمالات وجود ترتيب يكون كله بطاقات وجوه. = حوالي 0.9%

d. أوجد احتمال وجود ترتيب يضم بطاقة لعب واحدة فئة الآس وولدين وملكين.

$\frac{3}{54,145} = \text{حوالي } 0.006\%$ $\frac{66}{216,580} = 24c. = \text{حوالي } 0.03\%$

يوجد جهاز لبيع كرات العلكة يضم 7 أحمر (R) و8 برتقالي (O) و9 قرمزي (P) و7 أبيض (W) و5 أصفر (Y). قام ماجد بشراء 3 كرات علكة. أوجد كل احتمال ممكن، مع افتراض أن الجهاز يوزع 3 علكات بشكل عشوائي مرة واحدة.

25. $P(3 R)$ $\frac{1}{204}$

26. $P(2 W \text{ and } 1 P)$ $\frac{9}{340}$

27. $P(1 R \text{ and } 2 N)$ $\frac{7}{255}$

28. $P(1 N \text{ and } 2 Y)$ $\frac{4}{357}$

29. $P(2 R \text{ and } 1 Y)$ $\frac{1}{68}$

30. $P(1 P, 1 W, \text{ and } 1 R)$ $\frac{21}{340}$

31. الحواسيب توجد لوحة دائرة تضم 20 رقاقة كيبوير تحتوي على 4 رقاقات معيبة. في حالة اختيار ثلاث رقاقات بكل عشوائي، فما هو احتمال أن تكون الرقاقات الثلاث معيبة؟ $\frac{1}{285} = \text{حوالي } 0.4\%$

32. الكتب يمتلك سيف اثني عشر كتابًا لم يقرأهم بعد على الرف الخاص به، منهم سبع روايات وخمس سير ذاتية. فإذا كان يرغب في أخذ أربعة كتب معه في عطلة، فما هي احتمالات أن يختار روايتين وسيرتين ذاتيتين بشكل عشوائي؟ $\frac{14}{33} = \text{حوالي } 42.4\%$

33. المنح الدراسية ثم اختيار 12 طالبًا و16 طالبة للتأهل المتساوي لـ 6 منح للدراسة بالكلية. وفي حالة الاختيار العشوائي للطلاب على المنح، فما هو احتمال فوز 3 طلاب و3 طالبات؟ $\frac{880}{2691} = \text{حوالي } 32.7\%$

3 التقييم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-33 لتقييم مدى فهم الطلاب كيفية حساب عدد نتائج تجربة ما وكيفية استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 9-20.

قد يواجه بعض الطلاب صعوبات في تحديد القيمة n والقيمة r. ذكّر الطلاب بأن n تمثل عدد الكائنات، ولذا فإنها ستكون العدد الأكبر، العدد المكتوب أسفل يسار P أو C. أكد على أن القيمة الأكبر r دائمًا تتضمن القيمة n. ينبغي لهم ملاحظة أن القيمة التي أسفل يمين كل من P أو C في هذه التمرينات مساوية للقيمة التي أسفل اليسار أو أصغر منها.

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

ضع في حقيبة بطاقات ورقية مكتوبًا عليها الأرقام من 2 إلى 9. اطلب من كل طالب سحب بطاقة ورقية من الحقيبة. يمثل كل رقم عدد الكتب المختلفة المطلوب ترتيبها على الرف. اطلب من كل طالب أن يخبرك بعدد الطرق التي يمكن بها ترتيب عدد كتبه.

الإحصاء

الهدف

1 المقاييس المركزية ومقاييس التشتت الإحصاء هو علم تجميع البيانات وتحليلها وتفسيرها وتقديمها. ويعرف فرع علم الإحصاء الذي يركز على تجميع البيانات وتلخيصها وعرضها بـ إحصاءات وصفية. ويطلق على البيانات الموجودة في متغير واحد، أو نوع بيانات واحد **بيانات أحادية المتغير**. ويمكن وصف هذه البيانات عن طريق **مقاييس النزعة المركزية** والتي تمثل البيانات المركزية أو المتوسطة. وتعد مقاييس النزعة المركزية الثلاثة الأكثر شيوعاً هي الوسيط الحسابي والمتوسط والمنوال.

المجتمع الإحصائي هو المجموعة الكاملة التي تضم الأفراد أو الكائنات أو الأحداث الهامة المطلوب تحليلها. **والعينة** مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي. ونستخدم صيغ المتوسط الحسابي \bar{x} لتمثيل قيم البيانات في العينة أو المجتمع الإحصائي. و Σx لتمثيل مجموع قيم x . و n لتمثيل عدد قيم x . و μ لتمثيل المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي. و \bar{x} لتمثيل المتوسط الحسابي للعينة.

المفهوم الأساسي مقاييس النزعة المركزية

المتوسط الحسابي هو مجموع الأعداد في مجموعة من البيانات مقسوماً على عدد البيانات	المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي
$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\mu = \frac{\Sigma x}{n}$
الوسيط هو العدد المتوسط في مجموعة بيانات عندما يتم ترتيب البيانات وفق ترتيب رقمي أو هو المتوسط الحسابي لقيمتين متوسطتين	
المنوال هو العدد أو الأعداد الأكثر تكراراً في مجموعة من البيانات	

مثال 1 أوجد مقاييس النزعة المركزية

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات 4، 13، 20، 2، 3، 5، 15، 10، 12، 7، 14.

المتوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{14 + 7 + 12 + 4 + 13 + 20 + 2 + 3 + 5 + 15 + 10 + 4}{12} \approx 9.08$

الوسيط $\frac{7 + 10}{2} = 8.5$

المنوال القيمة الأكثر تكراراً في المجموعة هي 4. لذا فإن المنوال هو 4.

أما مقاييس التشتت أو التغير. فتصف توزيع مجموعة بيانات. وتوجد ثلاثة مقاييس للتشتت، المدى والتباين والانحراف المعياري. تستخدم صيغ تباين المجتمع الإحصائي σ^2 والانحراف المعياري σ الرمز $\mu - x$ لتمثيل الانحراف أو فرق قيمة x من المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي و $\Sigma(x - \mu)^2$ لتمثيل مجموع مربعات هذه الانحرافات. ويستخدم ترميز مشابه لتباين العينة s^2 والانحراف المعياري s .

المفهوم الأساسي مقاييس التشتت

المدى الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة بيانات	تباين المجتمع الإحصائي $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}$	تباين العينة $s^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1}$
التباين المتوسط الحسابي لمربعات الانحرافات عن المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \mu)^2}{n}}$	الانحراف المعياري للعينة $s = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n - 1}}$
الانحراف المعياري المقدار المتوسط الذي عنده تنحرف العناصر الفردية عن المتوسط الحسابي لجميع البيانات		

1 إيجاد المقياس المركز ومقياس التشتت.

2 تنظيم البيانات الإحصائية.

مفردات جديدة

إحصاء (statistics)	بيانات أحادية المتغير (univariate data)
مقاييس النزعة المركزية (measure of central tendency)	مقاييس التشتت (measures of spread or variation)
مجموع إحصائي (population)	عينة (sample)
المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال (mean, median, mode)	مقاييس التشتت (variance)
مقاييس التشتت (measures of spread or variation)	الانحراف المعياري (standard deviation)
المدى (range)	التوزيع التكراري (frequency distribution)
التباين (variance)	الفئة (أو الفاصل) (class or interval)
الانحراف المعياري (standard deviation)	النزعة المركزية (relative frequency)
التكرار النسبي (relative frequency)	عرض الفئة (cumulative frequency)
التكرار التكراري (cumulative relative frequency)	قيمة الربع (quartiles)
التكرار التكراري النسبي (cumulative relative frequency)	المتوسط الحسابي (five-number summary)
قيمة الربع (quartiles)	المتوسط الحسابي (five-number summary)
المتوسط الحسابي (five-number summary)	المتوسط الحسابي (five-number summary)
المتوسط الحسابي (five-number summary)	المتوسط الحسابي (five-number summary)

نصيحة دراسية

المجتمع الإحصائي مقابل العينة اكتشف علم الإحصاء أن استخدام عينة بيانات لتقريب مقاييس التشتت لمجتمع سكاني دائماً ما يقلل من حسابات هذه المقاييس. ولتصحيح هذا الخطأ، تستخدم صيغ تباين العينة والانحراف المعياري النسبة على $n - 1$ بدلاً من n .

P32 | الدرس 0-8

1 التركيز

التخطيط الرأسي

الدرس 0-8 إيجاد مقياس المركز التشتت الانتشار. تنظيم البيانات الإحصائية.

بعد الدرس 0-8 تعرف على أشكال التوزيعات لتحديد إحصائيات الملخص المطلوبة.

2 التدريس

1 مقياس المركز ومقاييس التشتت

المثال 1 يوضح كيفية إيجاد مقاييس النزعة المركزية لمجموعة بيانات. **المثال 2** يوضح كيفية إيجاد مقاييس التشتت لمجموعة بيانات. **المثال 3** يوضح كيفية مقارنة مجموعات بيانات باستخدام مقاييس التشتت.

مثال إضافي

1 أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات 8، 14، 6، 8، 12، 9، 8، 3، 20، 1.

التركيز على المحتوى الحسابي

المجتمعات الإحصائية قد يكون المجتمع الإحصائي نهائياً أو لا نهائياً. من أمثلة المجتمع الإحصائي اللانهائي إجمالي عدد مرات إلقاء قطعة نقد معدنية حيث من المحتمل أن يتم خلال مدة زمنية غير محدودة. تمثل أي مجموعة حقيقية من عمليات إلقاء قطعة نقد معدنية عينة مأخوذة من هذا المجتمع الإحصائي اللانهائي.

نصائح للمعلمين الجدد

الرموز قبل بدء الدرس، اطلب من الطلاب مراجعة الحروف اليونانية التي تستخدم في التعبير عن المقاييس المختلفة.

Σ سيغما (حرف كبير)

σ سيغما (حرف صغير)

μ مو (حرف صغير)

نصيحة دراسية

التقريب يجب تقريب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري إلى مكان عشري واحد آخر غير البيانات الأصلية. لتجنب وجود خطأ بالتقريب، قرب فقط الإجابات النهائية. تجنب استخدام قيمة مقربة لتنفيذ عمليات حسابية إضافية.

مثال 2 إيجاد مقاييس التشتت

فيما يلي درجات اختبار فصل يضم 25 طالبًا.

a. أوجد مقاييس التشتت للفصل بأكمله.

المدى القيمة العظمى - القيمة الصغرى
 $8 = 2 - 10 =$

التباين أوجد المتوسط الحسابي للبيانات.

المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sum x}{n} \\ &= \frac{7 + 8 + \dots + 10 + 10}{25} \quad \sum x = n \text{ هو مجموع قيم البيانات و } n = 25 \\ &= 7.44 \text{ نحو } 7.4 \quad \text{بسط}\end{aligned}$$

استخدم متوسطًا حسابيًا غير مقرب للعثور على التباين.

تباين المجتمع الإحصائي

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x - \mu)^2}{n} \\ &= \frac{\sum (x - 7.44)^2}{25} \\ &= \frac{(7 - 7.44)^2 + (8 - 7.44)^2 + \dots + (10 - 7.44)^2}{25} \quad \text{استبدال} \\ &= 4.5664 \text{ نحو } 4.6 \quad \text{حول إلى أبسط صورة}\end{aligned}$$

الانحراف المعياري خذ الجذر التربيعي للتباين.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{4.5664} \\ &\approx 2.1\end{aligned}$$

b. استخدم العمود الأخير من درجات الاختبار للعثور على مقاييس التشتت لعينة الفصل.

المدى العينة هي 10, 2, 5, 6, 9. ومدى العينة هو 2 - 10 أو 8.

التباين المتوسط الحسابي للعينة هو $\bar{x} = \frac{9 + 6 + 2 + 5 + 10}{5} = 6.4$

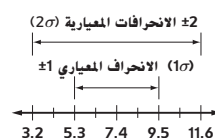
تباين العينة

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1} \\ &= \frac{\sum (x - 6.4)^2}{5 - 1} \\ &= \frac{(9 - 6.4)^2 + (6 - 6.4)^2 + (2 - 6.4)^2 + (5 - 6.4)^2 + (10 - 6.4)^2}{4} \quad \text{استبدال} \\ &= 10.3 \quad \text{حول إلى أبسط صورة}\end{aligned}$$

الانحراف المعياري

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{10.3} \\ &\approx 3.2\end{aligned}$$

في مجموعة محددة من البيانات، تقع أغلبية البيانات ضمن قيمة انحراف معياري واحدة للمتوسط الحسابي، وتقع جميع القيم تقريبًا ضمن قيمتين للانحراف المعياري. كانت لدرجات الاختبار في المثال 2a متوسط حسابي حوالي 7.4 وانحراف معياري حوالي 2.1. ويمكن تمثيل هذا الأمر بيانيًا.



وفي حالة مقارنة درجات الاختبار بدرجات أخرى في جميع أنحاء الدولة لاختبار قومي، فسيتم اعتبار هذه الفئة مجرد عينة لجميع الطلاب الذين خضعوا للاختبار. يجب حساب عينة المتوسط الحسابي \bar{x} وعينة انحراف معياري s .

وعند مقارنة مجموعات بيانات، يكون من المهم تحليل مقياس النزعة المركزية و مقياس التشتت لكل توزيع. ويعد هذا الأمر مهمًا بسبب إمكانية وجود مجموعتي بيانات لهما نفس المتوسط الحسابي ولكن مع امتلاك مقياسي التشتت مختلفين.

مثال إضافي

2 فيما يلي أعمار مجموعة من 20 متطوعًا.

42	26	18	20	25
30	29	56	38	34
21	28	50	40	30
18	18	20	19	38

a. أوجد التشتت الانتشار

لمجموعة المتطوعين
 بأكملها. **المدى: 38، التباين: 117.2، الانحراف المعياري: 10.8**

b. استخدم الصف الأخير من الأعمار لإيجاد التشتت الانتشار لعينة من المتطوعين. **المدى: 20، التباين: 74.8، الانحراف المعياري: 8.6**

مثال إضافي

3 الجولف يمارس صديقان للعب

نحو 10 حفرات. نقاطهما في كل حفرة كما يلي. ما الصديق الذي عنده تباين أكبر في النقاط؟

مراد	4	5	3	4	4	3	5	4	4	4
عزت	3	5	3	3	4	3	5	3	4	3

مراد: المتوسط الحسابي: 4؛ الوسيط: 4؛ المدى: 2؛ الانحراف المعياري: ≈ 0.63 عزت: المتوسط الحسابي: 3.6؛ الوسيط: 3؛ المدى: 2؛ الانحراف المعياري: $0.63 > 0.8$. لذا هناك تباين أكبر في نقاط عزت.

2 تنظيم البيانات

المثال 4 يعرض كيفية إجراء التوزيع التكراري والتوزيع التكراري التراكمي. المثال 5 يوضح كيفية إنشاء مخطط الصندوق ذي العارضين لمجموعة بيانات.

مثال إضافي

4 الطول طول 20 طالبًا كما هو

موضح أدناه بوحدة البوصة.

59	66	62	61	60
72	72	66	60	68
60	71	70	68	63
66	68	65	66	75

a. قم بعمل جدول توزيع يوضح التكرار والتكرار النسبي للبيانات.

الحدود الفصل	التكرار	التكرار النسبي
59-60	1	0.05
61-62	14	0.70
63-66	5	0.25

b. كَوّن مدرجات إحصائية لكل من التوزيع التكراري والتوزيع التكراري النسبي. ثم قارن بين التمثيلات البيانية.

نصيحة دراسية

حدود الفئة عندما يمكن أن تكون قيم البيانات فيها غير أعداد صحيحة مثل 19.2. يتم استخدام حدود الفئة لتجنب وجود فجوات في البيانات. يجب أن تتضمن حدود الفئات قيمة مكان إضافي غير حد الفئة وتنتهي بـ 5 في المثال 4. ستكون حدود الفئة للفصل الأول والثاني من 9.5 إلى 19.5 ومن 19.5 إلى 29.5.



الربط بالحياة اليومية

لعب مايك لوديش في بطولة الدوري الوطني الأمريكي لكرة القدم أكثر من أي شخص آخر. حيث لعب أربع مرات مع فريق يافلو بيلز وممرتين مع فريق دينفر بروونكوس.

المصدر: حول: كرة القدم

P34 | الدرس 8-0 | الإحصاء

مثال 3 مقارنة مجموعات البيانات مستعينًا بمقاييس التشتت

الصحة معدل التمثيل الغذائي هو النسبة التي يستهلك عندها الجسم الطاقة. وتقاس بالسرعات الحرارية لكل 24 ساعة. وخلال دراسة أجريت حول النظام الغذائي والتدريبات الرياضية، تمت مراقبة معدلات التمثيل الغذائي لمجموعتين مختلفتين. ما المجموعة التي تمتلك انحرافًا معياريًا أكبر في معدلات التمثيل الغذائي؟

المجموعة 2	1,498	1,589	1,634	1,702	1,629
	1,621	1,629	1,589	1,592	1,603
	1,573	1,476	1,613	1,585	1,582
	1,723	1,619	1,615	1,601	1,607

المجموعة 1	1,507	1,619	1,731	1,468	1,533
	1,744	1,588	1,675	1,552	1,475
	1,593	1,745	1,523	1,590	1,764
	1,429	1,604	1,574	1,708	1,656

أدخل البيانات إلى L1 و L2 على حاسبة الرسوم البيانية. اضغط على [STAT] وحدد 1-Var Stats من القائمة CALC. واضغط على [2nd] أو [L1] [2nd] لتحديد بيانات المجموعة 1 أو المجموعة 2. واضغط على [ENTER]. سجل قيم المتوسط الحسابي للعينة \bar{x} ، والمتوسط Med، والانحراف المعياري Sx. واستخدم $\max - \min$ لحساب المجال.

المجموعة 1 المتوسط الحسابي = 1,603.9، المتوسط الحسابي = 1,604، المدى = 335، الانحراف المعياري = 100.2، الوسيط = 1,691.5 أو 1,429، 1,591.5
المجموعة 2 المتوسط الحسابي = 1,604، المدى = 247، الانحراف المعياري = 54.6، الوسيط = 1,723 أو 1,476، 1,605

على الرغم من أن المقياس المركزي يعتبر قريبًا منطقيًا. إلا أن الانحراف المعياري الذي يساوي 100.2 للمجموعة 1 أكبر بكثير من قيمة المجموعة 2 التي تصل إلى 54.6. بعد مدى المجموعة 1 أكبر بكثير أيضًا من مدى المجموعة 2. لذا، يوجد تباين أكبر في معدلات التمثيل الغذائي لدى المجموعة 1.

2 تنظيم البيانات

يمكن تنظيم البيانات في جدول يطلق عليه **التوزيع التكراري** لإظهار معدل تكرار ظهور كل قيمة بيانات أو مجموعة من قيم البيانات. ويطلق عليها **فئة** أو **فاصل زمني**. في مجموعة البيانات. بعد **التكرار النسبي** لفئة هو نسبة البيانات ضمن الفئة إلى جميع البيانات. بعد **التكرار التراكمي** لفئة هو مجموع معدلات التكرار لجميع الفئات السابقة. بعد **التكرار النسبي التراكمي** لفئة هو نسبة التكرار التراكمي للفئة إلى جميع البيانات.

ويمكن وصف كل فئة بطرق متعددة. **عرض الفئة** هو مجال قيم كل فئة. بعد حد الفئة الأدنى هو أقل قيمة يمكن أن تنتمي إلى فئة محددة، وحد الفئة الأعلى هو أعلى قيمة يمكن أن تنتمي إلى فئة محددة.

مثال 4 من الحياة اليومية التوزيع التكراري

كرة القدم فيما يلي نقاط الفوز لأول 42 مسابقة الكأس.

35 33 16 23 16 24 14 24 16 21 32 27 35 31 27 26 27 38 38 46 39
42 20 55 20 37 52 30 49 27 35 31 34 23 34 20 48 32 24 21 29 17

a. أنشئ جدول توزيع يوضح التكرار والتكرار النسبي للبيانات.

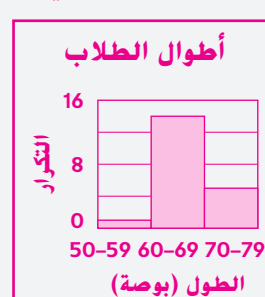
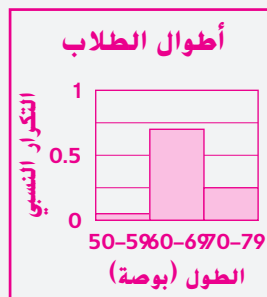
الخطوة 1 حدد عدد الفئات وفاصلًا زمنيًا مناسبًا للفئة. تتراوح النقاط بين 14 إلى 55. لذا استخدم 5 فئات مع فاصل زمني لفئة يصل إلى 10 نقاط. أنشئ جدولًا لسرد حدود الفئات. ابدأ بـ 10 نقاط وانته بـ 59 نقطة.

الخطوة 2 سجل البيانات. ثم احسب معدلات التكرار النسبية.

الدرجة الفائقة	التسجيلات	التكرار	التكرار النسبي
19-20	III	5	$\frac{5}{42} = 0.12$ نحو
29-30	IIII IIII	16	$\frac{16}{42} = 0.38$ نحو
39-40	IIII IIII IIII	15	$\frac{15}{42} = 0.36$ نحو
49-50	IIII	4	$\frac{4}{42} = 0.10$ نحو
59-60	II	2	$\frac{2}{42} = 0.05$ نحو
		42	

إجابة إضافية (مثال إضافي)

4b.



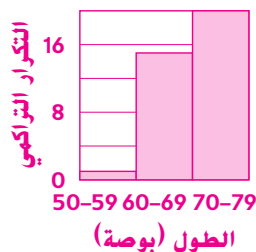
الشكل الإجمالي للمدرجات الإحصائية متشابه. الاختلاف الوحيد يكمن في المقياس الرأسي.

مثال إضافي

مثال إضافي 4 (يتبع)

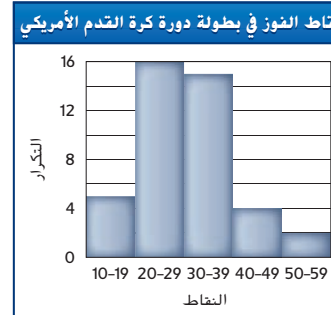
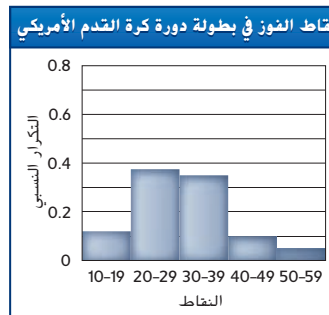
- c. كَوّن توزيع تكراريًا تراكميًا للبيانات. ثم حدد التوزيع التكراري النسبي التراكمي. انظر أسفل هامش الجدول.
- d. كَوّن مدرجًا إحصائيًا للتوزيع التكراري التراكمي. ثم قارن التمثيل البياني بالتمثيل البياني للتوزيع التكراري.

أطوال الطلاب



يوضح شكل المدرج الإحصائي للتكرار التراكمي وجود نمط تزايد. هناك زيادة كبيرة من عدد الطلاب الذين يبلغ ارتفاعهم من 50 إلى 59 بوصة إلى عدد الطلاب الذين يبلغ طولهم من 60 إلى 69 بوصة.

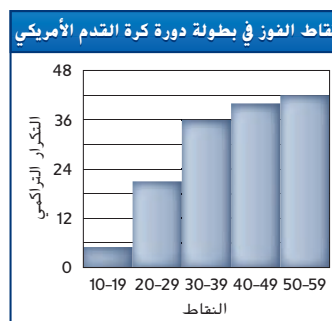
b. أنشئ مدرجات تكرارية لكل من التوزيع التكراري وتوزيع التكرار النسبي. ثم قارن بين التمثيلات البيانية.



الأشكال الإجمالية للمدرجات التكرارية متشابهة. الاختلاف الوحيد يكمن في المقياس الرأسي.

c. أنشئ توزيع تكراري تراكمي للبيانات. ثم حدد توزيع التكرار النسبي التراكمي.

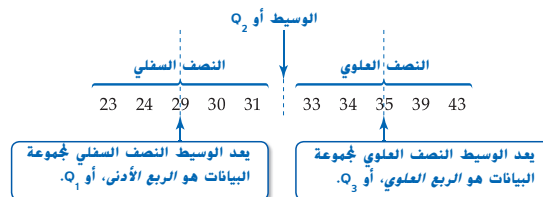
الدرجة الفائقة	التكرار	التكرار التراكمي	التكرار التراكمي النسبي
19-10	5	5	$\frac{5}{42}$ أو نحو 0.12
29-20	16	5 + 16 أو 21	$\frac{21}{42}$ أو 0.50
39-30	15	21 + 15 أو 36	$\frac{36}{42}$ أو نحو 0.86
49-40	4	36 + 4 أو 40	$\frac{40}{42}$ أو نحو 0.95
59-50	2	40 + 2 أو 42	$\frac{42}{42}$ أو 1



d. أنشئ مدرجًا تكراريًا لتوزيع التكرار التراكمي. ثم قارن التمثيل البياني بالتمثيل البياني للتوزيع التكراري.

يوضح شكل المدرج الإحصائي للتكرار التراكمي وجود نمط تزايد. وتوجد زيادة كبيرة في عدد الفرق التي تحقق من 10 إلى 19 نقطة بالنسبة لعدد الفرق التي تحقق من 20 إلى 39 نقطة. ثم يوجد تغير قليل للغاية في عدد الفرق التي تحقق 40 نقطة أو أكثر.

في مجموعة بيانات، تعد **القيم الربعية** هي قيم تعمل على تقسيم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.



P35

إجابة إضافية (مثال إضافي)

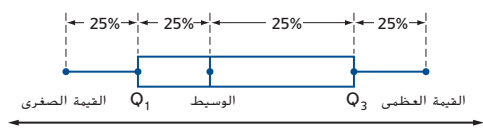
4c

الحدود الفصل	التكرار	التكرار التراكمي	التكرار التراكمي النسبي
59-50	1	1	0.05
69-60	14	15	0.75
79-70	5	20	1

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر طالبين للعمل من خلال مثال أمام الفصل. اطلب من أحد الطلاب شرح كيفية حساب التوزيع التكراري واطلب من طالب آخر شرح كيفية إنشاء مدرج إحصائي من هذا التوزيع.

إن الملخص المكون من خمسة أعداد هذا، والذي يتضمن القيمة الصغرى والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والقيمة العظمى لمجموعة بيانات، يوفر طريقة عديدة أخرى لتخصيص مجموعة البيانات. ويمكن وصف الملخص المكون من خمسة أعداد بشكل مرئي باستخدام مخطط الصندوق ذي العارضين كما تم التوضيح.



ويطلق على الفرق بين الربع الأعلى والربع الأدنى **المدى الرباعي**. **القيم المتطرفة** هي بيانات تكون أكبر بمقدار مرة ونصف من المدى بين الربعين فوق الأرباع العليا والدنيا.

نصيحة دراسية

مخطط الصندوق ذو العارضين لاحظ أن الصندوق في مخطط الصندوق ذي العارضين يمثل نسبة 50% من البيانات الوسطى. بينما يمثل العارضان نسبة 25% العلوية والسفلية من البيانات.

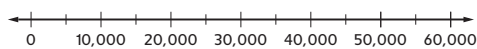
مثال من الحياة اليومية 5 مخططات الصندوق ذي العارضين

تعليم فيها يلي عمليات التسجيل بجامعة الإمارات. اعرض البيانات باستخدام مخطط صندوق ذي عارضين.

الكلية	تسجيل فصل خريف 2007
جامعة خليفة	52,568
جامعة زايد	29,315
جامعة عجمان	23,007
الجامعة الأمريكية بدبي	22,819
الجامعة الأمريكية بالشارقة	21,089
جامعة أسيا الأمريكية	19,767
جامعة الإمارات العربية المتحدة	18,619
جامعة السوربون بأبو ظبي	16,151
جامعة خليفة للعلوم والتكنولوجيا والبحوث	15,968
كلية الفجيرة	15,038
الجامعة البريطانية في دبي	13,595
جامعة ولوجو في دبي	3,699
جامعة السوربون بأبو ظبي	2,022

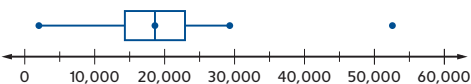
المصدر: المركز القومي للإحصائيات التعليمية

الخطوة 1 أوجد القيم العظمى والصغرى. وارسم خط أعداد يغطي مدى البيانات. ثم أوجد المتوسط الحسابي والربع الأعلى والربع الأدنى. حدد هذه النقاط والقيم القصوى فوق خط الأعداد.



الخطوة 2 أوجد أي قيم متطرفة. يبلغ المدى الزيعي $22,913 - 14,316.5$ أو $8,596.5$. ولا توجد قيم بيانات أصغر من $14,316.5 - 1.5(8,596.5) = 3,699$ أو $22,913 + 1.5(8,596.5) = 35,807.75$. توجد قيمة بيانات واحدة أكبر من $22,913$ أو $14,316.5$ من القيم المتطرفة.

الخطوة 3 ارسم مربعا حول الربعين الأعلى والأدنى. وخط رأسي عبر الوسيط. واستخدم المستقيمات الأفقية أو مستقيمات طولية لتوصيل القيمة الأقل والقيمة الأكبر التي لا تعد قيمة متطرفة. القيمة الأكبر التي لا تعد قيمة متطرفة هي 29,315.



نصيحة دراسية

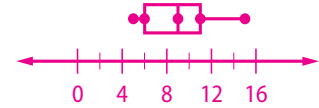
ترتيب البيانات في المثال 5. لاحظ أن البيانات الموجودة في الجدول مقدمة حسب ترتيب تنازلي. وفي حالة عدم سرد مجموعة البيانات حسب الترتيب التصاعدي أو التنازلي، فيجب التأكد من ترتيب البيانات قبل العثور على قيم المتوسط والربع الأعلى والربع الأدنى.

مثال إضافي

5 تقارير قام طلاب في مادة الأحياء

المتقدمة بكتابة تقارير مختبرية. عدد الصفحات في تقاريرهم موضح أدناه. اعرض البيانات باستخدام مخطط صندوق ذي عارضين.

5, 5, 6, 6, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 12, 12, 15



إجابات إضافية

1. المتوسط الحسابي: 28، الوسيط: 28.5، المنوال: 31
2. المتوسط الحسابي: 73.5، الوسيط: 73، المنوال: 87
3. المتوسط الحسابي: 8.5، الوسيط: 8.5، قيم المنوال: 6 و 11
5. المدى: 12.75 درهماً، التباين: ≈ 16.86 درهماً، الانحراف المعياري: ≈ 4.11 درهماً
6. المدى: 569، التباين: $\approx 49,793.3$ ، الانحراف المعياري: ≈ 223.1
7. المدى: 1.9، التباين: ≈ 0.54 ، الانحراف المعياري: ≈ 0.73
8. المدى: 85، التباين: ≈ 640.4 ، الانحراف المعياري: ≈ 25.31
- 9a. المدى: 14، التباين: ≈ 18.1 ، الانحراف المعياري: ≈ 4.3
- 9b. المدى: 12، التباين: ≈ 21.34 ، الانحراف المعياري: ≈ 4.62

10. قيم انحراف العينة المعياري للعلامة التجارية A والعلامة التجارية B تبلغ 49.2 و 39.9، على الترتيب. ولذا، تشير البيانات إلى وجود تباين أكبر في مدد صلاحية العلامة التجارية A.
11. قيم انحراف العينة المعياري للمتجر 1 والمتجر 2 تبلغ 8.94 درهماً و 6.61 درهماً، على الترتيب. ولذا، يوجد تباين أكبر في أسعار المصورين الرسميين في المتجر 1.

الاختبار البعدي

استخدام الاختبار البعدي

استخدم الاختبار البعدي بعد الوحدة 0 لتقييم مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم بعدما قدمت الدروس في الوحدة 0.

إجابات إضافية

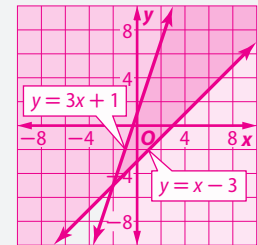
29. كثيرة لا نهائية؛ متسقة وتابعة

30. (4, -18)؛ متسقة ومستقلة

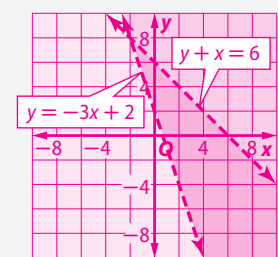
31. لا يوجد حل؛ غير متسق

32. (1/3, -1/2, 1/4)؛ متسق وتابع

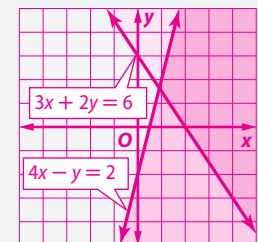
33.



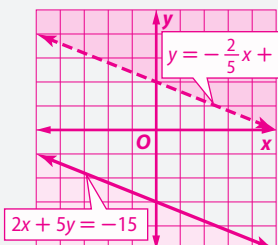
34.



35.



36.



ليس لها أي حلول

استخدم ترميز المجموعة لكتابة عناصر كل مجموعة. ثم حدد ما إذا كانت العبارة المذكورة حول المجموعة صواب أم خطأ.

خطأ: $M = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$

1. L هي مجموعة أعداد طبيعية مضروبة في 5 وأصغر من 50. $12 \in M$

2. S مجموعة من الأعداد الأصغر من -40 والأكبر من -50. $-49 \in S$

افتراض أن $D = \{1, 3\}$ ، و $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، و $B = \{0, 1, 2, 3\}$ ، و $F = \{0, 10\}$ و $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

3. $D \cap C = \{1, 3, 5\}$ 4. $D \cap F = \emptyset$

5. $E \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ 6. $D \cup F = \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

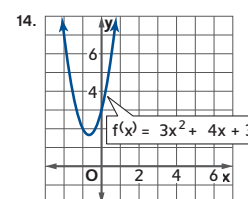
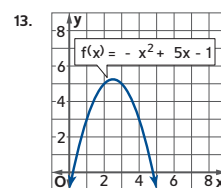
حوّل إلى أبسط صورة.

7. $(1 + 4i) + (-2 - 3i) = -1 + i$ 8. $(2 + 4i) - (-1 + 5i) = 3 - i$

9. $(6 + 7i) - (-5 + 3i) = 11 + 4i$ 10. $(-1 + i) - (-6 + 2i) = 5 - i$

11. $\frac{2 + 3i}{1 - 3i} = \frac{7}{10} + \frac{9}{10}i$ 12. $\frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

حدد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم صغرى. ثم أوجد القيمة العظمى أو الصغرى، واذكر مجال الدالة ومداها.



13-14. انظر ملحق إجابات الوحدة 0.

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

15. $x^2 - x - 72 = 0$ -8, 9 16. $x^2 - 6x + 4 = 0$ $3 \pm \sqrt{5}$

17. $2x^2 - 5x + 4 = 0$ $\frac{5 \pm \sqrt{7}i}{4}$ 18. $2x^2 - x - 3 = 0$ -1, 3/2

19. ترميز ترفيهي ترتبط الغنية الحالية C والقيمة الأصلية v لسيارة ترفيهية من خلال العلاقة $C = v(1 - r)^n$ حيث r هو معدل الاستهلاك السنوي و n هو عدد السنوات. فإذا كانت الغنية الأصلية للسيارة الترفيهية هي 47,500 AED، فما قيمة السيارة بعد 75 شهراً مع معدل استهلاك سنوي يصل إلى 15%؟ 17201.32 AED

بسّط كل تعبير مما يلي.

20. $\sqrt[6]{x^{18}y^{20}} \cdot \sqrt[3]{x^3y^3} = x^5y^5$ 21. $\sqrt[3]{a^{10}b^7} \cdot a^2b^5\sqrt[3]{b^2} = a^{10}b^9$

22. $\sqrt{16t^8u^{16}} = 4t^4u^4$ 23. $\sqrt[3]{243x^{10}y^{25}z^6} = 3x^2y^5z^2\sqrt[3]{x^2y^5z^2}$

P38 الفصل 0 | الاختبار البعدي

حوّل إلى أبسط صورة.

24. $\frac{y^{\frac{3}{4}}x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{12}}} = y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{2}{3}}$ 25. $\sqrt[3]{512x^{10}y^{28}} \cdot 2xy^3\sqrt[3]{xy} = 8x^4y^9\sqrt[3]{xy}$

26. $\sqrt[4]{m^{21}n^{18}} = m^5n^4\sqrt[4]{mn^2}$ 27. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}$

28. الوظائف تعمل مروة كجليسة أطفال في 10 AED في الساعة ولبلاً مقابل 15 AED في الساعة فإذا عملت 5 ساعات وكسبت 60 AED، فكم عدد الساعات التي أمضتها كجليسة أطفال خلال النهار؟ وكم عدد الساعات ليلاً؟

3 أيام، ليلتان

أوجد حل كل من أنظمة المعادلات التالية. اذكر ما إذا كان النظام متوافقاً ومستقلاً، أم متوافقاً وتابعاً، أم غير متوافق. 29-32. انظر الحاشية.

29. $9x - 4.5y = 15$ 30. $5x + y = 2$
 $6x - 3y = 10$ $x - y = 22$

31. $9x - 3y + 12z = 39$ 32. $6x + 2y + 4z = 2$
 $12x - 4y + 16z = 54$ $3x + 4y - 8z = -3$
 $3x - 8y + 12z = 23$ $-3x - 6y + 12z = 5$

أوجد حل كل من أنظمة المتباينات التالية. اذكر ما إذا كان النظام متوافقاً، فاذكر أن ليس لها أي حلول. 33-36. انظر الحاشية.

33. $y \geq x - 3$ 34. $y + x < 6$
 $y \leq 3x + 1$ $y > -3x + 2$

35. $3x + 2y \geq 6$ 36. $2x + 5y \leq -15$
 $4x - y \geq 2$ $y > -\frac{2}{5}x + 2$

أوجد حل كل مما يلي:
 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -8 & 4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -7 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

37. $A + B + C$ 38. $B - C$ 39. $2A - B$

أوجد كل تبديل أو توافق.

40. $_{10}C_3 = 120$ 41. $_{10}P_3 = 720$ 42. ${}_6P_6 = 720$

43. ${}_6C_6 = 1$ 44. ${}_8P_4 = 1680$ 45. ${}_8C_4 = 70$

46. البطاقات ثم سحب أربع بطاقات سحباً عشوائياً من مجموعة أوراق لعب قياسية تضم 52 ورقة لعب. أوجد كلاً من الاحتمالات التالية.

a. (1) الآس في ورق اللعب و3 ملوك) P = 270725/16
b. (ورقتان زوجيتان وورقتان وجهان) P = 2508/54145

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل مجموعة من البيانات. ثم أوجد المدى والانحراف المعياري لكل مجتمع إحصائي. 47-48. انظر الحاشية.

47. {1, 1, 1, 2, 2, 3} 48. {0.8, 0.9, 0.4, 0.8, 0.6, 0.8, 0.6}

47. المتوسط الحسابي: ≈ 1.7 ، الوسيط: 1.5،

المنوال: 1، المدى: 2، التباين: ≈ 0.6 ،

الانحراف المعياري: ≈ 0.7

48. المتوسط الحسابي: 0.7، الوسيط: 0.8،

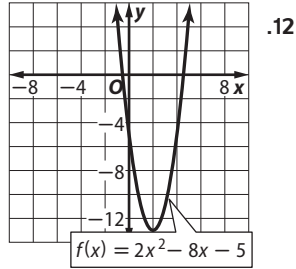
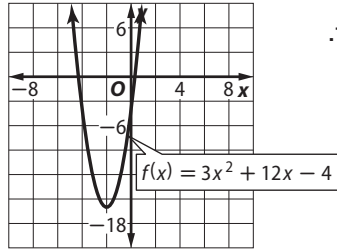
المنوال: 0.8، المدى: 0.5، التباين: ≈ 0.026 ،

الانحراف المعياري: ≈ 0.16

$$37. \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -13 & 11 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$38. \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ -1 & -4 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

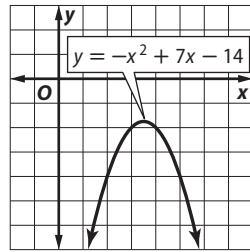
$$39. \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 12 & -6 \\ -22 & -12 \end{bmatrix}$$



52. لنفرض أن x العدد الأول وأن $x - 7$ العدد الآخر.

$$x(7 - x) = 14$$

$$-x^2 + 7x - 14 = 0$$

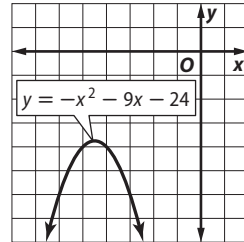


لأن التمثيل البياني للدالة ذات الصلة لا يتقاطع مع المحور الأفقي x . فإن هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية. ولذا، فإن هذا العدد غير موجود.

53. لنفرض أن x العدد الأول وأن $x - 9$ العدد الآخر.

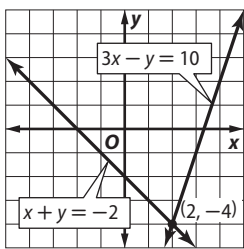
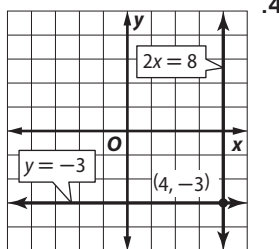
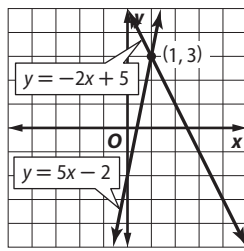
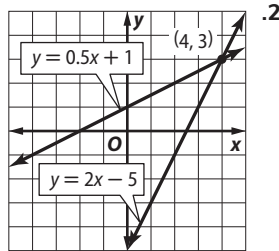
$$x(-9 - x) = 24$$

$$-x^2 - 9x - 24 = 0$$



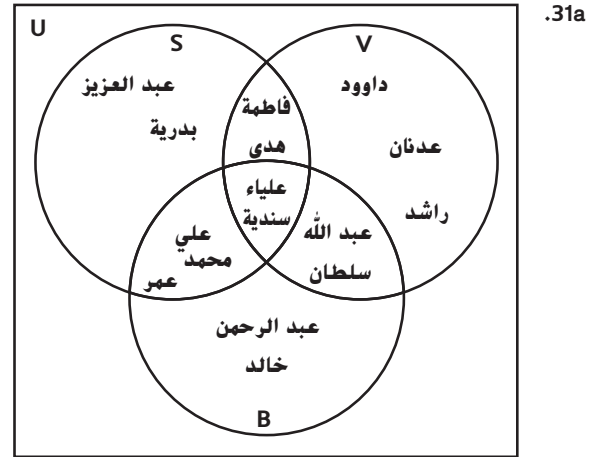
لأن التمثيل البياني للدالة ذات الصلة لا يتقاطع مع المحور الأفقي x . فإن هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية. ولذا، فإن هذا العدد غير موجود.

الصفحة P22، الدرس 0-5



P38A

الصفحة P5، الدرس 0-1

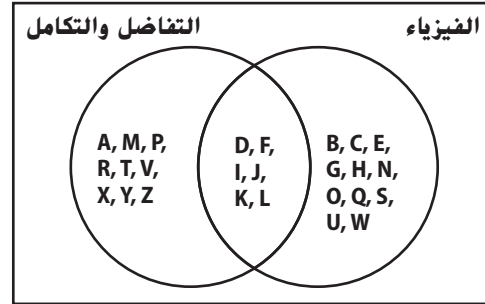


31b. $S \cap V = \{ \text{فاطمة, هدي, علياء, سندية} \}$; هذا يمثل الطالبات اللاتي يلعبن كلاً من كرة القدم والكرة الطائرة.

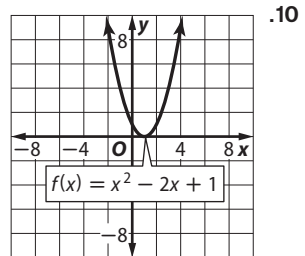
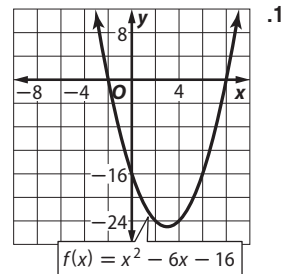
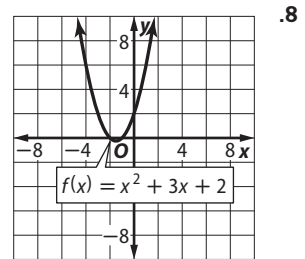
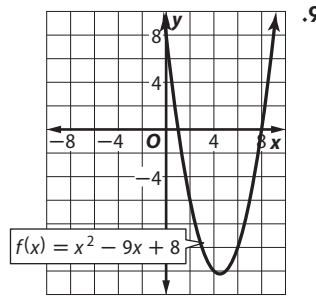
31c. $S' = \{ \text{داوود, عدنان, راشد, عبد الله, سلطان, عبد الرحمن, خالد} \}$; هذا يمثل الطلاب الذين لا يلعبون كرة القدم.

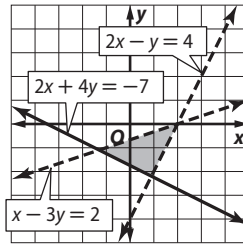
31d. $B \cup V = \{ \text{داوود, عدنان, راشد, عبد الله, سلطان, عبد الرحمن, خالد, فاطمة, هدي, علياء, سندية, علي, محمد, عمر} \}$; هذا يمثل الطلاب الذين يمارسون كرة السلة أو الكرة الطائرة أو كليهما.

32.

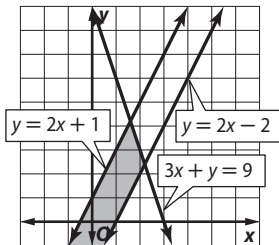


الصفحة P13، الدرس 0-3

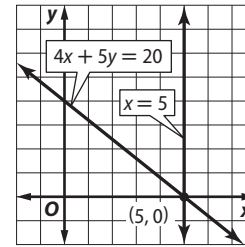




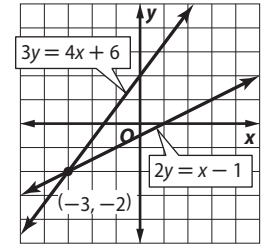
.48



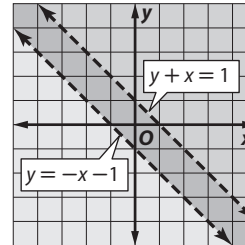
.47



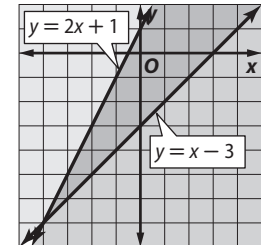
.6



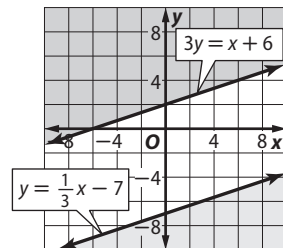
.5



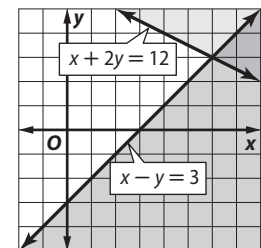
.38



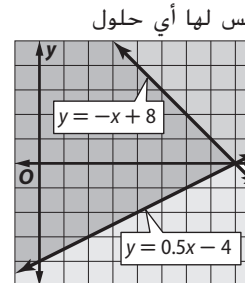
.37



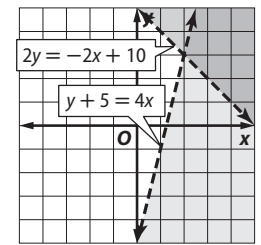
.40



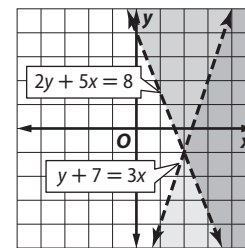
.39



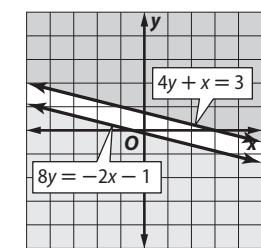
.42



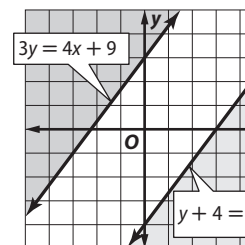
.41



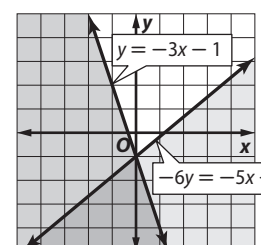
.44



.43



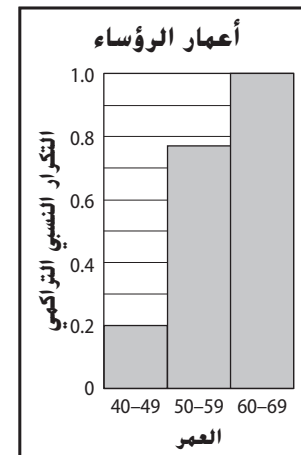
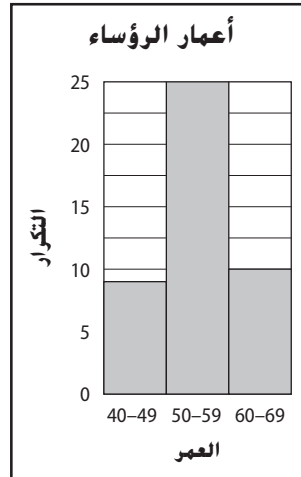
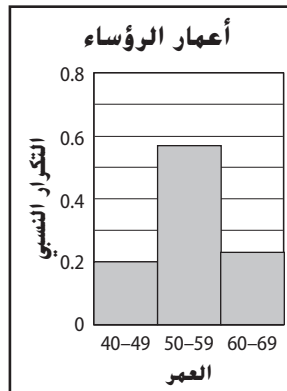
.46



.45

الصفحة P37، الدرس 0-8

.12b



الصفحة P38، الاختبار البعدي

13. قيمة عظمى؛ $(2.5, 5.25)$ ؛ $D = \mathbb{R}$, $R = y \leq 5.25$ ، حيث $y \in \mathbb{R}$

14. قيمة صغرى؛ $(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ ؛ $D = \mathbb{R}$, $R = y \geq \frac{5}{3}$ ، حيث $y \in \mathbb{R}$

تأجيل الإجابة 0 درجة

P38C

		التقويم التشخيصي تدريب سريع، ص 85		الدرس 1-1 وتيرة التقدم: يومان		الاستكشاف وتيرة التقدم: نصف يوم		الدرس 1-2 وتيرة التقدم: يومان		التوسع وتيرة التقدم: نصف يوم			
العنوان		الدوال الأسية والدوال الجذرية		مختبر تقنية التمثيل البياني: سلوك التمثيلات البيانية		الدوال كثيرة الحدود		مختبر تقنية التمثيل البياني: السلوك الخفي للتمثيلات البيانية					
الأهداف		<ul style="list-style-type: none"> التمثيل البياني للدوال الأسية وتحليلها. التمثيل البياني للدوال الجذرية وتحليلها وحل المعادلات الجذرية. 		<ul style="list-style-type: none"> التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود وتحليل سلوكها. رسم نموذج لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود. 		<ul style="list-style-type: none"> استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية. 							
المفردات الأساسية		دالة القوة، الدالة أحادية الحد، الدالة الجذرية، الحلول الدخيلة (power function), (monomial function), (radical function), (extraneous solutions)				الدالة كثيرة الحدود، المعامل الرئيسي، اختبار الحد الرئيسي، نقطة الدوران، الصيغة التربيعية، الصفر المتكرر، المضاعفة (polynomial function), (leading coefficient), (leading-term test), (turning point), (quadratic form), (repeated zero), (multiplicity)							
التمثيلات المتعددة		الصفحة 94				الصفحة 106							
التعليم المتهين		الصفحتان 95 و 91 و 90				الصفحتان 100 و 107							
التقويم التكويني اختبار نصف الوحدة، الصفحة 118													

وتيرة التقدم المقترحة			
الفترة الزمنية	إعطاء الدروس	المراجعة والتقييم	الإجمالي
45 دقيقة	12 يومًا	يومان	14 يومًا
90 دقيقة	6 أيام	يوم واحد	7 أيام

الدرس 1-3 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 1-4 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 1-5 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 1-6 وتيرة التقدم: يوم واحد
نظريتا الباقي والعامل	أصفار الدوال كثيرة الحدود	الدوال النسبية	المتباينات غير الخطية
<ul style="list-style-type: none"> قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية. استخدام نظريتي الباقي والعامل. 	<ul style="list-style-type: none"> إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود. إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود. 	<ul style="list-style-type: none"> تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بتمثيل بياني. حل المعادلات النسبية. 	<ul style="list-style-type: none"> حل المتباينات كثيرة الحدود. حل المتباينات النسبية.
القسمة التركيبية، كثيرة الحدود المنخفضة، التعويض التركيبي (synthetic division), (depressed polynomial), (synthetic substitution)	نظرية الصفر النسبي، قاعدة “ديكارت” للإشارات، نظرية الجبر الأساسية، نظرية تحليل العوامل الخطية، المرافقات المركبة (Rational Zero Theorem), (Descartes’ Rule of Signs), (Fundamental Theorem of Algebra), (Linear Factorization Theorem), (complex conjugates)	الدالة النسبية، الخط المقارب، الخط المقارب الرأسي، الخط المقارب الأفقي، الخط المقارب المائل، الفجوات (rational function), (asymptote), (vertical asymptote), (horizontal asymptote), (oblique asymptote), (holes)	المتباينة كثيرة الحدود، مخطط العلامات، المتباينة النسبية (polynomial inequality), (sign chart), (rational inequality)
الصفحة 116	الصفحة 128	الصفحة 139	الصفحة 146
الصفحتان 110 و 117	الصفحتان 124 و 129	الصفحتان 132 و 136	الصفحتان 143 و 144
التقويم الختامي الدليل الدراسي والمراجعة، الصفحات 148-152 اختبار تدريبي، الصفحة 153			

الدوال الأسية والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

التقويم

الوحدة 1

التشخيص	سبل الحل
بداية الوحدة 1	
الاستعداد للوحدة 1 كتاب الطالب، صفحة 85	الاستجابة للتدخل كتاب المعلم، صفحة 85
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا؟ كتاب الطالب	الوحدة 0 كتاب الطالب، من صفحة 1 - 38
أثناء/بعد كل درس	
<p>تمرين موجه كتاب الطالب، كل مثال</p> <p>مهارات التفكير العليا كتاب الطالب</p> <p>مراجعة شاملة كتاب الطالب</p> <p>أمثلة إضافية كتاب المعلم</p> <p>انتبه! كتاب المعلم</p> <p>الخطوة 4، التقويم كتاب المعلم</p>	التعليم المتميز كتاب المعلم
نصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة كتاب الطالب، صفحة 118	التعليم المتميز كتاب المعلم
قبل اختبار الوحدة	
<p>الدليل الدراسي للوحدة والمراجعة كتاب الطالب، الصفحات 148-152</p> <p>تمرين على الاختبار، كتاب الطالب، صفحة 153</p> <p>تمرين على الاختبار المعياري كتاب الطالب</p>	التعليم المتميز كتاب المعلم

التقويم التشخيصي

التقويم التكويني

التقويم الختامي

الدوال الأسية والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

التركيز على محتوى الرياضيات

معاينة درس تلو الآخر

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 1

موضوعات ذات صلة من الجبر 2

- إيجاد قيمة كثيرات الحدود وحدود كثيرات الحدود.
- التمثيل البياني للدوال التربيعية.
- حل المعادلات والمتباينات التربيعية.
- التعامل مع تدوين الدالة واستخدام الدوال وإيجاد قيمتها.

الوحدة 1

- التمثيل البياني وتحليل الدوال الأسية والدوال الجذرية وكثيرة الحدود والنسبية.
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
- استخدام نظريتي الباقي والعامر.
- إيجاد جميع أصفار الدوال كثيرة الحدود.
- حل المعادلات الجذرية والنسبية.
- حل المتباينات كثيرة الحدود والنسبية.

بعد الوحدة 1

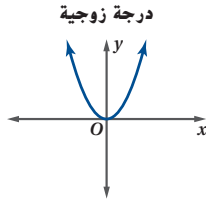
التهيئة لحساب التفاضل والتكامل

- تحديد مجال الدوال ومداها باستخدام التمثيلات البيانية والجداول والرموز.
- إيجاد حد الدالة كثيرة الحدود والدالة النسبية والدالة الجذرية.
- تمثيل التمثيل البياني لدالة.
- حل تطبيقات من الحياة اليومية تشمل القيم القصوى المطلقة خلال فترة مغلقة.

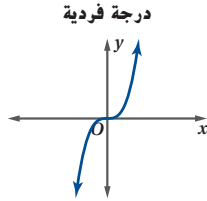
1-1 الدوال الأسية والدوال الجذرية

الدوال في الصيغة $f(x) = ax^n$ حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة، هي دوال قوة. ودالة القوة هي نوع من الدوال أحادية الحد أيضًا. والدالة أحادية الحد هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = ax^n$ أو $f(x) = ax^n$ حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.

إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا زوجيًا:



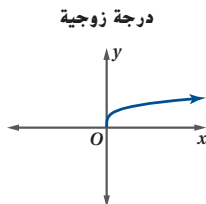
إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فرديًا:



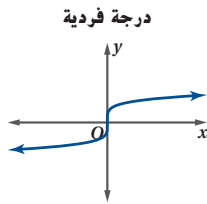
يمكن كتابة الدوال الأسية بالصيغة $f(x) = x^{\frac{p}{n}}$ كدوال جذرية بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$.

حيث n و p أعداد صحيحة موجبة تزيد عن 1 وليس لها عوامل مشتركة. لاحظ أنه يمكن قصر المجال على القيم غير السالبة.

إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا زوجيًا:



إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فرديًا:



1-2

الدوال كثيرة الحدود

الدوال أحادية الحد هي أكثر الدوال الأساسية في الدوال كثيرة الحدود. ويشكل إيجاد مجاميع وفروق الدوال أحادية الحد أنواعاً أخرى للدوال كثيرة الحدود. ويمكن تحديد سلوك النهاية للدالة كثيرة الحدود $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ عن طريق الدرجة n لكثيرة الحدود ومعاملها الرئيسي a_n .

الدالة كثيرة الحدود $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ تشتمل على n من الأصفار الحقيقية المميزة على الأكثر و $n - 1$ من نقاط الدوران على الأكثر. ويمكن إيجاد الأصفار عن طريق التحليل إلى عوامل. يظهر الصفر المتكرر c عندما يكرر العامل $(x - c)$ نفسه. ويكون عدد مرات ظهور $(x - c)$ هو مضاعفة c .

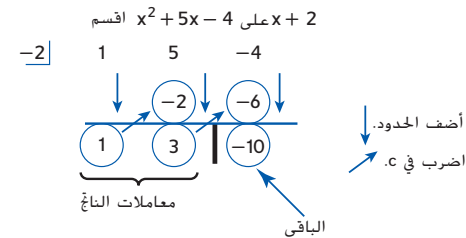
- المضاعفة الفردية: يعبر التمثيل البياني للدالة المحور x عند c وتغير قيمة $f(x)$ العلامات عند $x = c$
- المضاعفة الزوجية: يلمس التمثيل البياني للدالة المحور x عند c ولا تغير قيمة $f(x)$ العلامات عند $x = c$

1-3

نظريتا الباقي والعامل

يمكن استخدام خوارزمية مشابهة لخوارزمية القسمة المطولة للأعداد الصحيحة لقسمة كثيرات الحدود. يمكن أن ينتج عن قسمة كثيرات الحدود باقي صفري أو باقي غير صفري.

القسمة التركيبية هي طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي للصيغة $(x - c)$ باستخدام معاملات المقسوم. لذلك، ستم كتابة المقسوم عليه مثل $(x + 2)$ أولاً في صيغة $(x - (-2))$.



سواء أكانت القسمة المطولة أم القسمة التركيبية هي المستخدمة، استخدم الأصفار كعناصر تنوب عن أي حد مفقود في المقسوم واكتب كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. وإذا تمت قسمة دالة كثيرات الحدود على $(x - c)$ ، فإن الباقي سيساوي $f(c)$ ويكون $(x - c)$ عاملاً لكثير الحدود فقط إذا كان $f(c) = 0$

1-4

أصفار الدوال كثيرة الحدود

يمكن أن تكون الأصفار الحقيقية إما نسبية أو غير نسبية. وتستخدم نظرية الصفر النسبي، الواردة في الصفحة 119، المعامل الأساسي والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد جميع الأصفار النسبية الممكنة. ويمكن استخدام التعويض المباشر أو التركيبي لتحديد أي من هذه الأصفار المحتملة تعد أصفاراً فعلية. ويمكن تضيق البحث عن الأصفار الفعلية بتحديد الفترة (الحدان الأعلى والأدنى) التي سيتم خلالها تحديد مواقع الأصفار أو باستخدام قاعدة "ديكارت" للإشارات.

1-5

الدوال النسبية

- إن ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود يكون دالة نسبية.
- تظهر المستقيميات المقاربة النسبية، إن وجدت، عند الأصفار الحقيقية (قيم غير محددة)، إن وجدت، لمقام الدالة.
- $y = 0$ عبارة عن مستقيم مقارب أفقي إذا كانت درجة n للبسط أصغر من درجة m للمقام.
- لا تظهر خطوط مقاربة أفقية إذا كان $n > m$
- إذا كان $n = m$ ، فيوجد مستقيم مقارب عند نسبة المعاملات الأساسية للبسط والمقام.
- إذا كان $n = m + 1$ ، حيث $m > 0$ ، فإن التمثيل البياني يحتوي على مستقيم مقارب مائل.

1-6

المتباينات غير الخطية

تقسم الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة الحدود المحور x إلى فترات تكون قيم $f(x)$ الخاصة بها إما موجبة بالكامل (التمثيل البياني فوق المحور x) أو سالبة بالكامل (التمثيل البياني أسفل المحور x). ويمكن حل متباينة كثيرة الحدود باستخدام مخطط العلامات وسلوك النهاية الخاص به. ويمكن حل متباينة نسبية بكتابة المتباينة أولاً بصيغة عامة باستخدام تعبير نسبي فردي على الجانب الأيسر و 0 على الأيمن، ثم إنشاء مخطط علامات باستخدام الأصفار الحقيقية ونقاط غير محددة.

الدوال الأسية والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية

مشروع الوحدة

قهوة أوليه بالكاكو

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن دوال ومتباينات القوة فضلاً عن تلك الجذرية وكثيرة الحدود والنسبية لتحليل جوانب المشروع التجاري.

- اطلب من الطلاب التفكير في بيع الكاكو لإكمال كل عبارة.

1. يبيع المقهى الخاص بي ____ من مشروب الكاكو كل شهر في المتوسط بمعدل ____ AED لكل مشروب.

2. سأبيع ____ أقل من عبوات الكاكو كلما رفعت السعر بمقدار ____ AED.

3. أريد أن يبلغ إجمالي المبيعات ____ AED.

4. عند بيع n من مشروب الكاكو، سأحصل على $p(n) = n^2 -$ ____

n من مئات الدراهم مقابل ذلك. تبلغ التكلفة التي أتحملها

$c(n) = n +$ ____ لعمل n من

مشروب الكاكو.

- اطلب من الطلاب كتابة دالة لإجمالي المبيعات بعد رفع السعر لكل مشروب كاكو بمقدار x درهم. اجعل الطلاب يحددوا كم درهماً يحتاجون لرفع سعر كل مشروب كاكو حتى يبلغ إجمالي مبلغ المبيعات العدد المذكور في العبارة 3 السابقة.

- اجعل الطلاب يستخدموا إجاباتهم عن العبارة 4 لتحديد القيمة الصغرى لعدد مشروبات الكاكو التي يحتاجون إلى بيعها لتحقيق ربح.

المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام الروتين التالي.

عرّف: المستقيم المقارب هو مستقيم أو منحني يقترب منه التمثيل البياني.

مثال: المستقيم $x = -2$ عبارة عن مستقيم مقارب رأسي للتمثيل للدالة $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$

أسأل: لماذا x لا تساوي أبداً -2 في

$f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$ ؟ **الدالة غير**

محددة لأي قيمة تجعل المقام يساوي 0.

الحالي

في الوحدة 1 ستقوم ببايلي:

- رسم نموذج لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

- استخدام نظريتي الباقي والعامل.

- إيجاد الأصفار الحقيقية والمركبة للدوال كثيرة الحدود.

- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها برسم بياني.

- حل المتباينات كثيرة الحدود والنسبية.

السابق

في الوحدة السابقة،

- حللت الدوال وتمثيلاتها البيانية وحددت هل كانت توجد دوال عكسية أم لا.

لماذا؟

الهندسة المعمارية تستخدم الدوال كثيرة الحدود غالباً عند تصميم هيكل جديد أو بناءه. يستخدم المهندسون المعماريون الدوال لتحديد وزن المواد وقوتها وتحليل التكاليف وتقدير مدى تدهور المواد وتحديد القوى العاملة المطلوبة.

قراءة مسبقة اقرأ الدروس الواردة في الوحدة 1 قراءة جيدة، واستخدم ما تعرفه بالفعل عن الدوال من أجل وضع توقع للغرض المرجو من هذه الوحدة.

قراءة مسبقة / كتابة مسبقة

شجّع الطلاب على بدء دراستهم للفصل بقراءة كل درس مسبقاً. وينيغي أن يفكروا في خلفيتهم المعرفية ويضعوا تنبؤات عن المحتوى. امنح المجموعات وقتاً لمناقشة ما قرأوه وطرح الأسئلة. وركز على ملامح النص مثل عناوين الأقسام والمربعات الموجزة التي تتناول المفاهيم والمفاهيم الرئيسية.

إجابات إضافية

1. $(x - 4)(x + 5)$
2. $(x - 3)(x + 8)$
3. $(2x - 3)(x - 7)$
4. $(x - 3)(3x + 4)$
5. $(4x - 5)(3x + 7)$
6. $(2x - 9)(4x - 3)$

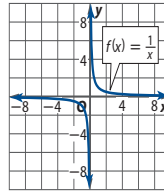
مفردات جديدة

5	صفحة	الدالة الأسية (power function)
86	صفحة	الدالة أحادية الحد (monomial function)
89	صفحة	الدالة الجذرية (radical function)
91	صفحة	الحلول الدخيلة (extraneous solutions)
97	صفحة	الدالة كثيرة الحدود (polynomial function)
97	صفحة	معامل الحد الأكبر (leading coefficient)
98	صفحة	اختبار الحد الرئيس (leading-term test)
99	صفحة	دالة من الدرجة الرابعة (quartic function)
100	صفحة	الصورة التربيعية (quadratic form)
101	صفحة	الصفر المتكرر (repeated zero)
121	صفحة	الحد الأدنى (lower bound)
121	صفحة	الحد الأعلى (upper bound)
130	صفحة	الدالة النسبية (rational function)
130	صفحة	المستقيمات المتقاربة (asymptotes)
131	صفحة	المستقيم المقارب الرأسى (vertical asymptote)
131	صفحة	المستقيم المقارب الأفقى (horizontal asymptote)
141	صفحة	المتباينة كثيرة الحدود (polynomial inequality)
141	صفحة	مخطط الإشارات (sign chart)
143	صفحة	المتباينة النسبية (rational inequality)

مراجعة المفردات

المرافقات المركبة (complex conjugates) صفحة 7 مجموعة ثنائية من الأعداد المركبة في صورتين $a + bi$ و $a - bi$

الدوال المتقابلة (reciprocal functions) صفحة 45 دوال في الصورة $f(x) = \frac{a}{x}$



الاستعداد للوحدة

اكتشاف مدى الاستعداد لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

1

خيار الكتاب المدرسي أجب على أسئلة التدريب السريع أدناه.

تدريب سريع

حلل فيما يلي الدوال كثيرة الحدود إلى عوامل. (الدرس 3-0) 1-6. انظر الهامش.

1. $x^2 + x - 20$
2. $x^2 + 5x - 24$
3. $2x^2 - 17x + 21$
4. $3x^2 - 5x - 12$
5. $12x^2 + 13x - 35$
6. $8x^2 - 42x + 27$

7. الهندسة يمكن تمثيل مساحة المربع بواسطة $16x^2 + 56x + 49$ حدد التعبير الذي يمثل عرض المربع. $|4x + 7|$

8-13. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

استخدم جدولاً لتمثيل كل دالة فيما يلي. (الدرس 3-0)

8. $f(x) = \frac{1}{2}x$
9. $f(x) = -2$
10. $f(x) = x^2 + 3$
11. $f(x) = -x^2 + x - 6$
12. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
13. $f(x) = 3x^2 - x - 2$

14. أجهزة التلفاز تُقدر إحدى المجلات المهمة بالأجهزة الإلكترونية أنه يمكن تمثيل إجمالي عدد تلفزيونات البلازما المباعة في جميع أنحاء العالم بواسطة $f(t) = 2t + 0.5t^2$ حيث يمثل t عدد الأيام بعد تاريخ الإصدار. مثل هذه الدالة بياناً للمعادلة التالية $0 \leq t \leq 40$

انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

اكتب كل مجموعة من الأعداد باستخدام ترميز بناء المجموعة وترميز الفترات، إن أمكن. (الدرس 1-1)

15. $x \leq 6$
16. $\{-2, -1, 0, \dots\}$
17. $-2 < x < 9$
18. $1 < x \leq 4$
19. $x < -4$ أو $x > 5$
20. $x < -1$ أو $x \geq 7$

15-20. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

21. الموسيقى في أحد متاجر الموسيقى، تتراوح أسعار كل الأقراص المدمجة بين 9.99 AED و 19.99 AED صف الأسعار في ترميز بناء مجموعة الحل وترميز الفترة.

$$[9.99, 19.99]; \{x \mid 9.99 \leq x \leq 19.99, x \in \mathbb{R}\}$$

الأسئلة الأساسية

- لماذا تُستخدم الرياضيات في وضع نماذج لمواقف من الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: من أجل دراسة الاتجاهات ووضع التنبؤات وفهم الظواهر في الطبيعة
- متى تستخدم الدالة غير الخطية في وضع نموذج لموقف من الحياة اليومية؟ الإجابة النموذجية: عندما تحتوي العلاقة التي تم عمل نموذج لها على معدل تغيير غير ثابت، ولذلك فهي غير خطية.

الدوال الأسية والجذرية

السابق

الحالي

لماذا؟

- قمت بتحليل الدوال الرئيسية ومجموعاتها من التمثيل البياني. (الدرس 5-1)

- 1 التمثيل البياني للدوال الأسية وتحليلها.
- 2 التمثيل البياني للدوال الجذرية وتحليلها وحل المعادلات الجذرية.

- تستخدم الجسور المعلقة لهد الجسور لمسافات طويلة من خلال تعليق السطح الرئيس للجسر باستخدام الكابلات الفولاذية. تمثل دالة قطر الكابل التي يمكن تمثيلها بدالة أسية مقدار الوزن الذي يمكن أن يتحمله الكابل الفولاذي.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-1 حلل الدوال الأصلية ومجموعات التمثيلات البيانية الخاصة بها.

الدرس 1-1 مثّل الدوال الأسية بيانيًا وحللها. مثّل الدوال الجذرية بيانيًا وحللها وحل المعادلات الجذرية.

بعد الدرس 1-1 مثّل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا وحللها.

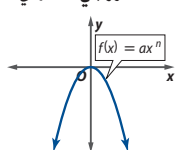
مفردات جديدة

الدالة الأسية
(power function)
الدالة أحادية الحد
(monomial function)
الدالة الجذرية
(radical function)
الحل الدخيل
(extraneous solution)

المفهوم الأساسي الدوال أحادية الحد

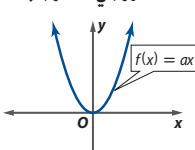
لنفترض أن f دالة أسية $f(x) = a^n$ حيث n عدد صحيح موجب.

n عدد زوجي، a فردي



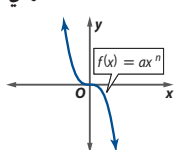
المجال: $(-\infty, \infty)$
النهاية: $(-\infty, 0]$
التناظر مع المحور x و y : 0
الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$
التناظر: المحور الرأسي y
القيمة العظمى: $(0, 0)$
تناقص: $(0, \infty)$
تزايد: $(-\infty, 0)$
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

n عدد زوجي، a موجب



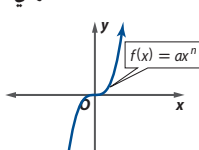
المجال: $(-\infty, \infty)$
النهاية: $[0, \infty)$
التناظر مع المحور x و y : 0
الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$
التناظر: المحور الرأسي y
القيمة الصغرى: $(0, 0)$
تناقص: $(-\infty, 0)$
تزايد: $(0, \infty)$
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

n عدد فردي، a سالب



المجال والنهاية: $(-\infty, \infty)$
التناظر مع المحور x و y : 0
الاتصال: متصلة على $x \in \mathbb{R}$
التناظر: نقطة الأصل
القيم القصوى: لا يوجد
تناقص: $(-\infty, \infty)$
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

n عدد فردي، a موجب



المجال والنهاية: $(-\infty, \infty)$
تقاطع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y : 0
الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$
التناظر: نقطة الأصل
القيم القصوى: لا يوجد
تزايد: $(-\infty, \infty)$
السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ بالدرس.

أسأل:

- هل يمكن أن يكون قطر كابل من الصلب أصغر من أو يساوي 0 بوصة؟ اشرح. لا. الطول موجب دائمًا.

- ما شكل التمثيل البياني لبيانات تقارن قطر الكابل بمقدار الوزن الذي يمكن أن يتحمله؟

الإجابة النموذجية: منحنى بدون نقاط تقاطع، يزيد من اليسار إلى اليمين.

مراجعة المفردات

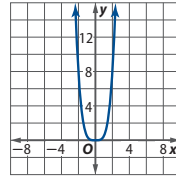
درجة الأحادي الحد (Degree of a Monomial) هي مجموع أسس متغيرات الدالة أحادية الحد.

تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الزوجية زوجية أيضًا بحيث $f(-x) = f(x)$ وبالمثل، تكون الدوال أحادية الحد ذات الدرجة الفردية فردية أيضًا، $f(-x) = -f(x)$ أو $f(x) = -f(-x)$.

مثال 1 تحليل الدوال أحادية الحد

مثل كل دالة بيانيًا وحلليها. وضع المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$



أوجد قيمة الدالة لعدة قيم x في مجالها. ثم استخدم منحنياً سلساً لتوصيل كل من هذه النقاط لإكمال التمثيل البياني.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	40.5	8	0.5	0	0.5	8	40.5

المجال: $(-\infty, \infty)$ ، المدى: $[0, \infty)$

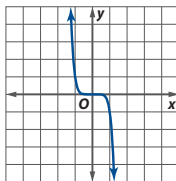
التناظر: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, 0)$ تزايد: $(0, \infty)$

b. $f(x) = -x^7$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2,187	128	1	0	-1	-128	-2,187

المجال: $(-\infty, \infty)$ ، المدى: $(-\infty, \infty)$

التناظر: 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تناقص: $(-\infty, \infty)$

تمرين موجه 1A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

1A. $f(x) = 3x^6$

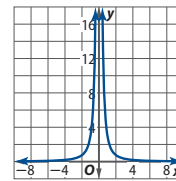
1B. $f(x) = -\frac{2}{3}x^5$

تذكر أن $f(x) = \frac{1}{x}$ أو x^{-1} غير معرفة في $x = 0$. وبالمثل، $f(x) = x^{-2}$ و $f(x) = x^{-3}$ ليس لهما تعريف عندما $x = 0$. ونظرًا لأن الدالة الأسية يمكن أن تكون غير معرفة عندما تكون $n < 0$ ، فسوف تحتوي التمثيلات البيانية لهذه الدوال على انقطاعات.

مثال 2 الدوال ذات الأسس السالبة

مثل كل دالة بيانيًا وحلليها. وضع المجال والمدى والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 3x^{-2}$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.75	3	غير محدد	3	0.75	0.3

المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ، المدى: $(0, \infty)$

نقاط التناظر: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

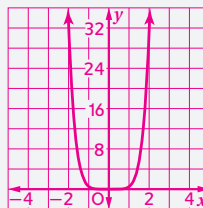
الاتصال: انقطاع لانهاضي عند $x = 0$

تزايد: $(-\infty, 0)$ ؛ تناقص: $(0, \infty)$

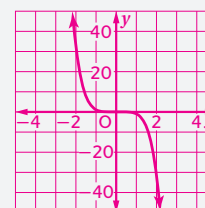
5

إجابات إضافية (مثال آخر)

1a.

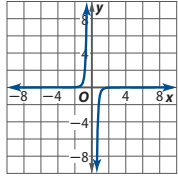


1b.



b. $f(x) = -\frac{3}{4}x^{-5}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	0.0031	0.0234	0.75	غير محدد	-0.75	-0.0234	-0.0031



المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ؛ المدى: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
نقاط التناظر: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
الاتصال: انقطاع لا نهائي عند $x = 0$
تزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

تمرين موجّه 2A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

2A. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-4}$

2B. $f(x) = 4x^{-3}$

تذكر أن $x^{\frac{1}{n}}$ تشير إلى الجذر النوني للعدد x . و $x^{\frac{p}{n}}$ حيث $\frac{p}{n}$ في أبسط صورة، تشير إلى الجذر النوني n لـ x^p .
بما أن n عدد صحيح زوجي، إذن، يجب قصر المجال على القيم غير السالبة.

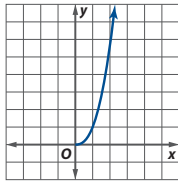
مراجعة المفردات

الأسس النسبية (Rational Exponents)
هي أسس تُكتب على هيئة كسور في أبسط صورة. (الدرس 0-4)

مثال 3 الأسس النسبية

مثّل كل دالة بيانيًا وحلّليها. وضع المجال وال المدى ونقاط التناظر والسلوك الطرفي والاتصال، ومواقع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$



x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	1	5.657	15.588	32	55.902	188.182

المجال: $(0, \infty)$ ؛ المدى: $[0, \infty)$

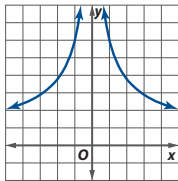
تقاطع المحورين x و y : 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

تزايد: $(0, \infty)$

b. $f(x) = 6x^{-\frac{2}{3}}$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2.884	3.780	6	غير محدد	6	3.780	2.884

المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ؛ المدى: $(0, \infty)$

نقاط التناظر: لا توجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

الاتصال: انقطاع لا نهائي عند $x = 0$

تزايد: $(-\infty, 0)$ ؛ تناقص: $(0, \infty)$

تمرين موجّه 3A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

3A. $f(x) = 2x^{\frac{3}{4}}$

3B. $f(x) = 10x^{\frac{5}{3}}$

مثال إضافي

2. مثّل كل دالة بيانيًا وحلّليها. وضع

المجال وال المدى ونقاط التناظر

وسلوك النهاية والاتصال، ومواقع

تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 2x^{-4}$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

$R = (0, \infty)$ ؛ لا توجد نقطة

تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ؛ لا

انقطاع عند النقطة $x = 0$ ؛

التزايد: $(-\infty, 0)$ ؛ التناقص:

$(0, \infty)$



b. $f(x) = 2x^{-3}$

$D = (-\infty, 0) \cup$

$(0, \infty)$; $R = (-\infty, 0) \cup$

$(0, \infty)$ ؛ لا توجد نقطة

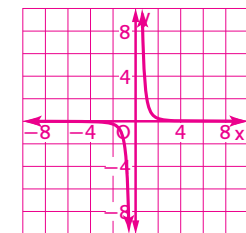
تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ؛

انقطاع لا نهائي عند النقطة

$x = 0$ ؛

التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال دالة القوة هي أي دالة بالصيغة

$f(x) = ax^n$ ، حيث a و n أعداد ثابتة حقيقية غير

صفريّة. أما الدالة أحادية الحد فهي دالة قوة يكون

فيها n عددًا صحيحًا موجبًا. ويعد التمثيل البياني

للدالة أحادية الحد ذات الدرجة الزوجية مائلًا

من حيث المحور y . ويعد التمثيل البياني للدالة

أحادية الحد ذات الدرجة الفردية مائلًا من حيث الأصل.

الدوال الأسية دالة القوة بالصيغة $f(x) = ax^n$.

حيث n عدد صحيح سالب، يشتمل على انقطاع.

أما دالة القوة ذات الصيغة $f(x) = ax^{\frac{p}{n}}$ ، حيث n

عدد زوجي و $\frac{p}{n}$ في أبسط صورة، فتشتمل على

مجال يقتصر على قيم غير سالبة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة التفاعلية اطلب من الطلاب

حل الأمثلة الموضحة على السبورة

وحفظ حلولهم كملاحظات ثم نشرها

على موقع الإنترنت الخاص بالفصل. وقد

يساعد ذلك الطلاب في التركيز على

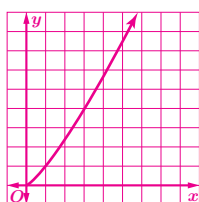
الدرس بدلاً من نسخ الملاحظات لكل

نوع من الدوال أحادية الحد.

أمثلة إضافية

3. ممثل كل دالة بيانيًا وحلليها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وسلوك النهاية والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $D = [0, \infty)$; $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$.
 $R = [0, \infty)$; نقطة التقاطع: $(0, 0)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ؛ مستمر في $(0, \infty)$ ؛ تزايد: $(0, \infty)$



b. $D = (-\infty, 0)$; $f(x) = 4x^{-\frac{2}{5}}$.
 $R = (0, \infty)$ ؛ لا توجد نقاط تقاطع؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ ؛ انقطاع لا نهائي عند النقطة $x = 0$ ؛ التزايد: $(-\infty, 0)$ ؛ والتناقص: $(0, \infty)$

4. الحيوانات البيانات التالية تمثل طول الجسم L بالسنتيمترات والكتلة M بالكيلوجرامات للعديد من القطط الإفريقية الذهبية التي يدرسها أحد العلماء.

L	72	72	73	74	75	76	78	79
M	11	12	13	15	15	14	15	15
L	80	83	84	85	86	88	89	90
M	14	16	16	15	17	17	18	18

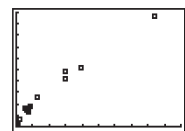
a. أنشئ مخطط انتشار للبيانات.
b. حدد دالة قوة لعمل نموذج للبيانات.
 $y = 0.02x^{1.5}$
c. استخدم البيانات للتنبؤ بكتلة قط إفريقي ذهبي يبلغ طوله 77 سنتيمترًا.
14.1 kg تقريبًا

مثال 4 الانحدار الأسّي

علم الأحياء تمثل البيانات التالية معدل الأيض أثناء الراحة R بالكيلو كالوري في اليوم الواحد للكتلة m بالكيلوجرامات للعديد من الحيوانات المحددة.

m	0.3	0.4	0.7	0.8	0.85	2.4	2.6	5.5	6.4	6
R	28	35	54	66	46	135	143	331	293	292
m	7	7.9	8.41	8.5	13	29.3	29.8	39.5	83.6	
R	265	327	346	363	520	956	839	1,036	1,948	

المصدر: مجلة الجمعية الأمريكية للأثروبولوجيا



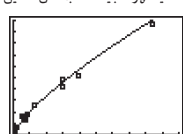
[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

a. صمم مخطط انتشار للبيانات.

يتضح أن مخطط انتشار يتشابه مع دالة الجذر التربيعي. وهي دالة أسية. لذلك، اختر نموذج انحدار أسّي.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قَرِّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط.

باستخدام أداة PwrReg على حاسبة التمثيل البياني وتقريب كل معامل إلى أقرب ألف ينتج $f(x) = 69.582x^{0.759}$. معامل الارتباط r للبيانات، 0.995. يشير إلى أن الانحدار الأسّي قد يُظهر البيانات بشكل دقيق.



[0, 100] scl: 10 by [0, 2000] scl: 200

c. استخدم المعادلة للتنبؤ بمعدل الأيض في وقت الراحة لحيوان يبلغ وزنه 60 كيلوجرامًا.

استخدم ميزة CALC على الآلة الحاسبة لإيجاد $f(60)$. قيمة $f(60)$ تساوي 1,554 تقريبًا. إذا، معدل الأيض في وقت الراحة لحيوان وزنه 60 كيلوجرامًا يساوي 1,554 كيلو كالوري تقريبًا.

تقريب موجه

4. السيارات يوضح الجدول مسافة الكبح مقدرة بالغدم، في عدة سرعات تقدر بالميل في الساعة، لسيارة محددة تسير على طريق يابس ممهد جيدًا.

السرعة	10	20	30	40	50	60	70
المسافة	4.2	16.7	37.6	66.9	104.5	150.5	204.9

a. صمم مخطط انتشار للبيانات. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

b. حدد دالة أسية لتمثيل للبيانات. $y = 0.042x^2 - 0.004x + 0.043$
c. تنبأ بمسافة الكبح لسيارة تسير بسرعة قدرها 80 ميلًا في الساعة. نحو 267.6 ft

الربط بالحياة اليومية

السعر الحراري هو وحدة قياس الطاقة ويعادل مقدار الحرارة اللازم لرفع درجة حرارة كيلو جرام واحد من الماء بمقدار درجة مئوية واحدة. السعر الحراري الواحد يكافئ 4.1868 كيلوجول. تحتوي التفاحة المتوسطة على 60 سعرًا حراريًا. المصدر: موسوعة الغذاء والتغذية

نصيحة دراسية

نموذج الانحدار تنتج الدالة كثيرة الحدود ذات العوامل التي تم تقريبها تقديرات مختلفة عن القيم المحسوبة باستخدام معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها. من الآن فصاعدًا، يمكنك افتراض أنه عندما يُطلب منك استخدام نموذج لتقدير قيمة، فإنك ستستخدم معادلة الانحدار التي لم يتم تقريبها.

2 الدوال الجذرية

تعبير ذو أسس نسبية يمكن كتابته بصيغة جذرية.

$$\text{صيغة جذرية} \quad \sqrt[n]{x^p} = \text{صيغة أسية} \quad x^{\frac{p}{n}}$$

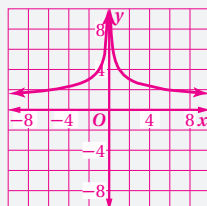
تمثل الدوال الأسية ذات الأسس النسبية القاعدة الأساسية للدوال الجذرية. **الدالة الجذرية** هي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ حيث p و n عدنان صحيحان موجبان أكبر من العدد 1 وليس لهما أي عوامل مشتركة. وفيما يلي بعض الأمثلة على الدوال الجذرية.

$$f(x) = 3\sqrt{5x^3} \quad f(x) = -5\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 - 1} \quad f(x) = \sqrt[4]{x + 12} + \frac{1}{2}x - 7$$

7

إجابات إضافية (أمثلة أخرى)

3b.



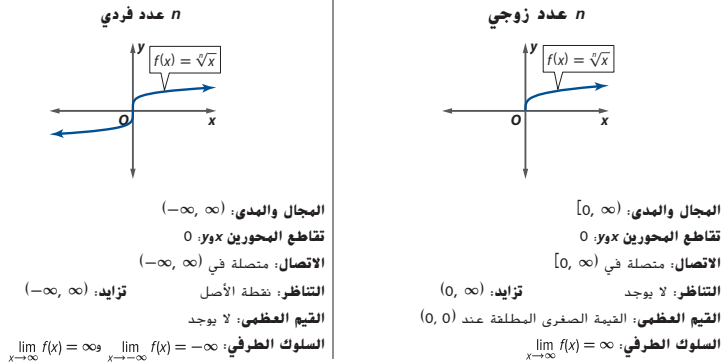
4b.

[70.2, 91.8] scl: 1.5 في [9.81, 19.19] scl: 1

ومن المهم أيضًا فهم خصائص التمثيل البياني للدوال الجذرية.

المفهوم الأساسي الدوال الجذرية

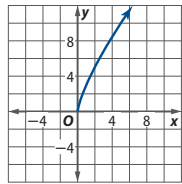
لتفترض أن f دالة جذرية $f(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد صحيح موجب.



مثال 5 التمثيل البياني للدوال الجذرية

مثل كل دالة بيانيًا وحلها. وضع المجال والمهدي والتناظرات والسلوك الطرفي والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = 2\sqrt[3]{5x^3}$



x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	2.99	5.03	6.82	8.46	10

المجال والمهدي: $[0, \infty)$

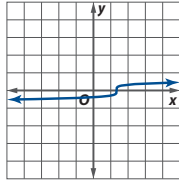
تقاطع المحورين x و y : 0

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة في $[0, \infty)$

تزايد: $(0, \infty)$

b. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt[5]{6x-8}$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0.48	-0.46	-0.42	-0.38	-0.29	0.33	0.40

المجال والمهدي: $(-\infty, \infty)$

التناظر مع المحور الأفقي x : $\frac{4}{3}$ التناظر مع المحور الرأس y : حوالي -0.38

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

الاتصال: متصلة في $(-\infty, \infty)$

تزايد: $(-\infty, \infty)$

تمرين موجّه 5A-B. انظر الهامش.

5A. $f(x) = -\sqrt[3]{12x^2 - 5}$

5B. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2x^3 - 16}$

أفعله!

الدوال الجذرية تذكر أنه إذا كان n عددًا زوجيًا، فستكون هناك قيود على المجال والمهدي.

2 الدوال الجذرية

المثال 5 يوضح كيفية التمثيل البياني للدوال الجذرية وتحليلها، مع توضيح المجال والمهدي ونقاط التقاطع وسلوك النهاية والاتصال ومواضع تزايد أو تناقص الدوال في الصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$

المثال 6 يوضح كيفية حل المعادلات الجذرية، مع استبعاد الحلول الدخيلة.

مثال إضافي

5 مثل كل دالة بيانيًا وحلها. وضع

المجال والمهدي ونقاط التقاطع وسلوك النهاية والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

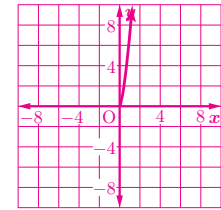
$f(x) = 5\sqrt{2x^3}$ $D = [0, \infty)$

نقطة: $R = [0, \infty)$

التقاطع: 0; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

مستمر في

$[0, \infty)$; التزايد: $(0, \infty)$



b. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[5]{3x-4}$

$D = (-\infty, \infty)$

نقطة: $R = (-\infty, \infty)$

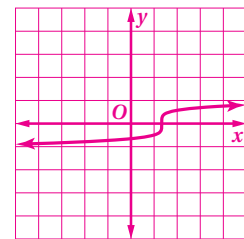
التقاطع مع المحور الأفقي x : $\frac{4}{3}$ نقطة التقاطع مع المحور

الرأسي y : حوالي -0.6598

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ مستمر

لجميع الأعداد الحقيقية; التزايد: $(-\infty, \infty)$



المتعلمون بطريقة التواصل اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات لمقارنة حل المعادلات الجذرية بحل المعادلات التربيعية. اجعل المجموعات تكتب أو تقدم عرضًا تقديميًا موجزًا عن أوجه الاختلاف والشبه في عمليات الحل.

مثال إضافي

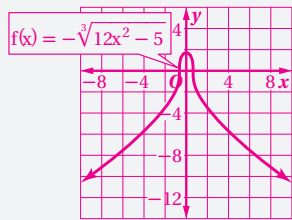
6 أوجد حل كل من المعادلات التالية.

- a. $2x = \sqrt{28x + 29} - 3$ -1, 5
b. $12 = \sqrt[3]{(x-2)^2} + 8$ 10, -6
c. $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-12}$ 8

نصائح للمعلمين الجدد

حلول دخيلة ذكر الطلاب بأن هناك احتمالاً لظهور حلول دخيلة نتيجة للتربيع. لذا، يجب مراجعة أي حل محتمل.

إجابات إضافية (تمرين موجه)



5A

$D = (-\infty, \infty)$,
 $R = (-\infty, \sqrt[3]{5}]$ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي $x: -\frac{\sqrt{15}}{6}$ و $-\frac{\sqrt{15}}{6}$ نقطة التقاطع مع

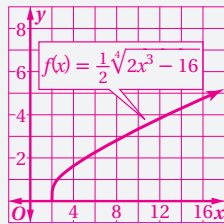
المحور الرأسي $y: \sqrt[3]{5}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ مستمر لجميع

الأرقام الحقيقية؛ التزايد؛

$(-\infty, 0)$ ؛ التناقص؛ $(0, \infty)$



5b

$D = [2, \infty)$, $R = [0, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$x: \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ ؛ مستمر عند

$[2, \infty)$ ؛ التزايد؛ $(\infty, 2)$

كما هو الحال مع الدوال الجذرية، المعادلة الجذرية هي أي معادلة يكون فيها المتغير متضمنًا في الجذور. لحل معادلة جذرية، اعزل أولاً التعبير الجذري. ثم ارفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أس يساوي مؤشر الجذر للتخلص من الجذر. ينتج أحيانًا عن رفع كل طرف من طرفي المعادلة إلى أس **حلولاً دخيلة**، أو حلولاً لا تحقق المعادلة الأصلية. من المهم التحقق من أن الحلول ليست دخيلة.

مثال 6 حل المعادلات الجذرية

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

a. $2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$

$$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$$

$$2x + 2 = \sqrt{100 - 12x}$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 100 - 12x$$

$$4x^2 + 20x - 96 = 0$$

$$4(x^2 + 5x - 24) = 0$$

$$4(x+8)(x-3) = 0$$

$$x-3=0 \quad x+8=0$$

$$x=-8 \quad x=3$$

تحقق $x = -8$

$$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$$

$$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(-8)} - 2$$

$$-16 \stackrel{?}{=} \sqrt{196} - 2$$

$$-16 \neq 12 \quad \times$$

المعادلة الأصلية

اعزل الجذر.

قم بتربيع كل طرف من طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

اطرح $100 - 12x$ من كل طرف.

حل.

حل.

خاصية الناتج الصفري

حل.

تحقق $x = 3$

$$2x = \sqrt{100 - 12x} - 2$$

$$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{100 - 12(3)} - 2$$

$$6 \stackrel{?}{=} \sqrt{64} - 2$$

$$6 = 6 \quad \checkmark$$

ثبت صحة أحد الحلول بينما الآخر لم تثبت صحته. إذاً، الحل هو 3.

b. $\sqrt[3]{(x-5)^2} + 14 = 50$

$$\sqrt[3]{(x-5)^2} + 14 = 50$$

$$\sqrt[3]{(x-5)^2} = 36$$

$$(x-5)^2 = 46,656$$

$$x-5 = \pm 216$$

$$-211 = x = 221$$

المعادلة الأصلية

اعزل الجذر.

ارفع طرفي المعادلة إلى الأس ثلاثة. (المؤشر هو 3.)

خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

اجمع 5 إلى كل طرف.

التحقق من الحلين في المعادلة الأصلية يؤكد أنهما صحيحان.

c. $\sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{15-x}$

$$\sqrt{x-2} = 5 - \sqrt{15-x}$$

$$x-2 = 25 - 10\sqrt{15-x} + (15-x)$$

$$2x-42 = -10\sqrt{15-x}$$

$$4x^2 - 168x + 1764 = 100(15-x)$$

$$4x^2 - 168x + 1764 = 1500 - 100x$$

$$4x^2 - 68x + 264 = 0$$

$$4(x^2 - 17x + 66) = 0$$

$$4(x-6)(x-11) = 0$$

$$x-11=0 \quad x-6=0$$

$$x=11 \quad x=6$$

المعادلة الأصلية

قم بتربيع كل طرف.

اعزل الجذر.

قم بتربيع كل طرف.

استخدم خاصية التوزيع

اجمع الحدود المتشابهة.

حل.

حل.

خاصية الناتج الصفري

حل.

التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية يؤكد أن الحلين صحيحان.

تمرين موجه

6A. $3x = 3 + \sqrt{18x-18}$ 1, 3

6B. $\sqrt[3]{4x+8} + 3 = 7$ 14

6C. $\sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{2-x}$ 2

9

التعليم المتمايز

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اجعل الطلاب يستخدموا برنامج مخطط انسيابي أو سبورة تفاعلية لإنشاء مخطط انسيابي يشرح كيفية حل معادلة جذرية. ذكر الطلاب بأنه يجب أن تشمل مخططاتهم الانسيابية على حلقة للخطوات التي يتضمنها عزل الجذور واستبعادها. ثم اجعل الطلاب يختبروا مخططاتهم الانسيابية باستخدام معادلات من تمارين الممارسة.

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدام التمارين 1-55 للتأكد من الفهم


ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص
الواجبات للطلاب.

انتبه!


خطأ شائع في التمارين 30-33.

قد ينسى الطلاب مسح العناصر
المخزنة في L1 و L2 قبل إدخال
البيانات المقدمة لكل تمرين.

ذكر الطلاب بأنه لكي يتم مسح

القوائم، يجب الضغط على 

لنقل المؤشر على L1، ثم الضغط

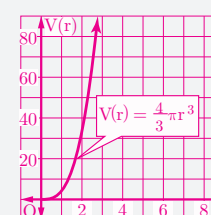
على  

للمسح كلها

القائمتين.

إجابات إضافية

17b.



30a.

[0, 10] scl: 1 في [0, 1500] scl: 150

30b. $y = 3.54x^{2.89}$

30c. 66,098.82 تقريباً

31a.

[0, 10] scl: 1 في [0, 150000] scl: 10000

31b. $y = 0.77x^{5.75}$

31c. 235,906,039 تقريباً

تمارين

مثل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والهدى ونقاط التناظر والسلوك
الطرفي والاتصال ومواضع تزايد الدالة أو تناقصها. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = 5x^2$
2. $g(x) = 8x^5$
3. $h(x) = -x^3$
4. $f(x) = -4x^4$
5. $g(x) = \frac{1}{3}x^9$
6. $f(x) = \frac{5}{8}x^8$
7. $f(x) = -\frac{1}{2}x^7$
8. $g(x) = -\frac{1}{4}x^6$
9. $f(x) = 2x^{-4}$
10. $h(x) = -3x^{-7}$
11. $f(x) = -8x^{-5}$
12. $g(x) = 7x^{-2}$
13. $f(x) = -\frac{2}{5}x^{-9}$
14. $h(x) = \frac{1}{6}x^{-6}$
15. $h(x) = \frac{3}{4}x^{-3}$
16. $f(x) = -\frac{7}{10}x^{-8}$

17. الهندسة يتم إيجاد حجم الكرة من خلال $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. حيث r
نصف القطر. (مثال 1)

a. حدد مجال الدالة ومداها.

b. مثل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

17a. $D = (0, \infty)$, $R = (0, \infty)$

مثل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والهدى ونقاط التناظر والسلوك
النهائي والاتصال ومواضع تزايد الدالة أو تناقصها. (المثال 3)

18. $f(x) = 8x^{\frac{1}{4}}$
19. $f(x) = -6x^{\frac{1}{5}}$
20. $g(x) = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{3}}$
21. $f(x) = 10x^{-\frac{1}{6}}$
22. $g(x) = -3x^{\frac{5}{8}}$
23. $h(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{5}{5}}$
24. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$
25. $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$
26. $h(x) = 7x^{\frac{5}{3}}$
27. $h(x) = -4x^{\frac{7}{4}}$
28. $h(x) = -5x^{-\frac{3}{2}}$
29. $h(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{8}{5}}$

أكمل كلاً من الخطوات التالية. 30-31. انظر الهامش.

a. صمم مخطط انتشار للبيانات.

b. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

c. احسب قيمة كل نموذج عند $x = 30$. (المثال 4)

x	y
1	4
2	22
3	85
4	190
5	370
6	650
7	1,000
8	1,500

x	y
1	1
2	32
3	360
4	2,000
5	7,800
6	25,000
7	60,000
8	130,000

10 | الدرس 1-1 | الدوال الأسية والجذرية

المسافة (m)	السرعة (m/s)
4	8.85
8	12.52
12	15.34
16	17.71
20	19.80
24	21.69
28	23.43

32. الفطس من المرتفعات في رياضة
الفطس من المرتفعات،
يؤدي المتنافسون ثلاث غطسات من ارتفاع
يبلغ 28 متراً.

يمنح الحكام الغطاسين مجموعة نقاط
تبدأ من 0 إلى 10 نقاط حسب درجة
صعوبة الغطسة والقفزة والوضعية
والدخول في الماء. يوضح الجدول سرعة
الغطاس في مسافات متعددة أثناء
الغطس. (المثال 4)

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

انظر الهامش.

b. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

$f(x) = 4.42x^{0.5}$

c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي سيدخل بها الغطاس إلى الماء
بعد القفز من على ارتفاع يبلغ 30 متراً.

حوالي 24.25 m/s

السرعة التصوي (بالدليل في الساعة)	الهواء البارد (°F)
5	48.22
10	46.04
15	44.64
20	43.60
25	42.76
30	42.04
35	41.43
40	40.88

33. البطس درجة حرارة تبريد الرياح
هي درجة الحرارة الظاهرة التي
نشعر بها على الجسم المكشوف
مع أخذ تأثير الرياح في الاعتبار.
يوضح الجدول درجة حرارة تبريد
الرياح الناتجة عن انطلاق الرياح
بسرعات متعددة عندما تكون
درجة الحرارة الفعلية $50^\circ F$
(المثال 4)

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

انظر الهامش.

b. حدد دالة أسية لعمل نموذج
للبيانات.

$f(x) = 55.14x - 0.0797$

c. استخدم الدالة للتنبؤ بدرجة
حرارة تبريد الرياح عندما
تصل سرعة الهواء إلى

65 ميلاً في الساعة.

حوالي $39.54^\circ F$

34-41. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

مثل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والهدى ونقاط التناظر والسلوك
الطرفي والاتصال ومواضع تزايد الدالة أو تناقصها. (المثال 5)

34. $f(x) = 3\sqrt{6 + 3x}$
35. $g(x) = -2\sqrt[3]{1024 + 8x}$
36. $f(x) = -\frac{3}{8}\sqrt[6]{16x + 48} - 3$
37. $h(x) = 4 + \sqrt{7x - 12}$
38. $g(x) = \sqrt{(1 - 4x)^3} - 16$
39. $f(x) = -\sqrt[3]{(25x - 7)^2} - 49$
40. $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{27 - 2x} - 8$
41. $g(x) = \sqrt{22 - x} - \sqrt{3x - 3}$

42. ميكانيكا الموائع يمكن تمثيل سرعة تدفق المياه عبر خرطوم له فوهة

باستخدام $V(P) = 12.1\sqrt{P}$. حيث V تمثل السرعة بالقدم في الثانية و P
تمثل قوة الضغط بالبرطل في البوصة المربعة. (المثال 5)

a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

a. مثل بيانيًا السرعة عبر فوهة الخرطوم في صورة دالة ضغط.

b. وضح المجال والهدى والسلوك الطرفي واتصال الدالة وحدد ما إذا

كان تزايد أو تنقص.

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1-55, 82-103	82-99, زوجي 2-54
OL ضمن المستوى	62, 63-73, 74, 75, 77, 79, 80, 82-103	56-80, 82-99
BL أعلى من المستوى	56-103	

10 | الدرس 1-1 | الدوال الأسية والدوال الجذرية



إجابات إضافية

84a. صحيحة. الإجابة النموذجية. يمكن

كتابة $f(x)$ بصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^a}$ إذا

كان b عددًا زوجيًا وكان a عددًا

فرديًا. إذا $x \geq 0$ الجذر الزوجي

للعدد السالب غير محدد.

84b. خطأ؛ الإجابة النموذجية: يمكن

كتابة $f(x)$ بصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x^a}$

إذا فإن كان b عددًا فرديًا وكان a

زوجيًا، يكون $f(x)$ محددًا لكل x .

74. الكهرباء يمكن حساب الجهد الذي يستهلكه أي جهاز كهربائي. مثل

مشغل DVD. باستخدام $V = \sqrt{PR}$ حيث V تمثل الجهد ويقاس

بالفولت، P تمثل القدرة الكهربائية وتقاس بالوات. R تمثل المقاومة

وتقاس بالأوم. يمكن استخدام المعادلة $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$ لحساب التيار.

حيث I تمثل التيار بالأمبير.

a. إذا كان المصباح يستهلك 120 فولت ولديه مقاومة مقدارها 11 أوم.

فما مقدار الطاقة التي يستهلكها المصباح؟ **1,309 أوم**

b. إذا كان مشغل DVD يعمل بتيار مقداره 10 أمبيرات ويستهلك من

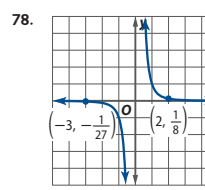
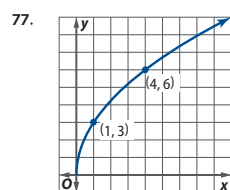
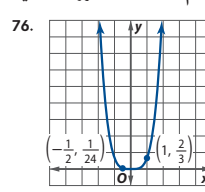
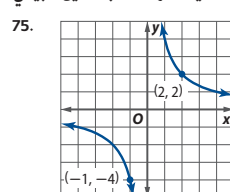
الطاقة 1,200 وات، فما مقدار مقاومة مشغل DVD؟ **12 أوم**

c. يعبر قانون أوم عن الجهد الكهربائي بدلالة شدة التيار والمقاومة.

استخدم المعادلة المعطاة أعلاه لكتابة قانون أوم باستخدام الجهد

والمقاومة وشدة التيار. **$V = IR$**

استخدم النقاط المذكورة لتحديد الدالة الأسية الموضحة بالتمثيل البياني.

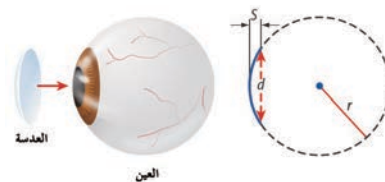


79. البصريات تتيح العدسة اللاصقة ذات العمق المناسب الملاءمة الجيدة

ونفاذ الأكسجين. يمكن حساب عمق العدسة باستخدام المعادلة

حيث S يمثل العمق و r يمثل نصف قطر

التكور. d يمثل القطر. وجميع الوحدات بالمليمتر.



a. إذا كان عمق العدسة اللاصقة 1.15 ملميمترًا ونصف قطر التكور 7.50 ملميمترات، فما قطر العدسة اللاصقة؟ **7.98 mm**

b. إذا زاد عمق العدسة اللاصقة بمقدار 0.1 ملميمترًا وقطر العدسة يساوي 8.2 ملميمترات، فما نصف قطر التكور المطلوب؟ **7.35 mm**

c. إذا كان نصف قطر التكور يظل ثابتًا، فهل يزيد عمق العدسة اللاصقة أم ينقص إذا زاد القطر؟ **يزيد**

80. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تبحث في متوسط معدلات التغير للدوال الأسية.

a. التمثيل البياني بالنسبة إلى الدوال الأسية التي تُكتب بالصيغة $f(x) = x^n$. مثل بيانيًا دالة لقيمتي n حيث إن $0 < n < 1$ ، وقيمتي n حيث إن $n > 1$

b. العرض الجدولي اسخ الجدول وأكملهُ. باستخدام تمثيلات بيانية من الجزء a لتحليل متوسط معدلات التغير للدوال حيث x تقترب من اللانهاية.

صف هذا المعدل بأنه متزايد، أو ثابت، أو متناقص.

n	$f(x)$	متوسط معدل التغير حيث $x \rightarrow \infty$
$n > 0$ < 1		تناقص حيث $x \rightarrow \infty$
		تناقص حيث $x \rightarrow \infty$
$n = 1$		ثابتة حيث $x \rightarrow \infty$
$n = 1$		تزايد حيث $x \rightarrow \infty$
		تزايد حيث $x \rightarrow \infty$

انظر ملحق إجابات الفصل 2.

c. العرض الكلامي ضع فرضية حول متوسط معدل التغير للدالة الأسية حيث x تقترب من اللانهاية في الفترات $0 < n < 1$ و $n > 1$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

81. تحدّ وضع أن $\sqrt{\frac{8^n \cdot 2^7}{4-n}} = 2^{2n+3} \sqrt{2^{n+1}}$ انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

82. الاستنتاج ضع في اعتبارك أن $y = 2^x$

a. صف قيمة y إذا كان $x < 0$ **$0 < y < 1$**

b. صف قيمة y إذا كان $0 < x < 1$ **$1 < y < 2$**

c. صف قيمة y إذا كان $x > 1$ **$y > 2$**

d. اكتب فرضية حول العلاقة بين قيمة الأساس وقيمة الأس إذا كان الأس أكبر من أو أصغر من 1. برر إجابتك. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

83. ما قبل الكتابة مشروعك الرئيس هو أن تشرح لطالب في السنة الأولى من المرحلة الثانوية أربع جلسات حول الدوال الجذرية والأسية. ضع خطة للكتابة تتناول فيها الهدف والغرض والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل. راجع عمل الطلاب.

84. الاستنتاج بافتراض أن $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ حيث a و b عددان صحيحان ليس لهما عامل مشترك، حدد ما إذا كانت كل عبارة صواب أم خطأ. اشرح.

a. بما أن قيمة b زوجية وقيمة a فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

b. بما أن قيمة a زوجية وقيمة b فردية، إذن، فالدالة غير معرفة بالنسبة إلى $x < 0$.

c. بما أن قيمة a تساوي 1، إذن، فالدالة معرّفة لجميع x . **a-c. انظر الحاشية.**

85. الاستنتاج ضع في اعتبارك أن $f(x) = x^{\frac{1}{n}} + 5$. كيف تتوقع أن يتغير التمثيل البياني للدالة بزيادة n إذا كان n عددًا فرديًا وأكبر من أو يساوي 3؟ انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

86. الكتابة في الرياضيات استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجدول والبيانات لتوضيح العلاقة بين الدوال بالصيغة الأسية والصيغة الجذرية. راجع عمل الطلاب.

4 التقويم

كرة البلور اطلب من الطلاب أن يكتبوا من وجهة نظرهم كيف سيساعدهم درس اليوم الذي يتناول الدوال أحادية الحد في درس الغد الذي يتناول الدوال كثيرة الحدود.

إجابات إضافية

84c. خطأ؛ الإجابة النموذجية: يمكن

كتابة $f(x)$ بصيغة $\sqrt[n]{x^b}$ إذا

كان b عددًا فرديًا، فحينها يكون $f(x)$ محدداً لكل x . إذا كان b عددًا زوجيًا، فحينها يكون $x \geq 0$ لأن الجذر الزوجي للعدد السالب يكون غير محدد.

$$\begin{aligned} 88. \quad (f+g)(x) &= x^2 - x + 9, \\ D &= (-\infty, \infty); (f-g)(x) = x^2 - 3x - 9, D = (-\infty, \infty); \\ (f \times g)(x) &= x^3 + 7x^2 - 18x, \\ D &= (-\infty, \infty); \left(\frac{f}{g}\right)(x) \\ &= \frac{x^2 - 2x}{x + 9}, D = (-\infty, -9) \cup (-9, \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 89. \quad (f+g)(x) &= \frac{x^3 + x^2 - 1}{x + 1}, \\ D &= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty); \\ (f-g)(x) &= \frac{-x^3 - x^2 + 2x + 1}{x + 1}, \\ D &= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty); \left(\frac{f}{g}\right)(x) \\ &= \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}, \\ D &= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90. \quad (f+g)(x) &= \frac{x^3 - 2x^2 - 35x + 3}{x - 7}, \\ D &= (-\infty, 7) \cup (7, \infty); \\ (f-g)(x) &= \frac{-x^3 - 2x^2 - 35x - 3}{x - 7}, \\ D &= (-\infty, 7) \cup (7, \infty); \\ (f \times g)(x) &= \frac{3x^2 + 15x}{x - 7}, \\ D &= (-\infty, 7) \cup (7, \infty); \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{3}{x^3 - 2x^2 - 35x}, \\ D &= (-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty) \end{aligned}$$

مراجعة شاملة

87. الأمور المالية إذا قمت بإيداع مبلغ قدره 1,000 AED بمعدل فائدة سنوية مركبة r ، إذا، يُحسب رصيد الحساب بعد 3 أعوام بالمعادلة $B(r) = 1000(1+r)^3$. (الدرس 7-1)

a. أوجد صيغة لمعدل الفائدة r اللازمة لتحقيق رصيد B في الحساب بعد 3 أعوام.

b. ما معدل الفائدة الذي يحقق رصيد 1,100 AED بعد 3 أعوام؟ **3.23%**

أوجد $(f \circ g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, و $(\frac{f}{g})(x)$ لكل من $f(x)$ و $g(x)$. حدد مجال كل دالة جديدة. (الدرس 1-6) **88-90. انظر الهامش.**

$$88. \quad f(x) = x^2 - 2x \\ g(x) = x + 9$$

$$89. \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \\ g(x) = x^2 - 1$$

$$90. \quad f(x) = \frac{3}{x-7} \\ g(x) = x^2 + 5x$$

استخدم التمثيل البياني $f(x)$ لتمثيل $|f(x)| = g(x)$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًا. (الدرس 5-1) **91-93. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

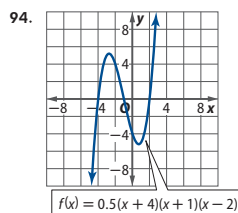
$$91. \quad f(x) = -4x + 2$$

$$92. \quad f(x) = \sqrt{x+3} - 6$$

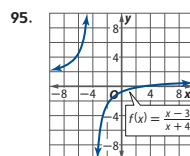
$$93. \quad f(x) = x^2 - 3x - 10$$

95. f تزيد عند $(-\infty, -4)$ وتزيد عند $(-4, \infty)$.

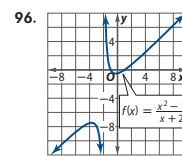
استخدم التمثيل البياني لكل دالة لتقدير الفترات لأقرب 0.5 وحدة في الدالة المتزايدة أو المتناقصة أو الثابتة. ادمج إجابتك بالأرقام. (الدرس 4-1)



94. f تزيد في $(-\infty, -3)$ وتتناقص في $(-3, 1)$ وتزيد في $(1, \infty)$.



96. f تزيد في $(-\infty, -3.5)$ وتتناقص في $(-3.5, -2)$ وتتناقص في $(-2, 0)$ وتزيد في $(0, \infty)$.



حوّل إلى أبسط صورة. (الدرس 2-0)

$$97. \quad \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{2}i}$$

$$98. \quad \frac{2 - \sqrt{2}i}{3 + \sqrt{6}i}$$

$$99. \quad \frac{(1+i)^2}{(-3+2i)^2}$$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

100. اختبارة SAT/ACT إذا كان m و n عددين موجبين، فأَي مما يلي يكافئ $\frac{2m\sqrt{18n}}{m\sqrt{2}}$ ؟

- A $3m\sqrt{n}$ D $6\sqrt{n}$
B $6m\sqrt{n}$ E $8\sqrt{n}$
C $4\sqrt{n}$

101. مراجعة إذا كانت $x^2y^3 = f(x, y)$ و $f(a, b) = 10$ ، فما قيمة $f(2a)$ ؟ 2b

- F 50 J 320
G 100 K 640
H 160

102. مراجعة يختلف عدد الدقائق m الذي يستغرقه c من الأطفال لتناول p قطع من البيتزا طردنيًا حسب عدد قطع البيتزا وعكسيًا حسب عدد الأطفال. إذا كان 5 أطفال يستغرقون 30 دقيقة لتناول 10 قطع من البيتزا، فكم عدد الدقائق التي يستغرقها 15 من الأطفال لتناول 50 قطعة من البيتزا؟

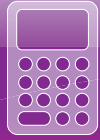
- A 30 C 50
B 40 D 60

103. بما أن $\sqrt{5m+2} = 3$ ، إذا $m = ?$

- F 3 H 5
G 4 J 6

التعليم المتميز

امتداد اطلب من الطلاب الإشارة إلى مجموعة من القيم لـ a و b في $a = \sqrt{x+b}$ التي تكون نتيجتها دائمًا حلاً حقيقيًا واحدًا على الأقل. عندما يكون كل من a و b عددين صحيحين موجبين أو عندما يكون a عددًا صحيحًا موجبًا و b عددًا صحيحًا سالبًا، تكون النتيجة دائمًا حلاً حقيقيًا واحدًا على الأقل.



مختبر تقنية التمثيل البياني سلوك التمثيلات البيانية

1-1

الهدف:

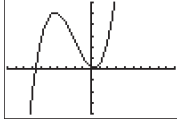
- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً وتحليل سلوكها.

في الدرس 1-3، حلّلت السلوك الطرقي للدوال من خلال إنشاء جدول قيم وتمثيله بيانياً. فيما يتعلق بالدالة كثيرة الحدود، يمكن تحديد سلوك التمثيل البياني من خلال تحليل حدود معينة من الدالة.

النشاط التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود

ارسم كل تمثيل بياني وحدد السلوك الطرقي للدالة.

a. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



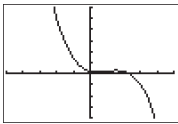
[-10, 10] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

x	-10	-5	-2	0	2	5	10
f(x)	-358	47	26	2	26	257	1,562

استخدم جدول القيم لرسم التمثيل البياني.

في التمثيل البياني لـ $f(x)$ ، يتضح أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b. $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

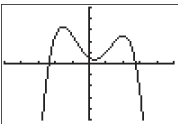


[-5, 5] scl: 1 by [-40, 60] scl: 10

x	-8	-5	-2	0	2	5	8
g(x)	1,442	422	50	2	2	-118	-670

في التمثيل البياني لـ $g(x)$ ، يتضح أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

c. $h(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2 - 4x + 2$



[-5, 5] scl: 1 by [-20, 20] scl: 4

x	-8	-5	-2	0	2	5	8
h(x)	-4,190	-578	10	2	10	-368	-3,230

في التمثيل البياني لـ $h(x)$ ، يتضح أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$

حلل النتائج

- انظر إلى حدود كل دالة أعلاه. ما الاختلافات التي تلاحظها؟ **انظر الهامش.**
- ما مدى تأثير هذه الاختلافات على السلوك الطرقي للرسم البياني لكل دالة؟ **انظر الهامش.**
- ضع نمطاً لكل نوع من أنواع السلوك الطرقي المحتمل للدالة كثيرة الحدود. **ملحق إجابات الوحدة 1.**
- اعرض مثلاً للدالة كثيرة الحدود بتمثيل بياني يقترب من اللانهاية الموجبة عندما تقترب x من اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = x^4$

تمارين

صف السلوك الطرقي لكل دالة دون إنشاء جدول قيم أو تصميم تمثيل بياني.

- $f(x) = -2x^3 + 4x$
- $f(x) = 5x^4 + 3$
- $f(x) = -x^5 + 2x - 4$
- $g(x) = 6x^6 - 2x^2 + 10x$
- $g(x) = 3x - 4x^4$
- $h(x) = 6x^2 - 3x^3 - 2x^6$

نصيحة دراسية

جدول القيم تأكد من استخدام نقاط كافية للحصول على الشكل الإجمالي للتمثيل البياني.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$;;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$

14 | الدرس 1-1

1 التركيز

الهدف التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود وتحليل سلوكها.

نصيحة دراسية

إذا وجد الطلاب أن التمثيل البياني الموضح في نافذة العرض القياسية غير كافٍ، فيمكنهم الضغط على **ZOOM 3** في نافذة التمثيل البياني للتصغير، حتى يتم عرض المزيد من التمثيل البياني.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية، بقدرات مختلفة. اجعل الطلاب يفكروا في أجزاء النشاط a-c.

أسأل:

- كيف تكون المعادلة في الجزء a مشابهة للمعادلة في الجزء b؟ **كلتاها تشتملان على الحدود $6x^2 - 4x + 2$**

- كيف يكون التمثيل البياني للمعادلة في الجزء a هو نفسه التمثيل البياني للمعادلة في الجزء b؟ **كلتاها تمران عبر النقطتين (0, 2).**

- انظر إلى المعادلة في الجزء c. هل تتوقع أن يمر التمثيل البياني الخاص بها عبر النقطتين (0, 2) أيضاً؟ **اشرح. نعم؛ فحدها الثابت 2 أيضاً.**

اجعل الطلاب يعملوا على تمارين "حلل النتائج" 1-4.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين 5-10.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 9 لتقويم مدى قدرة الطلاب على التمثيل البياني لدالة أحادية الحد ووصف سلوكها الطرقي.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب أن يتنبؤوا بما سيكون عليه السلوك الطرقي للتمثيل البياني لكل معادلة في النشاط إذا غيرت المعاملات الرئيسية (معاملات الحد الأكبر) العلامات. ثم اجعل الطلاب يرسموا كلا الصيغتين لكل معادلة بيانياً لمراجعة تنبؤاتهم.

إجابات إضافية

- الإجابة النموذجية: الحدود الأولى مختلفة كلها. ويشتمل الحد الأول لـ $f(x)$ على معامل موجب ويشتمل الحد الأول لـ $g(x)$ على معامل سالب. ويشتمل $h(x)$ على حد آخر في الأمام، $-x^4$.
- الإجابة النموذجية: من $f(x)$ إلى $g(x)$ ، يظهر السلوك الطرقي معكوساً. ويختلف $h(x)$ عن غيره في أنه عندما يقترب x من اللانهاية الموجبة والسالبة على حد سواء، يقترب $h(x)$ من اللانهاية السالبة.

الدوال كثيرة الحدود

1-2

الدرس

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-2 حلل التمثيلات البيانية للدوال.

الدرس 1-2 مثلّ الدوال كثيرة الحدود بيانيًا. ضع نموذجًا لبيانات من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

بعد الدرس 1-2 مثل المتباينات كثيرة الحدود بيانيًا وجعلها.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ بهذا الدرس.

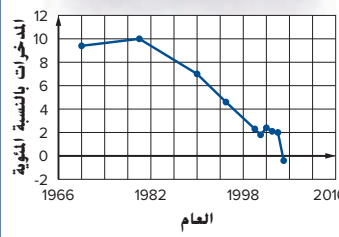
أسأل:

- انظر إلى التمثيل البياني. وضح الموضع الذي يغير عنده التمثيل البياني للبيانات اتجاهه. 1,980، 2,000، بعد 2,000
- هل تظهر أي فواصل أو فراغات أو فجوات أو انحناءات كبيرة في التمثيل البياني؟ لا

- هل تتوقع وضع نموذج لهذا التمثيل البياني بواسطة دالة خطية؟ لا. فالبيانات تميل إلى أن تشكل منحنى وليس خطًا.

(يتبع في الصفحة التالية)

المدرجات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح



- تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانيًا.
- يوضح التمثيل البياني باستخدام مخطط التشتت إجمالي المدرجات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية. يمكن في كثير من الأحيان تمثيل بيانات القيم القصوى النسبية المتعددة بشكل أفضل باستخدام الدالة كثيرة الحدود.

الحالي

لماذا؟

السابق

- لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال.

1
2

مفردات جديدة

- الدالة كثيرة الحدود (polynomial function)
- دالة كثيرة الحدود من الدرجة n (polynomial function of degree n)
- معامل الحد الأكبر (leading coefficient)
- اختبار الحد الرئيس (leading-term test)
- دالة من الدرجة الرابعة (quartic function)
- نقطة انعطاف (turning point)
- صيغة تربيعية (quadratic form)
- صفر متكرر (repeated zero)
- التكرار (multiplicity)

1 التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود في الدرس 1-1. تعلمت الخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد. الدوال أحادية الحد هي أكثر دالة أساسية في الدوال كثيرة الحدود. وبشكل إيجابي قيم المجموع والفرق للدوال أحادية الحد أنواعًا أخرى من الدوال كثيرة الحدود.

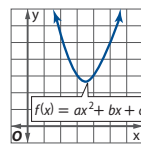
لنفرض أن n عدد صحيح غير سالب وأن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية ذات $a_n \neq 0$ إذا الدالة التي تمثلها الصيغة التالية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

تسمى دالة كثيرة الحدود من الدرجة n . يُعد معامل الحد الأكبر في الدالة كثيرة الحدود معامل المتغير ذا الأس الأكبر. معامل الحد الأكبر للدالة $f(x)$ هو a_n

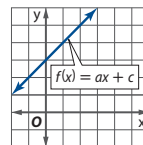
أنت بالفعل على دراية بالدوال كثيرة الحدود التالية.

الدوال التربيعية



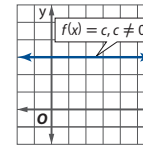
الدرجة: 2

الدوال الخطية



الدرجة: 1

الدوال الثابتة



الدرجة: 0

الدالة الصفرية هي دالة ثابتة بدون درجة. وتوضح التمثيلات البيانية للدوال كثيرة الحدود خصائص معينة.

التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود		
أمثلة خارجة عن التعريف	مثال	
لا يحتوي التمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود على فواصل أو فراغات أو فجوات أو زوايا حادة.	الدوال كثيرة الحدود محددة ومتصلة لجميع الأعداد الحقيقية وبها منحنيات سلسلة دورانية.	

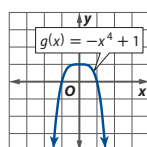
تذكر أن التمثيل البياني للدوال أحادية الحد غير الثابتة من الدرجة الزوجية يشبه التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$. في حين يشبه التمثيل البياني للدوال أحادية الحد من الدرجة الفردية التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3$ ويمكنك استخدام الأشكال والخصائص الأساسية للدوال أحادية الحد من الدرجة الزوجية والفردية وما تعلمته في الدرس 1-5 عن عمليات التحويل من أجل التحويل إلى التمثيل البياني للدوال أحادية الحد.

مثال 1 التحويلات البيانية للدوال أحادية الحد

ارسم تمثيلاً بيانياً لكل دالة فيما يلي.

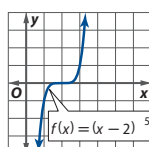
b. $g(x) = -x^4 + 1$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الزوجية، إذاً يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ ويعد التمثيل البياني للدالة $g(x) = -x^4 + 1$ هو التمثيل البياني للدالة $y = x^4$ المنعكسة في المحور الأفقي x . بعد إزاحتها لأعلى بمقدار درجة واحدة.



a. $f(x) = (x - 2)^5$

بما أن هذه الدالة من الدرجة الفردية، إذاً يشبه تمثيلها البياني التمثيل البياني للدالة $y = x^3$. التمثيل البياني للدالة $f(x) = (x - 2)^5$ هو التمثيل البياني للدالة $y = x^5$ بعد إزاحتها لليمين بمقدار وحدتين.



تمرين موجه 1A-B. انظر الهامش.

1A. $f(x) = 4 - x^3$

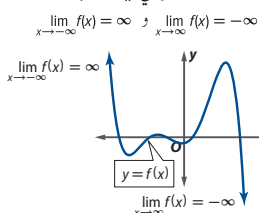
1B. $g(x) = (x + 7)^4$

في الدرس 3-1، تعلمت أن السلوك الطرفي للدالة يوضح كيف يكون سلوك الدالة أو كيف تتغير رأسياً أو أفقياً عند أي طرف في التمثيل البياني لها. بما أن $x \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow \infty$. إذاً السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة الحدود يحدده الحد الرئيس لها. يستخدم اختبار الحد الرئيس القيمة الأسية ومعامل هذا الحد لتحديد السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

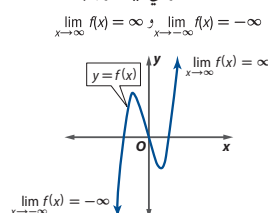
المفهوم الأساسي اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

يمكن وصف السلوك الطرفي لأي دالة كثيرة حدود غير ثابتة $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ بإحدى الطرق الأربع التالية. كما هو محدد بالدرجة n للدالة كثيرة الحدود ومعامل الحد الأكبر لها a_n .

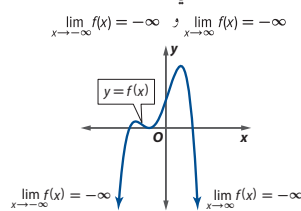
n عدد فردي. a_n سالب



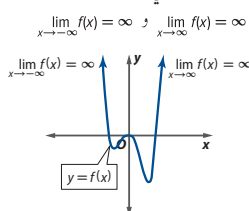
n عدد فردي. a_n موجب



n زوجي. a_n سالب



n زوجي. a_n موجب



المفهوم الأساسي تسلط المربعات الضوء على التعريفات والقواعد والأفكار الأخرى المهمة. وتساعد التمثيلات المتعددة -الكلمات والرموز والأمثلة والنماذج- الطلاب على الفهم.

16 | الدرس 1-2 | الدوال كثيرة الحدود

- هل تتوقع وضع نموذج لهذا التمثيل البياني بواسطة دالة تربيعية؟ اشرح. لا، فالمنحنى التربيعي يشتمل على نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى واحدة، بينما يبدو أن هذا التمثيل البياني يشتمل على نقطتي نهاية عظمى على الأقل.

1 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً

مثال 1 يعرض كيفية التمثيل البياني لتحويلات الدوال أحادية الحد. مثال

2 يوضح كيف يتم تطبيق اختبار الحد الرئيس على دالة كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية لتحديد سلوك النهاية للتمثيل البياني للدالة. الأمثلة 3-5 توضح كيفية إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود. المثال 6 يوضح كيفية استخدام اختبار الحد الرئيس وأصفار كثيرة الحدود لتمثيل كثيرة الحدود بيانياً.

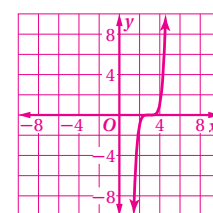
التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

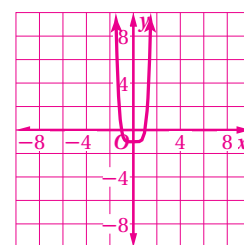
مثال إضافي

1 مثل كل دالة بيانياً.

a. $f(x) = (x - 3)^5$

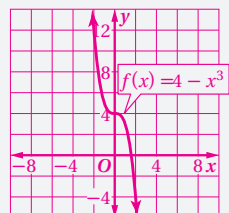


b. $f(x) = x^6 - 1$

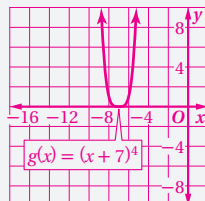


إجابات إضافية (تمرين موجه)

1A.



1B.



16 | الدرس 1-2 | الدوال كثيرة الحدود

مثال إضافي

2

صف سلوك النهاية للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

a. $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 +$

$x - 1$ الدرجة تساوي 4

والمعامل الرئيسي (معامل

الحد الأكبر) يساوي

3. ولأن الدرجة زوجية

والمعامل الرئيسي موجب،

فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b. $f(x) = -3x^2 + 2x^5$

$-x^3$ مكتوبة بالصيغة

القياسية، والدالة هي

$f(x) = 2x^5 - x^3 - 3x^2$

الدرجة تساوي 5 والمعامل

الرئيسي يساوي 2. لأن الدرجة

فردية والمعامل الرئيسي موجب،

فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

c. $f(x) = -2x^5 - 1$

تساوي 5 والمعامل الرئيسي

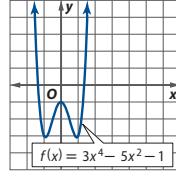
يساوي -2. ولأن الدرجة فردية

والمعامل الرئيسي سالب، فإن

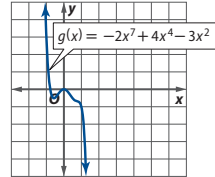
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

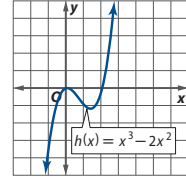
a. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 1$



b. $g(x) = -3x^2 - 2x^7 + 4x^4$



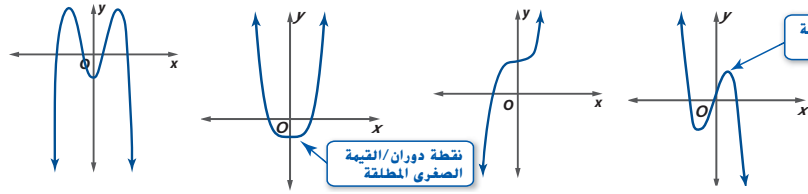
c. $h(x) = x^3 - 2x^2$



2A. $g(x) = 4x^5 - 8x^3 + 20$

2B. $h(x) = -2x^6 + 11x^4 + 2x^2$

فكر في الأشكال التالية لمجموعة صغيرة من الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة النموذجية أو الدوال التكعيبية أو الدوال كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة أو دالة من الدرجة الرابعة الموضحة.



دالة من الدرجة الرابعة النموذجية

الدوال التكعيبية النموذجية

لاحظ عدد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x . بما أن التقاطع مع المحور الأفقي x يوافق صفراً حقيقياً من الدالة، إذاً يمكنك أن تعرف أن الدوال التكعيبية تحتوي على 3 أصغار على الأكثر وأن الدوال من الدرجة الرابعة تحتوي على 4 أصغار على الأكثر.

نقاط الانعطاف توضح مكان تغير التمثيل البياني للدالة من الزيادة إلى النقصان والعكس. يتم تحديد القيمتين العظمى والصغرى أيضاً على نقاط الانعطاف. لاحظ أن الدوال التكعيبية تحتوي على نقطتي انعطاف على الأكثر وأن من الدرجة الرابعة تحتوي على 3 نقاط انعطاف على الأكثر. يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لأي دالة كثيرة الحدود.

17

مثال 2 تطبيق اختبار الحد الرئيس

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس.

الدالة من الدرجة 4 ومعامل الحد الأكبر يساوي 3. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الأكبر موجب، إذاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

اكتب بصيغة قياسية $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 3x^2$ والدالة هنا من الدرجة 7 يساوي -2. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الأكبر سالب، إذاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

الدرجة تساوي 3 ومعامل الحد الأكبر يساوي 1. بما أن الدرجة فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، إذاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

تدوين موجّه

انتبه!

الصيغة القياسية ليس بالضرورة أن يكون الحد الرئيس للدالة كثيرة الحدود هو الحد الأول فيها. ومع ذلك، يكون الحد الرئيس هو الحد الأول دائماً في الدالة كثيرة الحدود عند كتابة الدالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. تذكر أن الدالة كثيرة الحدود تُكتب بالصيغة القياسية إذا كانت حدودها مكتوبة بالترتيب التنازلي للأسس.

2A. الدالة من الدرجة 5

والمعامل الحد الأكبر يساوي

4. بما أن الدرجة فردية

والمعامل الحد الأكبر موجب،

إذاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

2B. الدالة من الدرجة 6

والمعامل الحد الأكبر يساوي

-2. بما أن الدرجة زوجية

والمعامل الحد الأكبر سالب،

إذاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

نقطة دوران/القيمة العظمى النسبية

نقطة دوران/القيمة الصغرى المطلقة

التعليم باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب صنع فيديو

يشرح كيفية استخدام اختبار الحد الرئيسي

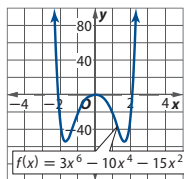
لتحديد سلوك النهاية لرسم بياني لدالة كثيرة

الحدود. انشر الفيديو على موقع الإنترنت الخاص

بالوحدة حتى يستطيع الطلاب استخدامه كمرجع

إضافي خارج الوحدة.

المفهوم الأساسي الأصغار ونقاط الانعطاف للدوال كثيرة الحدود



تحتوي الدالة كثيرة الحدود f من الدرجة $n \geq 1$ على n من الأصغار الحقيقية المميزة على أكثر تقدير وعلى $n - 1$ من نقاط الانعطاف على أكثر تقدير.

مثال لنفرض أن $f(x) = 3x^6 - 10x^4 - 15x^2$. إذا تحتوي الدالة f على 6 أصغار حقيقية مميزة على الأكثر و 5 نقاط انعطاف على الأكثر. يوضح التمثيل البياني للدالة f أن الدالة تحتوي على 3 أصغار حقيقية و 3 نقاط انعطاف.

نصيحة دراسية

المراجعة تذكر من الدرس 2-1 أن التقاطع مع المحور الأفقي x في التمثيل البياني للدالة يُسمى أصغار الدالة. يُطلق على حلول المعادلة المطابقة جذور المعادلة.

مثال إضافي

3 اذكر عدد الأصغار الحقيقية المحتملة ونقاط دوران $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x$ ثم حدد جميع الأصغار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل. **الدرجة تساوي 3.** لذلك تشتمل f على 3 أصغار حقيقية مميزة على الأكثر ونقطتي دوران على الأكثر. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x = x(x+1)(x+4)$ إذا تشتمل f على ثلاثة أصغار هي 0 و -1 و -4.

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال كثيرة الحدود تتشكل الدوال كثيرة الحدود بجمع أو طرح دوال وثوابت أحادية الحد.

يتميز التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود بالصيغة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n \neq 0, n$ عدد صحيح غير سالب ومعاملات كل حد أعداد حقيقية، تتسم بالخصائص التالية.

■ الدرجة: n

■ أقصى عدد لنقاط الدوران: $n - 1$

■ عند صفر المضاعفة الفردية، يعبر التمثيل البياني المحور x .

■ عند صفر المضاعفة الزوجية، يلمس التمثيل البياني المحور x .

■ بين الأصغار، يكون التمثيل البياني فوق المحور x أو أسفل منه.

■ يتحدد سلوك النهاية للتمثيل البياني من خلال الحد الرئيسي له باستخدام اختبار الحد الرئيسي.

تذكر أنه إذا كانت الدالة f كثيرة الحدود وأن c هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني للدالة f ، فيمكن أن نقول إن:

- c صفر من f .
- $x = c$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.
- $(x - c)$ عامل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$.

يمكنك إيجاد أصغار بعض الدوال كثيرة الحدود باستخدام أساليب التحليل ذاتها التي استخدمتها لحل المعادلات التربيعية.

المثال 3 أصغار الدوال كثيرة الحدود

اذكر عدد الأصغار الحقيقية المحتملة ونقاط انعطاف الدالة $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ ثم حدد جميع الأصغار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

بما أن المعادلة من الدرجة 3، إذا تحتوي الدالة f على 3 أصغار حقيقية مميزة على الأكثر و 3-1 أو نقطتي انعطاف على أكثر تقدير. لإيجاد الأصغار الحقيقية، أوجد حل المعادلة ذات الصلة $f(x) = 0$ بالتحليل إلى عوامل.

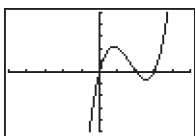
$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \quad \text{افرض أن } f(x) \text{ تساوي 0}$$

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0 \quad \text{حلل إلى العامل المشترك الأكبر: } x$$

$$x(x - 2)(x - 3) = 0 \quad \text{حلل إلى العوامل الكاملة.}$$

إذا، تحتوي الدالة f على ثلاثة أصغار مميزة 0 و 2 و 3. يتوافق هذا مع الدالة التكعيبية التي تحتوي على 3 أصغار حقيقية مميزة على الأكثر.

التحقق يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لرسم $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ والتأكد على هذه الأصغار. بالإضافة إلى ذلك، يمكنك أن تعرف أن التمثيل البياني يحتوي على نقطتي انعطاف، وهذا يتوافق مع الدوال التكعيبية التي تحتوي على نقطتي انعطاف على الأكثر.



[-5, 5] scl: 1 by [-5, 5] scl: 1

تبرهن موجه
اذكر عدد الأصغار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم حدد جميع الأصغار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

$$3A. f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$$

$$3B. f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$$

4 أصغار و 3 نقاط انعطاف: $\pm\sqrt{5}$ و $\pm\sqrt{3}$ 3 أصغار ونقطتان انعطاف: 0 و 9 و -3

في بعض الحالات، يمكن تحليل الدالة كثيرة الحدود إلى عوامل باستخدام الأساليب التربيعية إذا كانت لها صيغة تربيعية.

المفهوم الأساسي الصيغة التربيعية

الكلمات يُكتب تعبير الدالة كثيرة الحدود في x بالصيغة التربيعية إذا كتب بالصيغة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد a و b و c بحيث يكون u تعبيرًا في x .

الرموز تكتب $14 - 5x^2 - x^4$ بالصيغة التربيعية لأن التعبير يمكن كتابته بالصيغة التالية $14 - 5(x^2) - (x^2)^2$ بما أن $u = x^2$. إذا أصبح التعبير $14 - 5u - u^2$

نصيحة دراسية

المراجعة لمراجعة أساليب حل المعادلات التربيعية، انظر الدرس 3-0.

18 | الدرس 1-2 | الدوال كثيرة الحدود

التعليم المتمايز

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل معًا في مجموعات للتمثيل البياني للدوال كثيرة الحدود التي تشتمل على درجة معينة وعدد من الجذور حقيقية، على سبيل المثال، الدرجة 3 و 3 جذور حقيقية أو الدرجة 3 وجذر حقيقي واحد فقط. ثم اطلب من الطلاب تجربة المعاملات في الصيغة العامة لكثيرة الحدود لإيجاد الدوال باستخدام التمثيلات البيانية التي تشبه مخططاتهم.

18 | الدرس 2-2 | الدوال كثيرة الحدود

أمثلة إضافية

4 اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط دوران $h(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل. **الدرجة** تساوي 4. إذا تشتمل h على 4 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و 3 نقاط دوران على الأكثر $h(x) = x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$ إذا تشتمل h على أربعة أصفار حقيقية مميزة، $-1, \pm\sqrt{3}, 1$.

5 اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط دوران $h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2$ حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل. **الدرجة** تساوي 4. إذا تشتمل h على 4 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و 3 نقاط دوران على الأكثر $h(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 = x^2(x+2)(x+3)$ ، إذا تشتمل h على ثلاثة أصفار، 0 و -2 و -3 من بين الأصفار، يكون 0 مكرراً.

نصائح للمعلمين الجدد

الأصفار أكد للطلاب أنه يمكنهم التأكد من الأصفار (حيث يمر التمثيل البياني عبر المحور x) وعدد نقاط الدوران باستخدام حاسبة تمثيل بياني لتمثيل الدالة كثيرة الحدود بيانياً.

التهاس اشرح للطلاب أنه يمكن أن يكون التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود مماساً للمحور x عند نقطة محددة، ويمكن أن يتقاطع مع المحور الأفقي x عند نقطة مختلفة، على النحو الموضح في الشكل 2.2.2.

مثال 4 أصفار الدالة كثيرة الحدود بالصيغة التربيعية

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الانعطاف للدالة $g(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذا g تحتوي على 4 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و 4-1 أو 3 نقاط انعطاف على الأكثر. نكتب هذه الدالة بالصيغة التربيعية لأن $4 - 3(x^2) - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ لنفرض أن $u = x^2$

$$(x^2)^2 - 3(x^2) - 4 = 0 \quad \text{افرض أن } g(x) \text{ تساوي } 0$$

$$u^2 - 3u - 4 = 0 \quad \text{عوّض عن } u \text{ بقيمة } x^2$$

$$(u + 1)(u - 4) = 0 \quad \text{حلل التعبير التربيعي إلى عوامل}$$

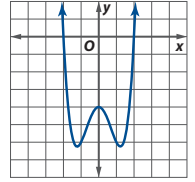
$$(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0 \quad \text{عوّض عن } x^2 \text{ بقيمة } u$$

$$(x^2 + 1)(x + 2)(x - 2) = 0 \quad \text{حلل إلى العوامل الكاملة}$$

$$x^2 + 1 = 0 \quad x + 2 = 0 \quad x - 2 = 0 \quad \text{خاصية الناتج الصفري}$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad x = -2 \quad x = 2 \quad \text{أوجد حل } x$$

بما أن ناتج $\pm\sqrt{-1}$ ليس أصفاراً حقيقية، إذا تحتوي g على صفرين حقيقيين مميزين، -2 و 2. يتوافق ذلك مع الدالة التربيعية. يؤكد ذلك التمثيل البياني للدالة $4 - 3x^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4$ في الشكل 1.2.1. لاحظ أنه يوجد 3 نقاط انعطاف، وهذا يتوافق أيضاً مع مع الدالة التربيعية.



الشكل 1.2.1

تمرين موجه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

4A. $g(x) = x^4 - 9x^2 + 18$

4B. $h(x) = x^5 - 6x^3 - 16x$

4A. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط انعطاف؛ $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}, 0$

4B. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط انعطاف؛ $0, \pm\sqrt{8}$

إذا وُجد عامل $(x - c)$ يتكرر أكثر من مرة بالصيغة التي تم تحليلها بالكامل إلى عوامل للدالة $f(x)$ ، فإن الصفر المرتبط بها c يُسمى **صفراً مكرراً**. عندما يتكرر الصفر بعدد زوجي من المرات، سيكون التمثيل البياني مماساً للمحور الأفقي x عند هذه النقطة. عندما يتكرر الصفر بعدد فردي من المرات، سيقطع التمثيل البياني المحور الأفقي x عند هذه النقطة. يصبح التمثيل البياني مماساً لمحور عندما يلمس المحور عند هذه النقطة، ولكن لا يقطعه.

مثال 5 الدوال كثيرة الحدود ذات الأصفار المتكررة

اذكر عدد الأصفار الحقيقية المحتملة ونقاط الانعطاف للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

بما أن الدالة من الدرجة 4، إذا h تحتوي على 4 أصفار حقيقية مميزة على الأكثر و 4-1 أو 3 نقاط انعطاف على الأكثر. أوجد الأصفار الحقيقية.

$$-x^4 - x^3 + 2x^2 = 0 \quad \text{افرض أن } h(x) \text{ تساوي } 0$$

$$-x^2(x^2 + x - 2) = 0 \quad \text{حلل إلى العامل المشترك الأكبر، } -x^2$$

$$-x^2(x - 1)(x + 2) = 0 \quad \text{حلل إلى العوامل الكاملة}$$

يحتوي التعبير السابق على 4 عوامل. ولكن حل x ينتج عنه 3 أصفار، 0 و 1 و -2. ومن بين الأصفار، يتكرر 0 مرتين.

يؤكد التمثيل البياني للدالة $h(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$ في الشكل 1.2.2 على هذه الأصفار ويوضح أن h تحتوي على ثلاث نقاط انعطاف. لاحظ أنه عندما يكون $x = 1$ و $x = -2$ ، فإن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي x ولكن عندما $x = 0$ ، يصبح التمثيل البياني مماساً للمحور الأفقي x .

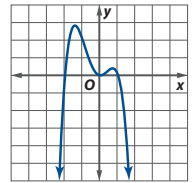
تمرين موجه

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

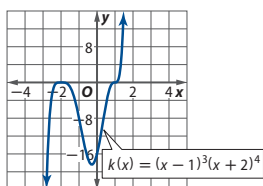
5A. $g(x) = -2x^3 - 4x^2 + 16x$

5B. $f(x) = 3x^5 - 18x^4 + 27x^3$

5B. 5 أصفار حقيقية و 4 نقاط انعطاف؛ 0 و 3 أصفار حقيقية ونقطتان انعطاف؛ -4 و 0 و 2



الشكل 1.2.2



في $h(x) = -x^2(x-1)(x+2)$ من مثال 5، يتكرر الصفر $x=0$ مرتين. في $k(x) = (x-1)^3(x+2)^4$ يتكرر الصفر $x=1$ ثلاث مرات، بينما يتكرر $x=-2$ 4 مرات. لاحظ أنه في التمثيل البياني k الموضح، يقطع المنحنى المحور الأفقي x عند $x=1$ وليس عند $x=-2$. يمكن تعميم هذه الملاحظات كما يلي وتوضيح أنها صحيحة لكل الدوال كثيرة الحدود.

المفهوم الأساسي الأصفار المتكررة للدوال كثيرة الحدود

- بما أن $(x-c)^m$ أكبر قيمة أسية في $(x-c)$ التي تعد عاملاً للدالة كثيرة الحدود f ، إذا تساوى صفراً من **التكرار** m في f ، بحيث يكون m عدداً طبيعياً.
- إذا وجد صفر c له تكرار فردي، فإن التمثيل البياني للدالة f يقطع المحور الأفقي x عند $x=c$ ويغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x=c$.
 - إذا وجد صفر c له تكرار زوجي، فإن التمثيل البياني للدالة f يصبح مماساً للمحور الأفقي x عند $x=c$ ولا تغير قيمة $f(x)$ الإشارة عند $x=c$.

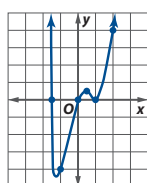
لديك الآن عدة اختبارات وأدوات لمساعدتك في تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً.

مثال 6 تمثيل الدوال كثيرة الحدود بيانياً

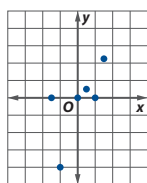
فيما يتعلق بالدالة (a) $f(x) = x(2x+3)(x-1)^2$ ، طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار متكررة، (c) أوجد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانياً.

- a. بما أن ناتج $x(2x+3)(x-1)^2$ يحتوي على حد رئيس في $x(2x)(x)^2$ أو $2x^4$ ، إذا f من الدرجة 4 ومعامل الحد الأكبر يساوي 2. بما أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الأكبر موجب، إذا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- b. الأصفار الحقيقية المميزة هي 0 و -1.5 و 1. كما يتكرر الصفر الموجود عند 1 مرتين.
- c. اختر قيم x التي تقع ضمن الفواصل التي حددتها أصفار الدالة.

الفترة	قيمة x في الفترة	$f(x)$	$(x, f(x))$
$(-\infty, -1.5)$	-2	$f(-2) = 18$	$(-2, 18)$
$(-1.5, 0)$	-1	$f(-1) = -4$	$(-1, -4)$
$(0, 1)$	0.5	$f(0.5) = 0.5$	$(0.5, 0.5)$
$(1, \infty)$	1.5	$f(1.5) = 2.25$	$(1.5, 2.25)$



الشكل 1.2.4



الشكل 1.2.3

- d. ارسم مخططاً للبيانات التي وجدتها (الشكل 1.2.3). يوضح لك السلوك الطرفي للدالة أن التمثيل البياني يتغير رأسياً في نهاية الأمر تجاه اليمين واليسار. تعرف أيضاً أن التمثيل البياني يقطع المحور الأفقي x عند أصفار غير متكررة -1.5 و 0، ولكن لا يقطع المحور الأفقي x عند الصفر المتكرر 1 لأن تكراره زوجي. ارسم منحنى متصل عبر النقاط كما هو موضح في الشكل 1.2.4.

تبرين موجه

فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصفار واذكر تكرار أي أصفار متكررة، (c) أوجد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانياً. 6A-B. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

6A. $f(x) = -2x(x-4)(3x-1)^3$

6B. $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 8x$

مثال إضافي

6 بالنسبة إلى الدالة $f(x) = x(3x+1)(x-2)^2$ ، (a) طبق اختبار الحد الرئيسي، (b) حدد الأصفار واذكر مضاعفة أي أصفار متكررة، (c) أوجد بعض النقاط الإضافية ثم (d) ارسم الدالة بيانياً.

a. الدرجة تساوي 4 والمعامل

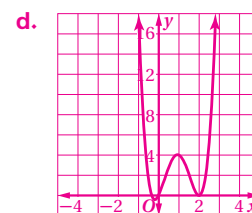
الرئيسي يساوي

3. إذا فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b. الأصفار هي $x=0$ ، $x=-\frac{1}{3}$ ، $x=2$. الصفر الموجود في $x=2$ يشتغل على مضاعفة 2.

c. الإجابة النموذجية: $(-1, 18)$ ، $(-0.1, -0.3087)$ ، $(1, 4)$ ، $(3, 30)$



d.

نصائح للمعلمين الجدد

قيمة المحور x في الفترة يمكن اختيار أي قيمة للمحور x طالما أن القيمة تقع ضمن الفترة.

2 وضع نموذج للبيانات

المثال 7 يوضح كيفية إيجاد أفضل دالة كثيرة الحدود لوضع نموذج لمجموعة البيانات. يعد حساب عدد نقاط الدوران التي تتم ملاحظتها في مخطط انتشار لمجموعة من البيانات خطوة مهمة في وضع نموذج للبيانات.

المتابعة

استكشف الطلاب وضع النماذج باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

أسأل:

- ما مزايا وضع نماذج لمواقف من الحياة اليومية باستخدام الدوال كثيرة الحدود؟ الإجابة النموذجية: لها خصائص معروفة ومفهومة؛ وهناك نماذج متعددة يمكن اعتبارها ضمن نفس مجموعة الدوال؛ ومن السهل نسبياً تنفيذ الحساب الذي يتم إجراؤه لعمل التنبؤات.

2 تمثيل البيانات يمكنك استخدام حاسبة بيانية لتمثيل البيانات التي توضح السلوك الخطي والتربيعي والتكعيبي عن طريق التحقق من عدد نقاط الانعطاف الذي يوضحه مخطط تشتت البيانات.

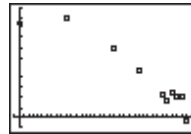
مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام دوال كثيرة الحدود

المدخلات ارجع إلى بداية الدرس. يوضح الجدول متوسط المدخلات الشخصية كنسبة من الدخل المتاح في الولايات المتحدة الأمريكية.

العام	1970	1980	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
النسبة المئوية للمدخلات	9.4	10.0	7.0	4.6	2.3	1.8	2.4	2.1	2.0	-0.4

المصدر: وزارة التجارة الأمريكية

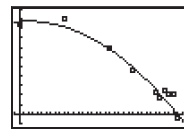
a. صمم مخطط تشتت للبيانات. وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.



$[-1, 36]$ scl: 1 by $[-1, 11]$ scl: 1

أدخل البيانات باستخدام ميزة القائمة في الحاسبة البيانية. لنفرض أن $L1$ عدد الأعوام منذ 1970. ثم صمم مخطط تشتت للبيانات. يشبه منحنى مخطط التشتت البياني للمعادلة التربيعية. لذا سنستخدم الانحدار التربيعي.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قَرِّب كل معامل إلى أقرب ألف واذكر معامل الارتباط. باستخدام أداة QuadReg على الحاسبة البيانية وتقريب كل معامل إلى أقرب ناتج من ألف $f(x) = -0.009x^2 + 0.033x + 9.744$ بما أن معامل الارتباط r^2 للبيانات يساوي 0.96. وهذا أقرب إلى 1. إذا النموذج ملائم جدًا.



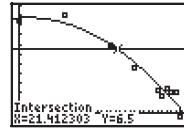
$[-1, 36]$ scl: 1 by $[-1, 11]$ scl: 1

يمكننا رسم الانحدار (غير المقرب) الكامل عبر إرساله إلى قائمة $[Y=]$ إذا أدخلت $L1$ و $L2$ و $Y1$ بعد QuadReg. كما هو موضح في الشكل 12.5. فسيتم إدخال معادلة الانحدار إلى $Y1$. مثل هذه الدالة بيانيًا وكذلك باستخدام مخطط التشتت في نفس نافذة العرض. تتناسب الدالة مع البيانات جيدًا إلى حد معقول.

c. استخدم النموذج لتقدير نسبة المدخلات في 1993.

بما أن 1993 بعد 1970 بمقدار 23 عامًا. استخدم ميزة CALC على الحاسبة لإيجاد $f(23)$ بما أن قيمة $f(23)$ تساوي 5.94. إذا نسبة المدخلات في 1993 كانت تقريبًا 5.94%.

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي وصلت فيه نسبة المدخلات إلى 6.5%.



$[-1, 36]$ scl: 1 by $[-1, 11]$ scl: 1

مثل بيانيًا الخط $y = 6.5$ بالنسبة إلى $Y2$. ثم استخدم تقاطع 5: على قائمة CALC لإيجاد نقطة تقاطع $y = 6.5$ مع $f(x)$. بما أن التقاطع يحدث عندما $x \approx 21$. إذا العام التقريبي الذي وصلت فيه النسبة إلى 6.5% كان تقريبًا 1970 + 21 أو 1991.

تقريب موجّه

7. السكان تم توضيح متوسط عمر سكان الولايات المتحدة الأمريكية المتحدة حسب التوقع في عام 2080.

العام	1900	1930	1960	1990	2020	2050	2080
متوسط العمر	22.9	26.5	29.5	33.0	40.2	42.7	43.9

المصدر: مكتب إحصاءات السكان في الولايات المتحدة

a. اكتب دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. لنفرض أن $L1$ يمثل عدد الأعوام منذ 1900. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = 0.126x + 22.732$

b. قَدِّر متوسط عمر السكان في 2005. **الإجابة النموذجية:** 36

c. وفقًا للنموذج الخاص بك، في أي عام وصل متوسط عمر السكان 30؟ **الإجابة النموذجية:** 1958

مثال إضافي

7

تعداد السكان يوضح الجدول التالي تعداد سكان المدينة خلال فترة 8 سنوات. يشير العام 1 إلى عام 2001. ويشير العام 2 إلى عام 2002 وهكذا.

العام	تعداد السكان
1	5,050
2	5,510
3	5,608
4	5,496
5	5,201
6	5,089
7	5,095
8	4,675

a. قم بإنشاء مخطط انتشار (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات. **الدالة التكعيبية**

$[0, 10]$ scl: 1 by $[0, 7000]$ scl: 1000

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لوضع نموذج لمجموعة البيانات. قرب كل معامل إلى أقرب جزء من الألف واذكر معامل الارتباط. **الألف** واذكر معامل الارتباط. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = 10.020x^3 - 176.320x^2 + 807.469x + 4,454.786$; $r^2 = 0.89$

$[0, 10]$ scl: 1 by $[0, 7000]$ scl: 1000

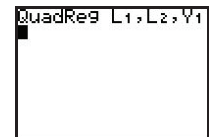
c. استخدم النموذج لتقدير تعداد سكان المدينة خلال عام 2012. **الإجابة النموذجية:** 6,069

d. استخدم النموذج لتحديد العام التقريبي الذي يصل فيه تعداد السكان إلى 10,712. **الإجابة النموذجية:** 2015

الربط بالحياة اليومية

يحتاج خريج كلية يخطط أن يتقاعد عدد سن 65 إلى ادخار متوسط 10,000 AED كل عام نحو التقاعد.

المصدر: Monroe Bank



الشكل 12.5

43. خزانات المياه فيما يلي عدد الأقدام دون الحد الأقصى لمستوى المياه في خزان مياه رينبو بولاية ويسكونسن خلال عشرة أشهر في 2007. (مثال 7)

الشهر	المستوى	الشهر	المستوى
يناير	4	يوليو	9
فبراير	5.5	أغسطس	11
مارس	10	سبتمبر	16.5
أبريل	9	نوفمبر	11.5
مايو	7.5	ديسمبر	8.5

المصدر: Wisconsin Valley Improvement Company

- a. اكتب نموذجًا يوضح مستوى المياه كدالة لعدد الأشهر منذ يناير. **انظر الهامش.**

- b. استخدم النموذج لتقدير مستوى المياه في الخزان في أكتوبر. **14.8 ft**

- 44-47. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.** استخدم حاسبة بيانية لكتابة دالة كثيرة الحدود لتمثيل كل مجموعة من البيانات. (مثال 7)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	8.75	7.5	6.25	5	3.75	2.5	1.25

x	5	7	8	10	11	12	15	16
f(x)	2	5	6	4	-1	-3	5	9

x	-2.53	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
f(x)	23	11	7	6	6	5	3	2	4

x	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
f(x)	52	41	32	44	61	88	72	59	66	93

- 48a. **الإجابة النموذجية:** $f(x) = 2.14 \cdot 10^{-4}x^3 - 0.018x^2 + 0.383x + 5.976$

48. **الكهرباء** فيما يلي متوسط أسعار الكهرباء بالتجزئة في الولايات المتحدة الأمريكية من 1970 إلى 2005. فيما يلي الأسعار المتوقعة أيضًا لعامي 2010 و 2020. (مثال 7)

السعر (¢ / kWh)	السعر (¢ / kWh)	السعر (¢ / kWh)	السعر (¢ / kWh)
7.5	6.125	7.5	6.125
6.625	7	6.625	7
6.25	7.25	6.25	7.25
6.25	9.625	6.25	9.625
6.375	8	6.375	8

المصدر: إدارة معلومات الطاقة

- a. اكتب نموذجًا يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1970.
- b. استخدم النموذج لتوقع متوسط سعر الكهرباء في 2015. **5.93¢**
- c. وفقًا للنموذج. في أي سنة تكرر السعر 7¢ للمرة الثانية؟ **1999**

- ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالة. (مثال 1) **1-10. انظر الهامش.**

- $f(x) = (x + 5)^2$
- $f(x) = (x - 6)^3$
- $f(x) = x^4 - 6$
- $f(x) = x^5 + 7$
- $f(x) = 16x^4$
- $f(x) = 32x^5 - 16$
- $f(x) = (x - 3)^4 + 6$
- $f(x) = (x + 4)^3 - 3$
- $f(x) = \frac{1}{3}(x - 9)^5$
- $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 8$

11. **الماء** إذا كان تصريف خزان بحجم 10 جالونات يستغرق دقيقة واحدة. فإن حجم ما يتبقى من الماء في الخزان يمكن أن يكون $v(t) = 10(1 - t^2)$ تقريبًا. بحيث تكون t الوقت بالدقائق. $0 \leq t \leq 1$ مثل الدالة بيانيًا. (مثال 1) **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

- 12-21. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.** وضع السلوك الطرقي للرسم البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (مثال 2)

- $f(x) = -5x^7 + 6x^4 + 8$
- $f(x) = 2x^6 + 4x^5 + 9x^2$
- $g(x) = 5x^4 + 7x^5 - 9$
- $g(x) = -7x^3 + 8x^4 - 6x^6$
- $h(x) = 8x^2 + 5 - 4x^3$
- $h(x) = 4x^2 + 5x^3 - 2x^5$
- $f(x) = x(x + 1)(x - 3)$
- $g(x) = x^2(x + 4)(-2x + 1)$
- $f(x) = -x(x - 4)(x + 5)$
- $g(x) = x^3(x + 1)(x^2 - 4)$

- a-b. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

22. **الأغذية العضوية** يمكن تمثيل عدد الأفدنة المستخدمة في الولايات المتحدة الأمريكية لإنتاج التفاح العضوي من 2000 إلى 2005 كما يلي $a(x) = 43.77x^4 - 498.76x^3 + 1,310.2x^2 + 1,626.2x + 6,821.5$ بحيث $x = 0$ تساوي 2,000. (مثال 2)

- a. مثل كل دالة باستخدام الحاسبة البيانية.
- b. وضع السلوك الطرقي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيس.

- 23-32. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

- اذكر عدد الأصناف الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم حدد جميع الأصناف الحقيقية عن طريق تحليل العوامل. (الأمثلة 3-5)

- $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3$
- $f(x) = x^6 - 8x^5 + 12x^4$
- $f(x) = x^4 + 4x^2 - 21$
- $f(x) = x^4 - 4x^3 - 32x^2$
- $f(x) = x^6 - 6x^3 - 16$
- $f(x) = 4x^8 + 16x^4 + 12$
- $f(x) = 9x^6 - 36x^4$
- $f(x) = 6x^5 - 150x^3$
- $f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 3x^2$
- $f(x) = 3x^5 + 11x^4 - 20x^3$

- 33-42. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

- فيما يتعلق بكل دالة، (a) طبق اختبار الحد الرئيس، (b) حدد الأصناف واذكر تكرار أي أصناف متكررة، (c) أوجد بعض النقاط الإضافية، (d) مثل الدالة بيانيًا. (مثال 6)

- $f(x) = x(x + 4)(x - 1)^2$
- $f(x) = x^2(x - 4)(x + 2)$
- $f(x) = -x(x + 3)^2(x - 5)$
- $f(x) = 2x(x + 5)^2(x - 3)$
- $f(x) = -x(x - 3)(x + 2)^3$
- $f(x) = -(x + 2)^2(x - 4)^2$
- $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 36x$
- $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
- $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2$
- $f(x) = x^5 + 3x^4 - 10x^3$

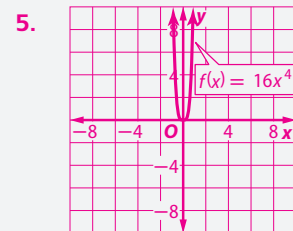
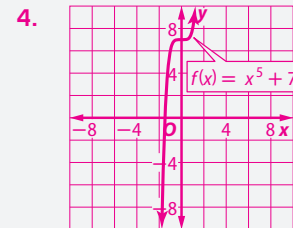
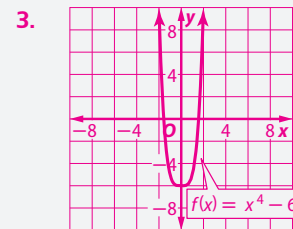
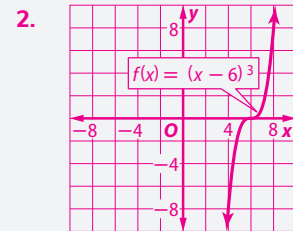
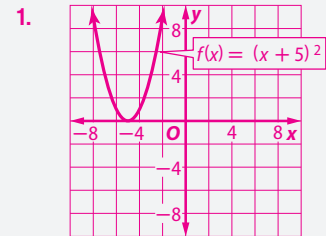
3 تمارين

التقويم التكويني

استخدام التمارين 1-49 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

إجابات إضافية



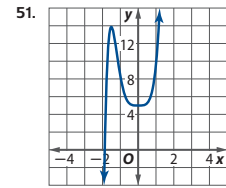
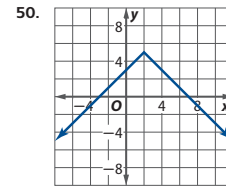
B 49. أجهزة الحاسب الآلي فيما يلي عدد أجهزة الحاسب الآلي المحمولة المبيعة كل ربع عام من 2005 إلى 2007. لنفرض أن الربع الأول من 2005 رقم 1 والربع الرابع من 2007 رقم 12.

البيانات (بالألف)	أربعاء العام
423	1
462	2
495	3
634	4
587	5
498	6
798	7
986	8
969	9
891	10
1,130	11
1,347	12

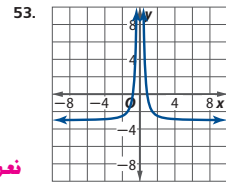
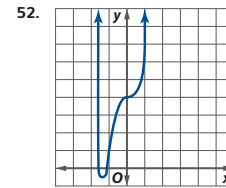
a-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

- a. توقع السلوك الطرفي للبيانات حيث تقترب x من اللانهاية.
b. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل البيانات ورسمها بيانياً. هل النموذج ملائم تماماً؟ اشرح استدلالك.
c. اشرح السلوك الطرفي لتمثيل البياني باستخدام الحدود. هل توقعك دقيق؟ اشرح استدلالك.

حدد هل يمكن أن يوضح كل تمثيل بياني دالة كثيرة الحدود. اكتب نعم أو لا. وإن لم تكن كذلك، فاشرح السبب.



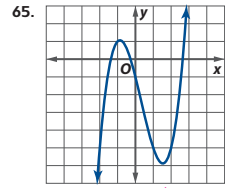
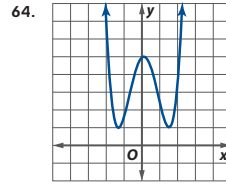
لا؛ يوجد انعطاف حاد عند $x = 2$.



لا؛ غير محدد عند $x = 0$.
أوجد دالة كثيرة الحدود من الدرجة n تحتوي على الأصناف الحقيقية التالية فقط. يمكن أن يوجد أكثر من إجابة.

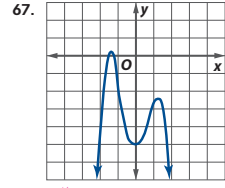
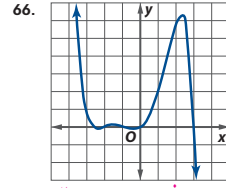
54. $-1; n = 3$ 55. $3; n = 3$
56. $6, -3; n = 4$ 57. $-5, 4; n = 4$
58. $7; n = 4$ 59. $0, -4; n = 5$
60. $2, 1, 4; n = 5$ 61. $0, 3, -2; n = 5$
62. $n = 4$ لا توجد أصناف حقيقية؛ 63. $n = 6$ لا توجد أصناف حقيقية؛

حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الأكبر فيها n موجباً أم سالباً.



n عدد زوجي؛ a_n عدد موجب.

n عددي فردي؛ a_n عدد موجب.



n عددي فردي؛ a_n عدد سالب.

n عدد زوجي؛ a_n عدد سالب.

68. التصنيع تصنع شركة عبوات الألمنيوم لمشروبات الطاقة.



a. اكتب معادلة V تمثل إجمالي حجم العبوة.
 $V = \pi r^2 h$

b. اكتب دالة A من حيث r التي تمثل مساحة سطح حاوية بحجم 15 بوصة مكعبة.

c. استخدم حاسبة تمثيل بياني لتحديد أدنى حد ممكن من مساحة سطح العبوة.

b-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

حدد دالة كثيرة الحدود تحتوي على كل مجموعة من الأصناف. يمكن أن يوجد أكثر من إجابة. 69-74. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

69. 5, -3, 6 70. 4, -8, -2
71. 3, 0, 4, -1, 3 72. 1, 1, -4, 6, 0
73. $\frac{3}{4}, -3, -4, -\frac{2}{3}$ 74. -1, -1, 5, 0, $\frac{5}{6}$

75. السكان زادت نسبة سكان الولايات المتحدة الأمريكية الذين يعيشون في المناطق الحضرية.

النسبة المئوية للسكان	العام
56.1	1950
63	1960
68.6	1970
74.8	1980
74.8	1990
79.2	2000

a. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = 0.45x + 58.19$

المصدر: مكتب إحصاءات السكان في الولايات المتحدة

a. اكتب نموذجاً يوضح النسبة كدالة لعدد الأعوام منذ 1950.

b. استخدم النموذج لتوقع النسبة المئوية للسكان الذين سيعيشون في المناطق الحضرية في 2015. 87.4%

c. استخدم النموذج لتوقع العام الذي سيعيش فيه 85% من السكان في المناطق الحضرية.

c. الإجابة النموذجية: 2010

23

58. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 28x^3 + 294x^2 - 1,372x + 2,401$

59. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^5 + 4x^4$

60. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^5 - 13x^4 + 64x^3 - 148x^2 + 160x - 64$

61. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3$

62. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

63. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$

43a. الإجابة النموذجية: $f(x) = -0.017x^4 + 0.355x^3 - 2.276x^2 + 5.722x + 3.509$

54. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

55. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

56. الإجابة النموذجية:

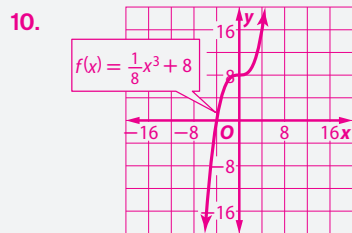
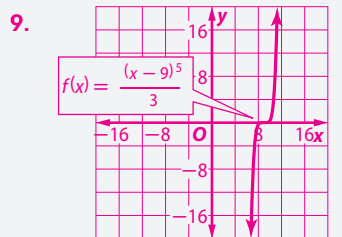
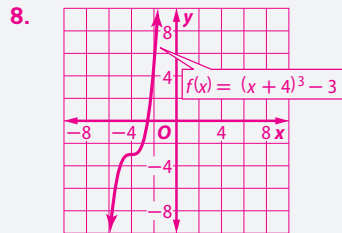
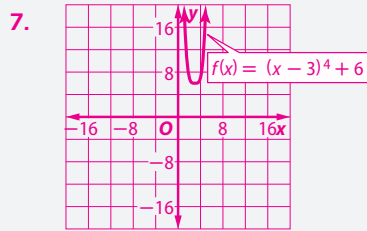
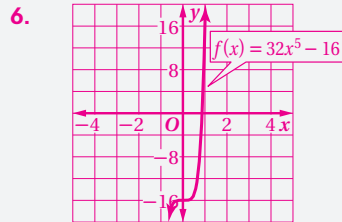
$f(x) = x^4 - 6x^3 - 27x^2 + 108x + 324$

57. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 + 11x^3 + 15x^2 - 175x - 500$

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 49. قد ترغب في أن تشرح للطلاب كيفية ارتباط الأرباع بالأعوام من 2005 إلى 2007. وقد يساوي بعض الطلاب عن طريق الخطأ الربع 1 بعام 2005، والربع 2 بعام 2006، وهكذا. ولكن لكل عام أربعة أرباع، وبالتالي تكون الأرباع 1-4 لعام 2005 والأرباع 5-8 لعام 2006 و 9-12 لعام 2007.

إجابات إضافية



إجابات إضافية

81a. الدرجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

81b. $-6, -2$ (المضاعفة: 2) 4

81c. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.5(x+2)^2 x (x+6)(x-4)$

82a. الدرجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} = -\infty$

82b. $6, 2, -3$ (المضاعفة: 2)

صمم دالة بالخصائص التالية. ثم مثلها بيانيًا. 76-79. انظر ملحق

76. الدرجة = 3. 5 أصغار حقيقية. $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$ انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

77. الدرجة = 6. 4 أصغار حقيقية، $\lim_{x \rightarrow \infty} = -\infty$

78. الدرجة = 5. 2 أصغار حقيقية مميزة، يتكرر واحد منها مرتين. $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

79. الدرجة = 3. 6 أصغار حقيقية مميزة، يتكرر واحد منها مرتين. $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

80. الطقس فيما يلي درجات الحرارة بالدرجة المئوية من 10 صباحًا إلى 7 مساءً في يوم ما في مدينة بحيث x هو عدد الساعات منذ 10 صباحًا.

الزمن	درجة الحرارة	الزمن	درجة الحرارة
0	4.1	5	10
1	5.7	6	7
2	7.2	7	4.6
3	7.3	8	2.3
4	9.4	9	-0.4

a. مثل البيانات بيانيًا.

b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة 3.

c. كرر الجزء b باستخدام دالة من الدرجة 4.

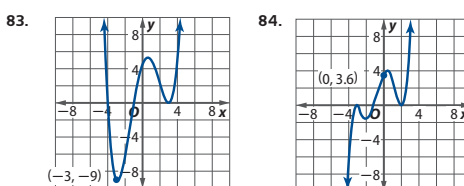
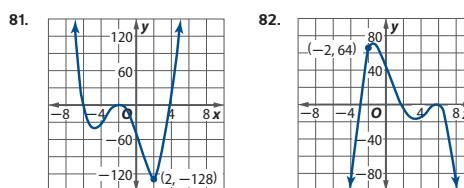
d. أي دالة تمثل نموذجًا أفضل؟ اشرح.

لكل من التمثيلات البيانية التالية: 81-84. انظر الهامش.

a. حدد أقل درجة ممكنة وحدد السلوك الطرفي.

b. حدد الأصغار وتكرارها. لفرض جميع الأصغار قيمًا متكاملة.

c. صمم دالة ثلاث التمثيل البياني ونقطة محددة.



اذكر عدد الأصغار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم أوجد جميع الأصغار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل. 85-88. انظر الهامش.

85. $f(x) = 16x^4 + 72x^2 + 80$ 86. $f(x) = -12x^3 - 44x^2 - 40x$

87. $f(x) = -24x^4 + 24x^3 - 6x^2$ 88. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 24$

89. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة. ستتحقق من سلوك توافق الدوال كثيرة الحدود.

a. العرض البياني مثل $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ بيانيًا في كل صف على شاشة الحاسبة البيانية نفسها. فيما يتعلق بكل تمثيل بياني، عدّل النافذة لملاحظة سلوك كل منها على مقياس أكبر وقريب جدًا من الأصل.

$r(x) =$	$g(x) =$	$h(x) =$
$x^2 + x$	x^2	x
$x^3 - x$	x^3	$-x$
$x^3 + x^2$	x^3	x^2

a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

b. العرض التحليلي وضع سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ بالقرب من الأصل.

c. العرض التحليلي وضع سلوك كل تمثيل بياني للدالة $f(x)$ من حيث $g(x)$ أو $h(x)$ عند اقتراب x من ∞ و $-\infty$.

d. العرض الكلامي توقع سلوك الدالة التي هي عبارة عن توافق بين دالتين a و b مثل $f(x) = a + b$ بحيث تكون a حد الدرجة الأعلى.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

90. تحليل الخطأ مثال وأمين يرسمان نموذجًا للبيانات الموضحة. تعتقد مثال أن النموذج ينبغي أن يكون $f(x) = 5.754x^3 + 2.912x^2 - 7.516x + 0.349$ يعتقد أمين أنه ينبغي أن يكون $f(x) = 3.697x^2 + 11.734x - 2.476$ هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

x	f(x)	x	f(x)
-2	-19	0.5	-2
-1	5	1	1.5
0	0.4	2	43

انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

91. الاستنتاج هل يمكن أن تحتوي دالة كثيرة الحدود على كل من القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

92. الاستنتاج وضع لماذا الدالة الثابتة $f(x) = c$, $c \neq 0$ تحتوي على درجة 0. ولكن الدالة الصغرى $f(x) = 0$ ليس لها درجة. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

93. تحدّد استخدم التحليل إلى العوامل بالتجميع لتحديد أصغار $f(x) = x^3 + 5x^2 - 5x - 12x - 60$ اشرح كل خطوة. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

94. الاستنتاج كيف من الممكن تمثيل أكثر من دالة بنفس الدرجة والسلوك الطرفي والأصغار الحقيقية المميزة؟ اضرب مثالًا لشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

95. الاستنتاج ما أدنى درجة لدالة كثيرة الحدود تحتوي على القيمة العظمى المطلقة والقيمة العظمى النسبية والقيمة الصغرى النسبية؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

96. الكتابة في الرياضيات وضع كيف تحدد أفضل دالة كثيرة حدود يمكن استخدامها عند رسم نموذج للبيانات. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

أوجد حلًا لكل من المعادلات التالية. (الدرس 1-1)

97. $\sqrt{z+3} = 7$ 46

98. $d + \sqrt{d^2 - 8} = 4$ 3

99. $\sqrt{x-8} = \sqrt{13+x}$ لا يوجد حل

100. إعادة رسم نموذج يستبدل عامل سجادة في غرفة المعيشة بمفاس 12 قدمًا في 15 قدمًا. تبلغ تكلفة السجادة الجديدة 13.99 AED لكل ياردة مربعة. تحول الصيغة $f(x) = 9x$ الباردات المربعة إلى قدم مربع. (الدرس 1-7)

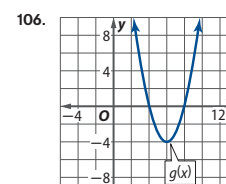
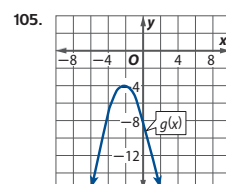
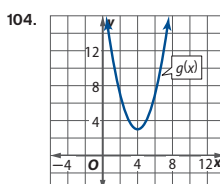
- a. أوجد معكوس $f^{-1}(x)$ ما أهمية $f^{-1}(x)$ ؟ $f^{-1}(x) = \frac{x}{9}$ ؛ سيجعل ذلك عامل التركيب يحول الأقدام المربعة لغرفة المعيشة إلى ياردات مربعة، ثم يمكن بعد ذلك حساب تكلفة السجادة الجديدة.
- b. كم ستبلغ تكلفة السجادة الجديدة؟ 279.80 AED

توجد $3x^2 - 5x + 4$ و $f(x) = 6x + 4$ ، أوجد كل دالة. (الدرس 6-1)

101. $(f+g)(x) = 2x^2 + x + 7$

102. $[f \circ g](x) = 72x^2 + 66x + 15$

103. $[g \circ f](x) = 12x^2 - 30x + 22$

وضح كيف ترتبط $x^2 = f(x)$ و $g(x)$ ببعضها. ثم اكتب معادلة لـ $g(x)$. (الدرس 5-1) 104-106. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

107. الأعمال تنتج شركة منتجًا جديدًا بتكلفة 25 AED لكل منتج. استأجرت محلل تسويق للمساعدة على تحديد سعر البيع. بعد جمع البيانات المرتبطة بسعر البيع s لطلب المستهلكين السنوي وتحليلها d ، يقدر المحلل طلب المنتج باستخدام $d = -200s + 15,000$. (الدرس 4-1)

- a. إذا كان الربح السنوي هو الفرق بين إجمالي الإيرادات وتكاليف الإنتاج، فحدد سعر البيع $s \geq 25$ الذي سيرفع أرباح الشركة السنوية P . 50 AED
- b. ما مخاطر تحديد سعر البيع باستخدام هذه الطريقة؟ الإجابة النموذجية: قد يوفر إقامة مسابقة في الشركة نفس المنتج بتكلفة أقل.

فيما يلي نتائج أحد الاختبارات في صفوف الفيزياء. (الدرس 8-0)

82, 77, 84, 98, 93, 71, 76, 64, 89, 95, 78, 89, 65, 88, 54,
96, 87, 92, 80, 85, 93, 89, 55, 62, 79, 90, 86, 75, 99, 62

108. ارسم مخطط صندوق ذا عارضين.

109. ما الانحراف المعياري لدرجات الامتحان؟ ≈ 12.54

4 التقويم

عَيِّن المصطلح الرياضي اطلب من الطلاب وصف التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود. الإجابة النموذجية: منحنى منتظم محدد ومستمر لجميع الأرقام الحقيقية

إجابات إضافية

82c. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = -0.25x(x-6)^2(x-2)(x+3)$$

83a. الدرجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

83b. 3, -4 (المضاعفة: 2), -1

83c. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x-3)^2x(x+1)(x+4)$$

84a. الدرجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

84b. -3 (المضاعفة: 2), -1, 2

84c. الإجابة النموذجية: $f(x) = \frac{1}{10}x(x-2)^2(x+1)(x+3)^2$

85. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ لا توجد أصفار حقيقية

86. 3 أصفار حقيقية ونقطتان دوران؛ 0، $-\frac{5}{3}$ ، -2

87. 4 أصفار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ 0، $\frac{1}{2}$

88. 3 أصفار حقيقية ونقطتان دوران؛ -6، -2، 2

اختبار الفيزياء



مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

112. الاختيار من متعدد أي من المعادلات التالية يمثل نتائج تحريك الدالة الأم $y = x^3$ لأعلى 4 وحدات ولليمين 5 وحدات؟ D

- A $y + 4 = (x + 5)^3$ C $y + 4 = (x - 5)^3$
B $y - 4 = (x + 5)^3$ D $y - 4 = (x - 5)^3$

113. المراجعة أي مما يلي يوضح الأعداد في مجال

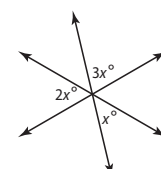
$$H \quad f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$$

F $x \neq 5$

H $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

G $x \geq \frac{3}{2}$

J $x \neq \frac{3}{2}$



110. اختبارا SAT/ACT يوضح الشكل تقاطع ثلاثة مستقيمتين. الشكل ليس مرسومًا بقياس رسم. C

$$x =$$

A 16

B 20

C 30

D 60

E 90

111. على المجال $2 < x \leq 3$ أي من الدوال التالية تحتوي على أكبر قيمة لـ y ؟ F

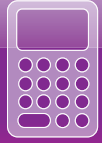
F $y = \frac{x+3}{x-2}$

H $y = x^2 - 3$

G $y = \frac{x-5}{x+1}$

J $y = 2x$

التوسع اطرح السؤال التالي على الطلاب. هل من المناسب دائمًا أن تستخدم نموذجًا لدالة كثيرة الحدود لمخطط انتشار من أجل التنبؤ بها وراء مجال البيانات المعطاة؟ اطلب من الطلاب أن يقدموا أمثلة تدعم إجاباتهم. لا، لأن الظروف الواقعية قد لا توجد وراء البيانات المعطاة؛ الإجابة النموذجية: قد يوضح مخطط التشتت (التمثيل البياني بالنقاط المبعثرة) لتسجيلات الألعاب الرياضية أن زمن التسجيل لإكمال سباق 100 متر قد انخفض بمرور السنين. وسينخفض نموذج مخطط التشتت بشكل لا نهائي، حتى يصبح صفرًا، ثم عددًا سالبًا. ولكن، لن يتم إجراء السباق أبدًا بصفر أو بوقت سالب.



مختبر تقنية التمثيل البياني

السلوك الخفي للتمثيلات البيانية

1-2

الهدف:

- استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف السلوك الخفي للتمثيلات البيانية.

نصيحة دراسية

تفتح حاسبة التمثيلات البيانية في نفس الشاشة التي تم إيقاف تشغيلها بها. اجعل الطلاب يضغطوا على مفتاح الشاشة الرئيسية لبدء المختبر.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. اجعل الطلاب يفكروا في خطوات النشاط 1-3.

اسأل:

- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي يمكن أن تشتمل عليها الدالة التكعيبية؟ **1 أو 2 أو 3**
- إذا كانت هذه الدالة تشتمل على صفر حقيقي واحد فقط، فما نوع أصفار الدالتين الأخرين؟ **الأصفار التخيلية**
- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي يمكن أن تشتمل عليها الدالة التربيعية؟ **0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4**

تمرين اطلب من الطلاب حل التمارين 3-6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 6 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستخدمون حاسبة تمثيل بياني لتمثيل الدوال بيانياً وإيجاد الأصفار.

من العملي إلى النظري

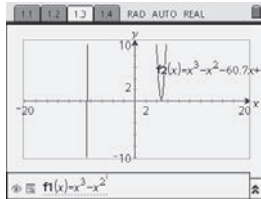
اطلب من الطلاب أن يوضحوا متى يكونون متأكدين أن القيمة صفر لدالة مرسومة بيانياً.

توسيع المفهوم

اسأل الطلاب كيف استطاعوا الحفاظ على التمثيل البياني عن نفس ما ورد في الخطوة 1 ولكنهم حصلوا على صفرين أو ثلاثة أصفار في الخطوة 3.

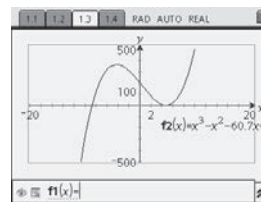
بعد استخدام تقنيات التمثيل البياني مثل الحواسب والآلات الحاسبة طريقة فعالة للقدرة على تمثيل دوال بيانياً وإيجاد قيمتها. ومع ذلك، من المهم أن نضع في الاعتبار حدود تقنية التمثيل البياني عند تفسير التمثيلات البيانية.

النشاط السلوك الخفي للتمثيلات البيانية



حدد أصفار $f(x) = x^3 - x^2 - 60.7x + 204$ بيانياً.

الخطوة 1 افتح صفحة جديدة للتمثيلات البيانية والهندسة. ومثل الدالة بيانياً. يبدو أن للدالة صفرين، أحدهما بين -10 و -8 والآخر بين 4 و 6.



الخطوة 2 من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيّر أبعاد النافذة على النحو المبين.

يبدو سلوك التمثيل البياني أوضح كثيراً في النافذة الأكبر. لا يزال يبدو أن الدالة لها صفرين، أحدهما بين -10 و -8 والآخر بين 4 و 6.



الخطوة 3 من قائمة Window/Zoom (نافذة/تكبير/تصغير)، اختر Window Settings (إعدادات النافذة). غيّر النافذة إلى [2, 8] على [-2, 2].

من خلال تكبير التمثيل البياني في المساحة التي يوجد فيها الصفر، يتضح أنه لا يوجد صفر بين القيمتين 4 و 6. لذا، يحتوي التمثيل البياني على صفر واحد.

حل النتائج

- بالإضافة إلى الحدود التي تم اكتشافها في الخطوات السابقة، كيف يمكن أن تعيد الحاسبة البيانية قدرتك على تفسير التمثيلات البيانية؟
- ما الطرق الأخرى لتجنب هذه الحدود؟

تمارين

حدد أصفار كل الدوال كثيرة الحدود بيانياً. لاحظ السلوك الخفي.

1. $x^3 + 6.5x^2 - 46.5x + 60$ **-11.2, 2.2, 2.5**
2. $x^4 - 3x^3 + 12x^2 + 6x - 7$ **-0.89, 0.58**
3. $x^5 + 7x^3 + 4x^2 - x + 10.9$ **-1.3**
4. $x^4 - 19x^3 + 107.2x^2 - 162x + 73$ **8.1, 8.9**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-3 تحليل التعابير التربيعية إلى عوامل لحل المعادلات.

الدرس 1-3 قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية. استخدام نظريتي الباقي والعامل.

بعد الدرس 1-3 أوجد جميع أصفار كثيرة الحدود.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

أسأل:

- كيف استطعت أن تجد دالة كثيرة الحدود تمثل متوسط ارتفاع أشجار الخشب الأحمر عندما تكبر؟ **أنشئ** مخطط انتشار للبيانات على حاسبة التمثيلات البيانية، واحسب عدد الانحناءات التي تظهر أو استخدم حاسبة التمثيلات البيانية لتحصل على دالة انحدار خاصة بالتمثيل البياني. (يتبع في الصفحة التالية)

نظريتا الباقي والعامل

لماذا؟

الحالي

السابق

تُعد أشجار خشب السكويه بحديقة ريدوود الوطنية بولاية كاليفورنيا أقدم الأنواع الحية في العالم. ويمكن لهذه الأشجار أن تنمو حتى تصل إلى 350 قدمًا ويمكن أن تعيش لما يصل إلى 2,000 عام. يمكن استخدام القسمة التركيبية لتحديد ارتفاع إحدى الأشجار خلال عام معين.

1 قسمة الدالة كثيرة الحدود باستخدام القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
2 استخدام نظريتي الباقي والعامل.

لقد حللت التعابير التربيعية إلى عوامل لحل المعادلات. (الدرس 0-3)

1 قسمة الدوال كثيرة الحدود فكّر في الدالة كثيرة الحدود $f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ وإذا علمت أن f تحتوي على صفر عند $x = 3$. فأنت تعلم أيضًا أن $(x - 3)$ هي عامل $f(x)$ حيث $f(x)$ تُعد دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة. تعلم أن هناك دوالاً كثيرة حدود من الدرجة الثانية $q(x)$ مثل هذا

$$f(x) = (x - 3) \cdot q(x)$$

يفترض هذا أن $q(x)$ يمكن إيجادها عن طريق قسمة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ by $(x - 3)$ حيث إن

$$q(x) = \frac{f(x)}{x - 3}$$

لقسمة الدوال كثيرة الحدود. يمكننا استخدام خوارزمية مشابهة لتلك الموجودة بالقسمة المطولة ذات الأعداد الصحيحة.

مثال 1 استخدام القسمة المطولة لتحليل دالة كثيرة الحدود إلى عوامل

حلّ $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ بالكامل إلى عوامل باستخدام القسمة المطولة إذا كان $(x - 3)$ عاملاً.

$$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x - 3 \\ x - 3 \overline{) 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9} \\ \underline{-(6x^3 - 18x^2)} \\ -7x^2 + 18x \\ \underline{-(7x^2 + 21x)} \\ -3x + 9 \\ \underline{-(-3x + 9)} \\ 0 \end{array}$$

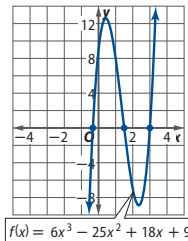
- ← ضرب المقسوم عليه في $6x^2$ حيث إن $\frac{6x^3}{x} = 6x^2$
- ← اطرح وقم بإزالة الحد التالي.
- ← ضرب المقسوم عليه في $-7x$ حيث إن $\frac{7x^2}{x} = -7x$
- ← اطرح وقم بإزالة الحد التالي.
- ← ضرب المقسوم عليه في -3 حيث إن $\frac{-3x}{x} = -3$
- ← اطرح. لاحظ أن الباقي هو 0

من عملية القسمة هذه، يمكنك كتابة $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(6x^2 - 7x - 3)$

ينتج تحليل عوامل التعابير التربيعية $6x^3 - 25x^2 + 18x + 9 = (x - 3)(2x - 3)(3x + 1)$

وبالتالي أصفار الدالة كثيرة الحدود

$f(x) = 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9$ هي 3 و $\frac{3}{2}$ و $-\frac{1}{3}$ كما أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x الموضحة بالتمثيل البياني (x) تؤيد هذا الاستنتاج.



تمرين موجّه

حلّ كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطوّلة.

- $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$; $x + 6$ $(x + 2)(x - 1)(x + 6)$
- $6x^3 - 2x^2 - 16x - 8$; $2x - 4$ $(x + 1)(2x - 4)(3x + 2)$

يمكن أن ينتج عن القسمة المطوّلة باقي صفري، كما في المثال 1 أو باقي غير صفري، كما هو موضح في المثال أدناه. لاحظ أنه كما هو الحال مع القسمة المطوّلة ذات الأعداد الصحيحة، يتم التعبير عن قسمة كثيرات الحدود باستخدام الناتج والباقي والمقسوم عليه.

$$\begin{array}{r} \text{ناتج القسمة} \leftarrow x+3 \\ \text{المقسوم عليه} \leftarrow x+2 \overline{) x^2+5x-4} \\ \underline{(-) x^2+2x} \\ 3x-4 \\ \underline{(-) 3x+6} \\ -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ناتج القسمة} \leftarrow x+3 \\ \text{المقسوم عليه} \leftarrow x+2 \overline{) x^2+5x-4} \\ \underline{(-) x^2+2x} \\ 3x-4 \\ \underline{(-) 3x+6} \\ -10 \end{array}$$

$$x^2+5x-4 = (x+3)(x+2) + (-10) \quad x \neq -2$$

نذكر أنه يمكن التعبير عن المقسوم بحدود المقسوم عليه والناتج والباقي.

$$\begin{array}{rclcl} \text{المقسوم} & = & \text{الناتج} & \times & \text{المقسوم عليه} \\ x^2+5x-4 & = & (x+3) & \times & (x+2) \end{array}$$

ويؤدي بنا هذا إلى تعريف قسمة كثيرات الحدود.

المفهوم الأساسي قسمة كثيرات الحدود

لنفترض أن $f(x)$ و $d(x)$ هما دالتان كثيرتا الحدود حيث تكون درجة $d(x)$ أقل من أو تساوي درجة $f(x)$ و $d(x) \neq 0$. وهكذا يكون هناك حدود كثيرة ومتعددة $q(x)$ و $r(x)$ بحيث تكون

$$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x) \quad \text{حيث } r(x) = 0 \text{ أو درجة } r(x) \text{ أصغر من درجة } d(x).$$

حيث $r(x) = 0$ أو درجة $r(x)$ أصغر من درجة $d(x)$. إذا كان $r(x) = 0$ ، إذا $d(x)$ يقسم بالتساوي إلى $f(x)$.

قبل القسمة، تأكد من كتابة كل دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية ومن إدراج العناصر النائية ذات المعاملات الصغرية متى لزم الأمر لأساس المتغير الناقصة.

مثال 2 القسمة المطوّلة مع الباقي غير الصفري

اقسم $9x^3 - x - 3$ على $3x + 2$

أولاً أعد كتابة $9x^3 - x - 3$ بالشكل $9x^3 + 0x^2 - x - 3$ ثم استخدم عملية القسمة.

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل

$$\begin{array}{r} \frac{9x^3 - x - 3}{3x + 2} = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{-5}{3x + 2}, x \neq -\frac{2}{3} \\ = 3x^2 - 2x + 1 - \frac{5}{3x + 2}, x \neq -\frac{2}{3} \end{array}$$

التحقق من الحل اضرب للتحقق من هذه النتيجة.

$$(3x + 2)(3x^2 - 2x + 1) + (-5) \stackrel{?}{=} 9x^3 - x - 3$$

$$9x^3 - 6x^2 + 3x + 6x^2 - 4x + 2 - 5 \stackrel{?}{=} 9x^3 - x - 3$$

$$9x^3 - x - 3 = 9x^3 - x - 3 \quad \checkmark$$

تمرين موجه

اقسم باستخدام القسمة المطوّلة.

2A. $(8x^3 - 18x^2 + 21x - 20) \div (2x - 3)$

2B. $(-3x^3 + x^2 + 4x - 66) \div (x - 5)$

عند قسمة الدوال كثيرة الحدود، قد يكون للمقسوم عليه درجة أعلى من 1. وقد يؤدي هذا أحياناً إلى ناتج به حدود ناقصة.

28 | الدرس 1-3 | نظريتنا الباقي والعامل

نصيحة دراسية

الصحيح مقابل غير الصحيح
يكون التعبير النسبي غير صحيح إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام. لذا ففي خوارزميات

القسمة، $\frac{f(x)}{d(x)}$ يُعد تعبيراً نسبياً غير صحيح. $\frac{r(x)}{d(x)}$ بينما يُعد تعبيراً نسبياً صحيحاً.

- افترض أن الدالة كثيرة الحدود التي تمثل متوسط ارتفاع أشجار الخشب الأحمر عندما تكبر كالتالي $f(x) = -0.001x^2 + 1.15x + 8$. كيف استطعت تقدير ارتفاع شجرة الخشب الأحمر التي يبلغ عمرها 1,000 عام؟ استبدل 1,000 بـ x ثم قم بالتقدير.

- كم عدد الأصفار الحقيقية المحتملة التي تشتمل عليها هذه الدالة؟ اشرح كيف عرفت الحل. 2: درجة كثيرة الحدود هي 2.

1 قسمة كثيرات الحدود

الأمثلة 1-4 توضح كيفية قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية. يتضمن ذلك الحاجة إلى أن تكون كثيرات الحدود بالصيغة القياسية إلى جانب استخدام معاملات الصفر للأسس المفقودة كعناصر نائية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 قم بتحليل $6x^3 + 17x^2 - 104x + 60$

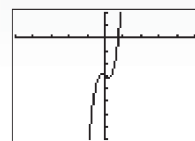
إلى عوامل بالكامل باستخدام القسمة المطوّلة إذا كان $(2x-5)$ عاملاً. $(2x-5)(3x-2)(x+6)$

2 اقسم $6x^3 - 5x^2 + 9x + 6$ على $2x - 1$

$$3x^2 - x + 4 + \frac{10}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$$

نصيحة دراسية

التحقق من التمثيل البياني
يمكنك التحقق من النتيجة الموضحة بالمثال 2 باستخدام الحاسبة البيانية. التمثيلات البيانية $y_2 = 9x^3 - x - 3$ و $y_1 = (3x + 2)(3x^2 - 2x + 1) - 5$ متطابقة.



[−5, 5] scl: 1 by [−8, 2] scl: 1

التعليم المتمايز

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي لمساعدة الطلاب على فهم قسمة كثيرات الحدود، قدم بعض أمثلة القسمة من الحساب، مثل $235 \div 22 = 10 \text{ R}15$ و $235 = 22 \times 10 + 15$ جُل بعض الأمثلة، أولاً باستخدام الأرقام ثم باستخدام كثيرات الحدود، لتوضيح المفاهيم أكثر.

مثال إضافي

3 اقسم $x^3 - x^2 - 14x + 4$ على $x^2 - 5x + 6$

$$x + 4 - \frac{20}{x^2 - 5x + 6}$$

التركيز على محتوى الرياضيات

القسمة التركيبية هي طريقة لقسمة كثيرة حدود على عامل بالصيغة $(x - c)$ ولكي تنجح القسمة التركيبية، يجب كتابة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية حيث تمثل الأصفار عناصر ثابتة لأي أسس مفقودة. ويجب أن يكون المقسوم عليه في الصيغة $(x - c)$ بالنسبة إلى كثيرات الحدود المقسومة على قيم مقسوم عليها من الدرجة 2 أو أعلى. تستخدم القسمة المطولة.

المثال 3 القسمة على دالة كثيرة الحدود من الدرجة 2 أو أعلى

اقسم $11 - 3x + 13x^2 - 4x^3 + 2x^4$ على $x^2 - 2x + 7$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -1 \\ x^2 - 2x + 7 \overline{) 2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11} \\ \underline{(-) 2x^4 - 4x^3 + 14x^2} \\ -x^2 + 3x - 11 \\ \underline{(-) -x^2 + 2x - 7} \\ x - 4 \end{array}$$

يمكنك كتابة هذه النتيجة بالشكل $\frac{2x^4 - 4x^3 + 13x^2 + 3x - 11}{x^2 - 2x + 7} = 2x^2 - 1 + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 7}$

تقريب موجه

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

3A. $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 6) \div (x^2 + 3x - 4)$ 3B. $(6x^5 - x^4 + 12x^2 + 15x) \div (3x^3 - 2x^2 + x)$

القسمة التركيبية طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$ ضع في اعتبارك القسمة المطولة من المثال 1.

القسمة المطولة	المتغيرات المحذوفة	الطبي العمودي	القسمة التركيبية
لاحظ المعاملات التي تم تمييزها بالنص الملون.	احذف x وأسس x .	قم بطي القسمة المطولة عمودياً مع حذف التكرارات.	قم بتغيير علامات المقسوم عليه والأعداد في السطر الثاني.
$\begin{array}{r} 6x^2 - 7x - 3 \\ x - 3 \overline{) 6x^3 - 25x^2 + 18x + 9} \\ \underline{(-) 6x^3 - 18x^2} \\ -7x^2 + 18x \\ \underline{(-) -7x^2 + 21x} \\ -3x + 9 \\ \underline{(-) -3x + 9} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad -7 \quad -3 \\ -3 \overline{) 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9} \\ \underline{(-) 6 \quad -18} \\ -7 \quad +18 \\ \underline{(-) -7 \quad +21} \\ -3 \quad +9 \\ \underline{(-) -3 \quad +9} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9 \\ -3 \overline{) 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9} \\ \underline{-18 \quad 21 \quad 9} \\ 6 \quad -7 \quad -3 \quad 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9 \\ \underline{18 \quad -21 \quad -9} \\ 6 \quad -7 \quad -3 \quad 0 \end{array}$ <p>العدد الذي يمثل الآن المقسوم عليه هو الصفر المرتبط بذات الحدين $x - c$ كما أننا الآن نجمع بدلاً من الطرح عن طريق تغيير الإشارات بالسطر الثاني.</p>

يمكننا استخدام القسمة التركيبية الموضحة في المثال أعلاه لوضع المستقيمات العريضة لإجراء القسمة التركيبية لأي دالة كثيرة الحدود عن طريق دالة ذات حدين.

المفهوم الأساسي خوارزمية القسمة التركيبية

لقسمة كثيرة الحدود على عامل $x - c$ استكمل كل خطوة.

- الخطوة 1** اكتب معاملات المقسوم بالصيغة القياسية. اكتب الصفر المرتبط بالمعادلة للمقسوم عليه $x - c$ في المربع. قم بإزالة المعامل الأول.
- الخطوة 2** اضرب المعامل الأول في c . اكتب الناتج تحت المعامل الثاني.
- الخطوة 3** اجمع الناتج والمعامل الثاني.
- الخطوة 4** كرر الخطوات 2 و 3 حتى تصل إلى ناتج الجمع في العمود الأخير. الأرقام الموجودة في الصف الأسفل هي معامل الناتج. إن القوة الأسية للحد الأول أصغر بمقدار واحد عن المقسوم. الرقم النهائي هو الباقي.

مثال

اقسم $9 + 18x - 25x^2 + 6x^3$ على $x - 3$

$$\begin{array}{r} 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9 \\ -3 \overline{) 6 \quad -25 \quad 18 \quad 9} \\ \underline{18 \quad -21 \quad -9} \\ 6 \quad -7 \quad -3 \quad 0 \end{array}$$

الباقي

↑ معاملات الناتج

↓ = اضرب في c واكتب الناتج. ↓ = اجمع الحدود.

مثال إضافي

4. القسمة باستخدام القسمة التركيبية.

a. $(2x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 5x - 8) \div (x - 3)$

$$2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 4 + \frac{4}{x-3}$$

b. $(8x^4 + 38x^3 + 5x^2 + 3x + 3) \div (4x + 1)$

$$2x^3 + 9x^2 - x + 1 + \frac{2}{4x+1}$$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

ويكيبيديا اطلب من الطلاب إنشاء

صفحة ويكيبيديا تشرح كيفية إعداد

القسمة التركيبية لمسألة قسمة تشتمل

على كثيرات الحدود. وتأكد أنهم يشرحون

كيف يحذفون المتغيرات وكذلك كيف

يغيرون علامات المقسوم عليه والأعداد

في السطر الثاني.

2 نظريتا الباقي والعامل

المثال 5 يعرض كيفية استخدام نظرية

الباقي. والمثال 6 يوضح كيفية استخدام

نظرية العامل لتحديد ما إذا كان $x - c$

عاملاً لكثير الحدود $f(x)$

كما هو الحال مع قسمة الدوال كثيرة الحدود عن طريق القسمة المطولة، تذكر استخدام الأعداد كقيمة رمزية لأي حدود ناقصة بالمقسوم. عند قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها ذات الحدين $x - c$ ، فإنه يطلق على ناتج القسمة **كثيرة الحدود المنخفضة**.

مثال 4 القسمة التركيبية

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

a. $(2x^4 - 5x^2 + 5x - 2) \div (x + 2)$

حيث إن $c = -2$ ، $x + 2 = x - (-2)$ ، قم بإجراء القسمة التركيبية كالتالي، باستخدام القيمة الرمزية للصفر للحد المفقود x^3 في المقسوم، ثم اتبع إجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & 5 & -2 & \\ & & -4 & 8 & -6 & 7 & \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 & \end{array}$$

↓ = اجمع الحدود.
↓ = اضرب في c واكتب الناتج.
↑ الباقي
معاملات الدالة كثيرة الحدود المنخفضة

يتضمن ناتج القسمة درجة واحدة أصغر من تلك التي يحتوي عليها المقسوم. لذا

$$\frac{2x^4 - 5x^2 + 5x - 2}{x + 2} = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$$

تحقق من هذه النتيجة

b. $(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div (2x - 3)$

أعد كتابة تعبير القسمة بحيث يكون المقسوم عليه على هذه الصورة $x - c$.

$$\frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = \frac{(10x^3 - 13x^2 + 5x - 14) \div 2}{(2x - 3) \div 2} = \frac{5x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7}{x - \frac{3}{2}}$$

لذا، $c = \frac{3}{2}$ ، قم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 5 & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -7 \\ & & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ \hline & 5 & 1 & 4 & -1 \end{array}$$

$$5x^2 + x + 4 - \frac{2}{2x-3} = \frac{10x^3 - 13x^2 + 5x - 14}{2x - 3} = 5x^2 + x + 4 - \frac{1}{x - \frac{3}{2}}$$

تحقق من هذه النتيجة.

تبرين موجّه

4A. $(4x^3 + 3x^2 - x + 8) \div (x - 3)$

4B. $(6x^4 + 11x^3 - 15x^2 - 12x + 7) \div (3x + 1)$

2 **نظريتا الباقي والعامل** عندما يكون $d(x)$ هو المقسوم عليه $(x - c)$ من الدرجة 1 ويكون الباقي هو العدد

الحقيقي r ، وبالتالي، يتم تبسيط خوارزمية القسمة إلى

$$f(x) = (x - c) \times q(x) + r$$

عند إيجاد قيمة $f(x)$ حيث $x = c$ ، نجد أن

$$r = f(c) = (c - c) \times q(c) + r = 0 \times q(c) + r$$

إذاً $r = f(c)$ ، الذي يمثل الباقي. وهذا يقودنا إلى النظرية التالية.

المفهوم الأساسي نظرية الباقي

$$r = f(c) \text{ إذا كانت الدالة كثيرة الحدود } f(x) \text{ مقسومة على } x - c, \text{ فإن الباقي هو } r = f(c)$$

30 | الدرس 1-3 | نظريتا الباقي والعامل

نصائح للمعلمين الجدد

معاملات الصفر في المثالين 2 و 4، ركز على

أهمية كتابة كل كثيرة حدود بالصيغة القياسية.

اطلب من الطلاب ترك مساحة في مسألة

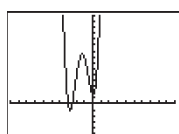
القسمة المطولة أو إدخال صفر في مسألة القسمة

التركيبية إذا كان أي من أسس x في المقسوم

يشتمل على معاملات الصفر. اجعل الطلاب يحلوا

بعض مسائل القسمة التركيبية بمفردهم عند تقديم

المفهوم لأول مرة حتى يتعلموا الخطوات اللازمة.



[-10, 10] scl: 1 by [-10, 30] scl: 2

التحقق من الحل إذا كان $(x + 3)$ عاملاً في المعادلة $f(x) = 4x^4 + 21x^3 + 25x^2 - 5x + 3$. إذا فإن -3 هي صفر الدالة و $(-3, 0)$ هي نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني. مثل $f(x)$ بيانياً باستخدام حاسبة بيانية واثبت أن $(-3, 0)$ نقطة على التمثيل البياني. ✓

نصيحة تكنولوجية

الأصناف يمكنك التأكد من الأصناف بالتمثيل البياني لدالة ما باستخدام خاصية الصفر من قائمة CALC في الحاسبة البيانية.

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20; (x + 4), (x - 5) \text{ b.}$$

استخدم القسمة التركيبية لاختيار العامل $(x + 4)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 2 & -1 & -41 & -20 \\ & & -8 & 36 & 20 \\ \hline & 2 & -9 & -5 & 0 \end{array}$$

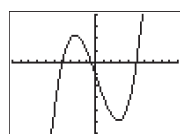
بما أن الباقي عندما يكون $f(x)$ مقسوماً على $(x + 4)$ هو $f(-4) = 0$ و 0 ويكون $(x + 4)$ عاملاً لـ $f(x)$

بعد ذلك، اختبر العامل الثاني، $(x - 5)$ باستخدام الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 - 9x - 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 2 & -9 & -5 \\ & & 10 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

بما أن الباقي عندما يكون ناتج القسمة $(x + 4) \div f(x)$ مقسوماً على $(x - 5)$ هو 0 . إذا فإن $f(5) = 0$ و $(x - 5)$ هو عامل $f(x)$ بما أن $(x + 4)$ و $(x - 5)$ عاملان $f(x)$ ، يمكننا استخدام ناتج القسمة النهائي لكتابة صيغة المعادلة $f(x)$ بعد تحليلها إلى عوامل

$$f(x) = (x + 4)(x - 5)(2x + 1)$$



[-10, 10] scl: 1 by [-120, 80] scl: 20

تحقق من الحل يؤكد التمثيل البياني $f(x) = 2x^3 - x^2 - 41x - 20$ أن $x = -4$ و $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ أصفار للدالة. ✓

تمرين موجه

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ واستخدم التعابير ذات الحدين لكتابة صيغة $f(x)$ بعد تحليلها إلى عوامل

6A. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 22x + 24; (x - 2), (x + 5)$ $f(x) = (x - 2)(3x - 4)(x + 3)$ نعم، لا؛

6B. $f(x) = 4x^3 - 34x^2 + 54x + 36; (x - 6), (x - 3)$

نعم، نعم؛ $f(x) = 2(x - 6)(x - 3)(2x + 1)$

يمكنك اعتبار القسمة التركيبية أداة مفيدة لتحليل أصفار الدوال كثيرة الحدود وإيجادها.

ملخص المفاهيم القسمة التركيبية والبقايا

- إذا كان r هو الباقي الناتج بعد عملية قسمة تركيبية لـ $f(x)$ من $(x - c)$ ، فإن العبارات التالية تكون صحيحة.
- r هي قيمة $f(c)$
- إذا كان $r = 0$ ، فإن $(x - c)$ هو عامل $f(x)$
- إذا كان $r = 0$ ، فإن c هو تقاطع المحور الأفقي x للتمثيل البياني f
- إذا كان $r = 0$ ، فإن $x = c$ هو حل $f(x) = 0$

32 | الدرس 1-3 | نظريتنا الباقي والعامل

إجابات إضافية

9. $5x^3 + 17x^2 + 74x + 295 + \frac{1192}{x - 4}$

10. $x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 41x - 83 + \frac{190}{x + 2}$

11. $2x^3 - 8x^2 + 22x - 47 + \frac{100}{x + 2}$

12. $2x^3 - x^2 - 41x - 20$

13. $3x^5 + 3x^3 - 6x^2 - 2x + 4 - \frac{2}{2x - 1}$

14. $36x^4 - 36x^3 + 24x^2 + 9x + 6 + \frac{12}{3x + 2}$

15. $x + 4$

16. $2x^2 - 8x + 9 + \frac{5x + 24}{2x^2 + x - 12}$

17. $2x^2 - 4x + 2 + \frac{2}{3x^3 + 2x + 3}$

18. $4x^2 - x - 3 - \frac{x + 10}{3x^3 + 2x^2 - x + 6}$

19. $x^3 + x^2 + 5x + 4 + \frac{2}{x - 2}$

20. $2x^3 - 2x^2 + 4x - 4 + \frac{8}{x + 3}$

21. $3x^3 + 3x^2 + 12x + 24 + \frac{48}{x - 4}$

22. $x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x + 1 + \frac{4}{x + 2}$

32 | الدرس 1-3 | نظريتنا الباقي والعامل

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-47 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه !

القسم التركيبية في التمارين 19-28، راجع الطلاب الذين قد يستخدمون العلامة الخاطئة للعدد في مربع القسم التركيبية. ذكر الطلاب بأن المقسوم يجب أن يكتب بالصيغة $(x - c)$ على سبيل المثال، يجب أن يكتب مقسوم عليه مثل $(x + 3)$ بالصيغة $(-3 - x)$ لمعرفة أن العدد المطلوب استخدامه في مربع القسم التركيبية هو -3 وليس 3 .

إجابات إضافية

$$23. 6x^4 + 14x^3 + 12x^2 + 12x + 18 + \frac{46}{2x-3}$$

$$24. 12x^3 - 6x^2 + 6x - 12$$

$$25. 15x^4 + 12x^3 + 9x^2 + 6x + \frac{20}{3} + \frac{76}{3(3x-2)}$$

$$26. 12x^4 + 4x^3 + 16x^2 - 4x + \frac{15}{4} + \frac{9}{4(4x+1)}$$

$$27. 12x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 5$$

$$28. 8x^5 - 12x^3 + 6x^2 - 15$$

38. نعم، لا؛

$$f(x) = (x+2)(x^3 - 4x^2 - x + 3)$$

39. لا، لا

40. لا، لا

$$41. \text{نعم، نعم؛ } x(3x-1)(x-5)(x-4)(x+2)$$

$$42. \text{نعم، لا؛ } f(x) = (4x-1)(x^3 - 9x - 30)$$

43. لا، لا

44. لا، لا

$$45. \text{نعم، لا؛ } f(x) = (4x+3)(x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 3x + 21)$$

تمارين

حلّل كل دالة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المقدم والقسم المطوّنة. (النسبة 1)

- $x^3 + 2x^2 - 23x - 60; x + 4$ $(x+3)(x-5)(x+4)$
- $x^3 + 2x^2 - 21x + 18; x - 3$ $(x-1)(x+6)(x-3)$
- $x^3 + 3x^2 - 18x - 40; x - 4$ $(x+5)(x+2)(x-4)$
- $4x^3 + 20x^2 - 8x - 96; x + 3$ $(x+4)(x-2)(x+3)4$
- $-3x^3 + 15x^2 + 108x - 540; x - 6$ $(x-5)(x+6)(x-6)-3$
- $6x^3 - 7x^2 - 29x - 12; 3x + 4$ $(2x+1)(x-3)(3x+4)$
- $x^4 + 12x^3 + 38x^2 + 12x - 63; x^2 + 6x + 9$ $(x+7)(x-1)(x+3)^2$
- $x^4 - 3x^3 - 36x^2 + 68x + 240; x^2 - 4x - 12$ $(x+5)(x-4)(x+2)(x-6)$

اقسم باستخدام القسم المطوّنة. (النسبة 2 و 3) 9-18. انظر الهامش.

- $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x + 12) \div (x - 4)$
- $(x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 24) \div (x + 2)$
- $(4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 12) \div (2x + 4)$
- $(2x^4 - 7x^3 - 38x^2 + 103x + 60) \div (x - 3)$
- $(6x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 15x^3 + 2x^2 + 10x - 6) \div (2x - 1)$
- $(108x^5 - 36x^4 + 75x^3 + 36x + 24) \div (3x + 2)$
- $(x^4 + x^3 + 6x^2 + 18x - 216) \div (x^3 - 3x^2 + 18x - 54)$
- $(4x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 110x - 84) \div (2x^2 + x - 12)$
- $\frac{6x^5 - 12x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 8x + 8}{3x^3 + 2x + 3}$
- $\frac{12x^5 + 5x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 4x - 28}{3x^3 + 2x^2 - x + 6}$

اقسم باستخدام القسم التركيبية. (النسبة 4) 19-28. انظر الهامش.

- $(x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x - 6) \div (x - 2)$
- $(2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 8x - 4) \div (x + 3)$
- $(3x^4 - 9x^3 - 24x - 48) \div (x - 4)$
- $(x^5 - 3x^3 + 6x^2 + 9x + 6) \div (x + 2)$
- $(12x^5 + 10x^4 - 18x^3 - 12x^2 - 8) \div (2x - 3)$
- $(36x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 30x - 12) \div (3x + 1)$
- $(45x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 8x + 12) \div (3x - 2)$
- $(48x^5 + 28x^4 + 68x^3 + 11x + 6) \div (4x + 1)$
- $(60x^6 + 78x^5 + 9x^4 - 12x^3 - 25x - 20) \div (5x + 4)$
- $\frac{16x^6 - 56x^5 - 24x^4 + 96x^3 - 42x^2 - 30x + 105}{2x - 7}$

29. **التعليم** يمكن تمثيل عدد طلاب الولايات المتحدة من الآلاف الحاصلين على درجة البكالوريوس ما بين عامي 1970 و 2006 كما يلي $g(x) = 0.0002x^5 - 0.016x^4 + 0.512x^3 - 7.15x^2 + 47.52x + 800.27$. حيث إن x هو عدد الأعوام منذ 1970. استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد الطلاب الذين تخرجوا عام 2005. قَرّب إلى أقرب جزء من ألف. (النسبة 5) **2,151,000 طالب**

30. **التزلج** يمكن تمثيل المسافة التي يقطعها الشخص في التزلج بالأمتار على النحو التالي $d(t) = 0.2t^2 + 3t$. حيث إن t هو الوقت بالثواني. استخدم نظرية الباقي لإيجاد المسافة المقطوعة بعد 45 ثانية. (النسبة 5) **540 m**

أوجد كل $f(c)$ باستخدام التعويض التركيبي. (النسبة 5)

- $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x^2 + 8x - 15; c = 3$ **711**
- $f(x) = 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 8x - 3; c = 4$ **11,165**
- $f(x) = 2x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 3x - 4; c = 5$ **45,536**
- $f(x) = 4x^6 + 8x^5 - 6x^3 - 5x^2 + 6x - 4; c = 6$ **247,388**
- $f(x) = 10x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 8; c = -6$ **-67,978**
- $f(x) = -6x^7 + 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 9x + 64; c = 2$ **-686**
- $f(x) = -2x^8 + 6x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x + 24; c = 4$ **-125,184**

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدين الموضحة تعد عوامل لـ $f(x)$ استخدم التعابير ذات الحدين لكتابة الصيغة البحتة لـ $f(x)$ (النسبة 6) 38-45. انظر الهامش.

- $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + x + 6; (x + 2), (x - 1)$
- $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 8x + 12; (x - 1), (x + 3)$
- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 24x^2 + 18x + 135; (x - 5), (x + 5)$
- $f(x) = 3x^4 - 22x^3 + 13x^2 + 118x - 40; (3x - 1), (x - 5)$
- $f(x) = 4x^4 - x^3 - 36x^2 - 111x + 30; (4x - 1), (x - 6)$
- $f(x) = 3x^4 - 35x^3 + 38x^2 + 56x + 64; (3x - 2), (x + 2)$
- $f(x) = 5x^5 + 38x^4 - 68x^2 + 59x + 30; (5x - 2), (x + 8)$
- $f(x) = 4x^5 - 9x^4 + 39x^3 + 24x^2 + 75x + 63; (4x + 3), (x - 1)$

46. **الأشجار** يوضح الجدول أدناه ارتفاع شجرة بالغدم في أعمار مختلفة بالأعوام.

العمر	الارتفاع	العمر	الارتفاع
2	3.3	24	73.8
6	13.8	26	82.0
10	23.0	28	91.9
14	42.7	30	101.7
20	60.7	36	111.5

a. استخدم حاسبة رسوم بيانية لكتابة معادلة تربيعية لتمثيل نمو الشجرة. **a. $f(x) = -0.001x^2 + 3.44x - 6.39$**

b. استخدم القسم التركيبية لتقييم ارتفاع الشجرة عند 15 عامًا. **نحو 44.985 ft**

47. **ركوب الدراجات الهوائية** يقود مازن دراجته بسرعة مبدئية v_0 من 4 أمتار في الثانية. عندما يمر بمنحدر، تزيد سرعة الدراجة بمعدل 0.4 متر في الثانية المربعة. المسافة الرأسية من أعلى التل إلى أسفل 25 مترًا. استخدم $d(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ حيث إن $d(t)$ هي المسافة المقطوعة و t الموضع بالثواني. **5 ثواني**

33

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

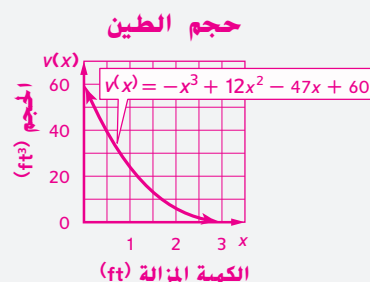
المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1-47, 62, 63, 68-83	62, 63, زوجي 2-46, 68-79
OL ضمن المستوى	1-51, 52, 53-59, 60, 62, 63, 68-83	48-60, 62, 63, 68-79
BL أعلى من المستوى	48-83	

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من الطلاب أن يكتبوا باقي $x^3 - x^2 - 5x - 3$ عند قسمته على $x - 3$ 0

إجابات إضافية

57b.



60a.

أصغر صفر	أكبر صفر	كثيرة الحدود
-3	4	$x^3 - 2x^2 - 11x + 12$
-5	1	$x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$
-1	2	$x^5 - x^4 - 2x^3$

60b. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$: $f(5) = 32$, $f(7) = 180$, $f(8) = 308$; $f(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$: $f(2) = 56$, $f(3) = 240$, $f(4) = 648$; $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$: $f(3) = 108$, $f(5) = 2,250$, $f(7) = 13,720$

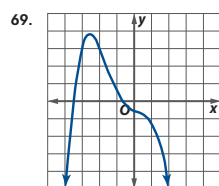
60c. الإجابة النموذجية: جميع العناصر المذكورة في الصف الأخير بالقسمة التركيبية موجبة.

60d. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$: $f(-4) = -40$, $f(-5) = -108$, $f(-6) = -210$; $f(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 10x$: $f(-6) = 168$, $f(-7) = 560$, $f(-9) = 2,520$; $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3$: $f(-2) = -32$, $f(-3) = -270$, $f(-4) = -1,152$

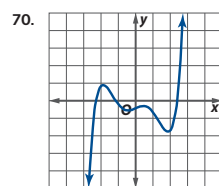
61. نعم: الإجابة النموذجية: افترض أن $f(x)$ هي الدالة كثيرة الحدود ذات الصلة. واستخدم نظرية العامل. لأن $f(1) = 0$, $(x - 1)$ عامل لكثيرة الحدود.

مراجعة شاملة

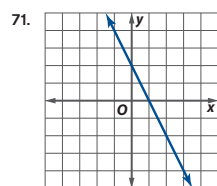
حدد هل درجة n في الدالة كثيرة الحدود لكل تمثيل بياني زوجية أم فردية وهل معامل الحد الأكبر فيها a_n موجباً أم سالباً. (الدرس 2-2)



زوجي، سالب



فردى، موجب



فردى، سالب

72. التقز بالمظلات يتم إيجاد الوقت التقريبي t بالثواني الذي يستغرقه سقوط جسم ما من مسافة d قدم

باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$ لنفترض أن اللاعب سقط قبل أن يفتح المظلة بـ 11 ثانية. فما المسافة التي

يسقطها اللاعب خلال هذه المدة؟ (الدرس 1-2) 1,936 ft

73. مكافحة الحرائق يتم تمثيل السرعة v وأقصى ارتفاع h للمياه التي يتم ضخها في الهواء باستخدام المعادلة $v = \sqrt{2gh}$. حيث إن g هو السرعة بسبب الجاذبية (32 قدمًا / الثانية²). (الدرس 1-7)

a. حدّد معادلة ستعطي أقصى ارتفاع للمياه كدالة لارتفاعها. $h = \frac{v^2}{64}$

b. يجب على إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة قوية بما يكفي لدفع المياه لمسافة 80 قدمًا في الهواء. هل ستبلي المضخة النعلن عنها للمشروع بسرعة 75 قدمًا / الثانية احتياجات إدارة مكافحة الحرائق؟ اشرح. نعم؛ يمكن أن تعمل المضخة على دفع الماء إلى ارتفاع حوالي 88 ft

حل أنظمة المعادلات التالية جبرياً. (الدرس 5-0)

74. $5x - y = 16$
 $2x + 3y = 3$

(3, -1)

75. $3x - 5y = -8$
 $x + 2y = 1$

(-1, 1)

76. $y = 6 - x$
 $x = 4.5 + y$

(5.25, 0.75)

77. $2x + 5y = 4$
 $3x + 6y = 5$

($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$)

78. $7x + 12y = 16$
 $5y - 4x = -21$

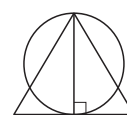
(4, -1)

79. $4x + 5y = -8$
 $3x - 7y = 10$

($-\frac{6}{43}$, $-\frac{64}{43}$)

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

80. اختبارا SAT/ACT في الشكل الموضح، مثلث متساوي الأضلاع مرسوم أيضًا بارتفاع قطر الدائرة. إذا كان محيط المثلث 36، فما محيط الدائرة؟ B



- A $6\sqrt{2}\pi$ C $12\sqrt{2}\pi$ E 36π
B $6\sqrt{3}\pi$ D $12\sqrt{3}\pi$

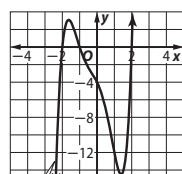
81. مراجعة إذا كان (3, -7) هو مركز الدائرة و(8, 5) على الدائرة، فما محيط الدائرة؟ K

- F 13π H 18π K 26π
G 15π J 25π

82. مراجعة الحد الأول في المتتالية هو x . كل حد لاحق هو ثلاثة أصغر من ضعف الحد السابق. ما الحد الخامس في المتتالية؟ D

- A $8x - 21$ C $16x - 39$ E $32x - 43$
B $8x - 15$ D $16x - 45$

83. استخدم التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود. أي مما يلي لا يُعد عامل $x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 4x - 4$ ؟ H



$f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 4x - 4$

- F $(x - 2)$
G $(x + 2)$
H $(x - 1)$
J $(x + 1)$

35

التعليم المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب أن يجدوا قيم a و b و c حيث إنه عند قسمة $x^6 - 2x^4 + ax^2 + bx + c$ على $(x - 1)$ و $(x + 2)$ و $(x + 4)$ ، يكون الباقي 0. -125, 342, -216

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-4 اعلم أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تشتمل على n أصفار حقيقية على الأكثر.

الدرس 1-4 إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود. أوجد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

بعد الدرس 1-4 حل المتباينات كثيرة الحدود.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

أسأل:

لماذا حل المسألة لإيجاد قيمة $P(x) = 1,500$ وليس $P(x) = 1,500,000$ ؟ تمثل x عدد آلاف الدراهم التي تم إنفاقها. حيث إن $1,500,000 = 1,500 \times 1,000$ فأوجد قيمة $P(x) = 1,500$

ما المعادلة التي يجب حلها إذا كانت $P(x) = 1,500$ ؟ $-0.0007x^2 + 2.45x = 1,500$

(يُتبع في الصفحة التالية)

أصفار الدوال كثيرة الحدود

لماذا؟

الحالي

السابق

- تعلمت أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n أصفار حقيقية على الأكثر. (الدرس 1-1)
- إيجاد الأصفار الحقيقية للدوال كثيرة الحدود.
- إيجاد الأصفار المركبة للدوال كثيرة الحدود.

تفكر شركة أن الأرباح P بآلاف الدراهم من نموذج معين لجهاز التحكم في ألعاب الفيديو كما يلي $P(x) = -0.0007x^2 + 2.45x$. بحيث x هو عدد الآلاف بالدراهم المستثمرة في تسويق جهاز التحكم. لمعرفة عدد الدراهم التي ينبغي أن تستثمرها الشركة لتحقيق أرباح تبلغ 1,500,000 AED. يمكنك استخدام الأساليب الواردة في هذا الدرس لحل المعادلة كثيرة الحدود $P(x) = 1,500$

1 الأصفار الحقيقية تذكر أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n يمكن أن تحتوي على n أصفار حقيقية. يمكن أن تكون هذه الأصفار الحقيقية نسبية أو غير نسبية.

الأصفار النسبية	الأصفار غير النسبية
$f(x) = (x + 3)(3x - 2)$ أو $f(x) = 3x^2 + 7x - 6$ يوجد صفران نسبيا. -3 أو $\frac{2}{3}$	$g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$ أو $g(x) = x^2 - 5$ يوجد صفران غير نسبيا. $\pm\sqrt{5}$

توضح **نظرية الصفر النسبي** كيف يمكن استخدام معامل الحد الأكبر والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

المفهوم الأساسي نظرية الصفر النسبي

بما أن f دالة كثيرة الحدود بالصيغة التالية $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات من الأعداد الصحيحة و $a_0 \neq 0$ ، فإن كل صفر نسبي للدالة f يُمثل بالصيغة $\frac{p}{q}$ ، بحيث

- p و q لا يوجد لهما أي عوامل مشتركة إلا ± 1
- p عامل عدد صحيح للحد الثابت a_0
- q عامل عدد صحيح لمعامل الحد الأكبر a_n

النتيجة إذا كان معامل الحد الأكبر a_n يساوي 1، فأي صفر نسبي للدالة f يُد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت a_0

بمجرد أن تعرف جميع الأصفار النسبية الممكنة لدالة كثيرة الحدود، يمكنك استخدام التعويض المباشر أو التركيبي لتحديد أي منها يُعد أصفاراً فعلية للدالة كثيرة الحدود.

مثال 1 معامل الحد الأكبر يساوي 1

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

a. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

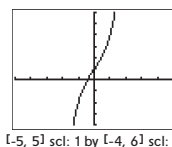
الخطوة 1 حدد الأصفار النسبية الممكنة.

بما أن معامل الحد الأكبر يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت 1. لذا، الأصفار النسبية الممكنة للدالة f هي 1 و -1

الخطوة 2 استخدم التعويض المباشر لاختبار كل صفر ممكن.

$$f(1) = (1)^3 + 2(1) + 1 = 4 \text{ أو } f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1 = -2$$

بما أن $f(1) \neq 0$ و $f(-1) \neq 0$ ، يمكنك استنتاج أن f لا يحتوي على أصفار نسبية. من التمثيل البياني للدالة f ، يمكنك أن تعرف أن f تحتوي على صفر حقيقي واحد. يوضح تطبيق نظرية الأصفار النسبية أن هذا الصفر غير نسبي.



[-5, 5] scl: 1 by [-4, 6] scl: 1

مفردات جديدة

نظرية الصفر النسبي
(Rational Zero Theorem)
الحد الأدنى (lower bound)
الحد الأعلى (upper bound)
قاعدة ديكرت للإشارات
(Descartes' Rule of Signs)
نظرية الجبر الأساسية
(Fundamental Theorem of Algebra)
نظرية تحليل العوامل الخطية
(Linear Factorization Theorem)
نظرية الجذر المرافق
(Conjugate Root Theorem)
مرافقات مركبة (complex conjugates)
الجذور الحقيقية
غير القابلة للاختزال
(irreducible over the reals)

الخطوة 1 بما أن معامل الحد الأكبر يساوي 1، فإن جميع الأضفار النسبية الممكنة تُعد من عوامل الأعداد الصحيحة للحد الثابت -9. لذا، الأضفار النسبية الممكنة للدالة g هي ± 1 و ± 3 و ± 9

$$\begin{array}{rrrrr} \boxed{1} & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & \hline & & 1 & 5 & 5 & -7 \\ & \hline 1 & 5 & 5 & -7 & & -16 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \boxed{-1} & 1 & 4 & 0 & -12 & -9 \\ & \hline & & -1 & -3 & 3 & 9 \\ & \hline 1 & 3 & -3 & -9 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 3 & -3 & -9 \\ & & -3 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

لتحقيق من الحل يحتوي التمثيل البياني للدالة $g(x) = x^4 + 4x^3 - 12x - 9$ في الشكل 1.4.1 على نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x عند -1 و -3 وبالقرب من $(2, 0)$ و $(-2, 0)$. من خلال تطبيق نظرية الأصفار النسبية، نعرف أن هذين الصفرين الآخرين يجب أن يكونا $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$. في الحقيقة، ينتج عن العامل $(x^2 - 3)$ صفران غير نسبيين، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$. ✓

ذكر جميع الأصفار النسبة المحتملة لكل دالة. ثم حدد أياً منها يكون أصفاراً، إن وجدت.

1B. $h(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 30$

الشكا، 1.4.1

1B. $\pm 1, \pm 2, \pm 3,$

 $\pm 6, \pm 10,$ $\pm 15,$ $\pm 30; 2, -5$

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الواردة في الجزء
"تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد فهم
الطلاب للمفاهيم.

ذكر جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $h(x) = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 8$ ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت.

الخطوة 1 معامل الحد الأكبر هو 3 والحد الثابت هو 8.

الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3} = \frac{\pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1}{\pm 3, \pm 1} = \frac{\text{عوامل 8}}{\text{عوامل 3}}$

الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن -2 صفر نسبي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -7 & -22 & 8 \\ & & -6 & 26 & -8 \\ \hline & 3 & -13 & 4 & 0 \end{array}$$

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = (x + 2)(3x^2 - 13x + 4)$ يجر تحليل $3x^2 - 13x + 4$ إلى عوامل. تصبح الدالة كثيرة الحدود $h(x) = (x + 2)(3x - 1)(x - 4)$ ويكتك استنتاج أن الأصفار النسبية للدالة h هي -2 و $\frac{1}{3}$ و 4 . تحقق من هذه النتيجة بالتعبير الباني.

ذكر جميع الأصفار النسبة المحتملة لكل دالة. ثم حدد أننا نكون أصفاراً، إن وجدت.

2B. $f(x) = 3x^4 - 18x^3 + 2x - 21$

 $\pm 6, \pm 9, \pm 12,$ $\pm 18, \pm 36, \pm \frac{1}{2},$
$$\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}; 2$$

2B. $\pm 1, \pm 3, \pm 7,$

 $\pm 21, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{7}{3}$

لا توجد أصفار نسبية

1

اذك جميع الأصفار النسبية

المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها أصفًا، إن وجدت.

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$

 $\pm 1, \pm 2, \pm 4; 1$

b. $f(x) = x^3 - 2x - 1$ $\pm 1; -1$

— 11 —

اذكر جميع الـاصفار النسبيه
المحتملة لـ

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$$

ثم حدد أئنا منها يمثل أصفارًا، إن وجدت.

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2},$$

$$\pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}; \frac{1}{2}, -3, 5$$

مثال إضافي

3

مستوى الماء يمكن عمل نموذج لمستوى الماء في دلو بالفناء باستخدام $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 7$. حيث $f(x)$ يمثل ارتفاع الماء بالمليمتر و x يشير إلى الوقت بالأيام. في أي يوم (أيام) سيصل ارتفاع الماء إلى 10 مليترات؟ **اليوم الأول**

التدريس باستخدام التكنولوجيا

الهدونة اطلب من الطلاب كتابة إدخال على مدونة الوحدة لتلخيص كيفية إيجاد الأصفار النسبية المحتملة لدالة كثيرة الحدود. وتأكد أن الطلاب يستخدمون مفهوم $\frac{p}{q}$ في توضيحاتهم.

مثال 3 من الحياة اليومية حل معادلة كثيرة الحدود

الأعمال بعد أول نصف ساعة، يمكن تمثيل عدد ألعاب الفيديو التي باعتها الشركة في تاريخ الإصدار كما يلي $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x$ ، بحيث يكون $g(x)$ هو عدد الألعاب المباعة بالهئات و x عدد الساعات بعد الإصدار. ما الوقت المستغرق لبيع 400 لعبة؟

بما أن $g(x)$ تمثل عدد الألعاب المباعة بالهئات، يجب أن نحل $g(x) = 400$ لتحديد الوقت المستغرق لبيع 400 لعبة.

اكتب المعادلة: $g(x) = 400$

قم بتبويض $2x^3 + 4x^2 - 2x = 400$ لـ $g(x)$

اطرح 4 من كل طرف: $2x^3 + 4x^2 - 2x - 4 = 0$

طبق نظرية الأصفار النسبية على هذه الدالة الجديدة كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

الخطوة 1 الأصفار النسبية الممكنة: $\frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4}{\pm 1, \pm 2} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4}{\pm 1, \pm 2} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$

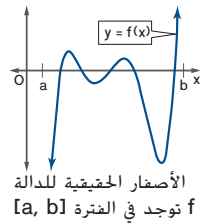
الخطوة 2 باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن 1 يمثل صفراً ضيقاً.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 4 & -2 & -4 \\ & & 6 & 4 & 0 \\ \hline & 2 & 6 & 4 & 0 \end{array}$$

بما أن 1 صفر للدالة f ، إذا $x = 1$ بعد حلّ للدالة $f(x) = 0$ يمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود المنخفضة $2x^2 + 6x + 4$ كما يلي $(x + 2)(x + 1)$ وأصفار هذه الدالة كثيرة الحدود -2 و -1 وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون بالسالب، إذا الحل $x = 1$ لذا، يستغرق الوقت ساعة واحدة لبيع 400 لعبة.

تمرين موجه

3. **الكرة الطائرة** فيما يلي التمثيل البياني لكرة طائرة عادت بعد ضربها بسرعة أولية 40 قدمًا في الثانية بارتفاع 4 أقدام $f(t) = 4 + 40t - 16t^2$. بحيث $f(t)$ يمثل ارتفاع الكرة بالقدم و t يمثل الوقت بالثواني. في أي وقت (أوقات) ستصل الكرة إلى ارتفاع 20 قدمًا؟ **0.5 ثانية وثانيتين**



ثمة طريقة لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية وهي تحديد الفترة التي يتم فيها تحديد مواقع الأصفار الحقيقية للدالة. العدد الحقيقي a هو **القيمة الصغرى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $a < x$ وبالمثل، b هو **القيمة العظمى** للأصفار الحقيقية للدالة f إذا كانت $f(x) \neq 0$ للدالة $x > b$

يمكنك اختبار هل فترة معينة على جميع الأصفار الحقيقية لدالة باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى التالية.

المفهوم الأساسي اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

لنفرض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 1$ ولها معاملات حقيقية ومعامل أكبر حد موجب. لنفرض أن $f(x)$ تمت قسمته على $x - c$ باستخدام القسمة التركيبية.

- إذا كان $c \leq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب وغير موجب، فإن c هي قيمة صغرى للأصفار الحقيقية للدالة f
- إذا كان $c \geq 0$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هي قيمة عظمى للأصفار الحقيقية للدالة f

الربط بالحياة اليومية

أظهرت دراسة حديثة أن أعمار ما يقرب من ثلث هواة ألعاب الفيديو المعروفة بين 6 و 17 عامًا.

المصدر: NPD Group Inc

القراءة في الرياضيات

غير سالبة وغير موجبة نذكر أن القيمة غير السالبة هي القيمة الموجبة أو الصفر وأن القيمة غير الموجبة هي القيمة السالبة أو الصفر.

التركيز على محتوى الرياضيات

الأصفار الحد الأعلى لأصفار الدالة
كثيرة الحدود هو عدد ليس له صفر حقيقي موجود أكبر من ذلك العدد الموجود لتلك الدالة. تكون القيمة الصغرى لأصفار الدالة كثيرة الحدود عبارة عن عدد ليس له صفر حقيقي موجود أصغر من ذلك العدد. ويكون الحدان الأعلى والأدنى المختاران غير فريدين.

يتم اختبار الحدين المختارين عن طريق قسمة كثيرة الحدود تركيبياً على التعابير الخطية $x - c$ ، حيث يمثل c كل عدد تم اختياره. وإذا كان كل عدد في السطر الأخير بالقسمة غير سالب وغير موجب بشكل متبادل، فسيكون المقسوم عليه حدًا أدنى. إذا كان كل عدد في السطر الأخير بالقسمة غير سالب، فسيكون المقسوم عليه حدًا أعلى. ويمكن أن يساعد إيجاد الحدين الأعلى والأدنى في حذف القيم من قائمة الأصفار المحتملة التي تم العثور عليها عند استخدام نظرية الصفر النسبي.

مثال إضافي

4 حدد فترة يجب أن تقع فيها جميع الأصفار الحقيقية لـ $f(x) = x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 4x - 12$ اشرح استدلالك باستخدام اختبارات الحدين الأعلى والأدنى. ثم أوجد جميع الأصفار الحقيقية. قد يختلف الحدان الأعلى والأدنى. الإجابة النموذجية: باستخدام القسمة التركيبية، تبدل القيم العلامات عند اختبار -3 ، وتكون كلها سالبة عند اختبار 7 لذلك، تكون -3 حدًا أدنى و 7 حدًا أعلى. وتكون الأصفار -2 و 6

نصيحة دراسية

القيمتان العظمى والصغرى ليس بالضرورة أن تكون القيمتان العظمى والصغرى لدالة فريدين.

للاستفادة من اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى، اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 مثل الدالة بيانًا لتحديد فترة توجد فيها الأصفار.

الخطوة 2 باستخدام التوويض التركيبي، تأكد أن القيمتين العظمى والصغرى للفترة هما في الحقيقة القيمتان العظمى والصغرى للدالة بتطبيق اختبارات القيمة العظمى والقيمة الصغرى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي للمساعدة على إيجاد جميع الأصفار الحقيقية.

مثال 4 استخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم أوجد كل الأصفار الحقيقية.

الخطوة 1 مثل $h(x)$ بيانًا باستخدام آلة حاسبة بيانية، من هذا التمثيل البياني، يبدو أن الأصفار الحقيقية لهذه الدالة توجد في الفترة $[-1, 7]$

الخطوة 2 اختبر القيمة الصغرى للدالة $c = -1$ والقيمة العظمى للدالة $c = 7$

2	-11	2	-44	-24
-2	13	-15	59	
35	-59	15	-13	2
2	-11	2	-44	-24
14	21	161	819	
2	3	23	117	795

تعمل القيم على تبديل الإشارات في السطر الأخير، لذا -1 هو القيمة الصغرى.

جميع القيم غير سالبة في السطر الأخير، لذا 7 هو القيمة العظمى.

الخطوة 3 استخدم نظرية الصفر النسبي.

$$\frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24}{\pm 1, \pm 2} = \frac{\pm 24}{\pm 4} = \pm 6, \pm 3$$

بما أن الأصفار الحقيقية في الفترة $[-1, 7]$ ، يمكنك تضيق هذه القائمة إلى ± 1 أو $\pm \frac{1}{2}$ أو $\pm \frac{3}{2}$ أو 2 أو 4 أو 6 فقط. من التمثيل البياني، يبدو أن 6 و $-\frac{1}{2}$ فقط منطقيان.

ابدأ باختبار 6 .
المنخفضة.

2	-11	2	-44	-24
12	6	48	24	
2	1	8	4	0

بتطبيق خوارزمية القسمة، $h(x) = 2(x - 6)(x + \frac{1}{2})(x^2 + 4)$ لاحظ أن العامل $(x^2 + 4)$ لا توجد له أصفار حقيقية مرتبطة به لأن $x^2 + 4 = 0$ لا توجد لها حلول حقيقية، لذا، f لها حلان حقيقيان بسيان وهما 6 و $-\frac{1}{2}$ ويدعم التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x^4 - 11x^3 + 2x^2 - 44x - 24$ هذا الاستنتاج.

تمرين موجه

حدد فاصلًا فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية للدالة المحددة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القيمتين العظمى والصغرى. ثم أوجد كل الأصفار الحقيقية.

4A. $g(x) = 6x^4 + 70x^3 - 21x^2 + 35x - 12$ 4B. $f(x) = 10x^5 - 50x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 41x + 30$

الإجابة النموذجية: $-1.16, -0.71, 5, 6, -2, -4A$. الإجابة النموذجية: $-\frac{1}{3}, -12, 1, -13$

مثال إضافي

5 وضح الأصفار الحقيقية المحتملة لـ
 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 7$
 2 أو 0 أصفار حقيقية موجبة، 2 أو 0 أصفار حقيقية سالبة

2 الأصفار المركبة

المثال 6 يوضح كيفية كتابة دالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية بافتراض أصفارها الحقيقية والمركبة.
 المثال 7 يوضح كيفية إيجاد الأصفار الحقيقية والمركبة لكثيرة حدود وكتابة كثيرة الحدود كناتج للعوامل التربيعية الخطية غير القابلة للتبسيط.
 المثال 8 يوضح كيفية إيجاد باقي الأصفار الحقيقية لكثيرة الحدود عند معرفة أحدها.

ثمة طريقة أخرى لتضييق البحث عن الأصفار الحقيقية هي استخدام قاعدة ديكرت للإشارات. توفر هذه القاعدة معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص التغير في إشارة الدالة كثيرة الحدود.

القراءة في الرياضيات

تغير الإشارة يحدث تغير الإشارة في أي دالة مكتوبة بالصيغة القياسية عندما تحتوي المعاملات التالية على إشارات معاكسة.

المفهوم الأساسي قاعدة ديكرت للإشارات

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية، فإن
- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة f يساوي عدد متغيرات الإشارة للدالة $f(x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي
 - عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة f هو نفسه عدد متغيرات الإشارة للدالة $f(-x)$ أو أصغر من هذا العدد بمقدار عدد زوجي محدد.

مثال 5 استخدام قاعدة ديكرت للإشارات

وضح الأصفار الحقيقية الممكنة للدالة $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$

اختبر متغيرات الإشارة للدالة $g(x)$ والدالة $g(-x)$

$$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

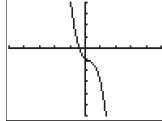
- إلى +
+ إلى -

$$g(-x) = -3(-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) - 1$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + x - 1$$

- إلى +

تحتوي الدالة الأصلية $g(x)$ على متغيرين في الإشارة، بينما تحتوي الدالة $g(-x)$ على متغير واحد في الإشارة. بتطبيق قاعدة ديكرت للإشارات، نعرف أن الدالة $g(x)$ تحتوي على صفرين حقيقيين موجبين أو بدون أصفار وصفر حقيقي سالب واحد.



[-5, 5] scl: 1 by [-6, 4] scl: 1

من التمثيل البياني للدالة $g(x)$ الموضحة، يمكنك معرفة أن الدالة تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد قريب من $x = -0.5$ وبدون أصفار حقيقية موجبة.

تمرين موجه

وضح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة.

5A. $h(x) = 6x^5 + 8x^2 - 10x - 15$

5B. $f(x) = -11x^4 + 20x^3 + 3x^2 - x + 18$

5A. صفر حقيقي موجب واحد، صفران حقيقيان سالبان أو بدون أصفار

5B. 3 أصفار حقيقية موجبة أو صفر واحد، صفر حقيقي سالب واحد

عند استخدام قاعدة ديكرت للإشارات، يتضمن عدد الأصفار الحقيقية الموضح أي أصفار متكررة. لذا، ينبغي حساب صفر بالتكرار m كأصفار m .

2 الأصفار المركبة يمكن أن تحتوي مثل الدوال التربيعية على أصفار حقيقية أو تخيلية ويمكن أن تحتوي الدوال كثيرة الحدود ذات الدرجة الأعلى أيضًا على أصفار في نظام الأعداد المركبة. نجعلنا هذه الحقيقة بالإضافة إلى نظرية الجبر الأساسية نحسن العبارة الخاصة بنا المعنية بعدد الأصفار لأي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n .

المفهوم الأساسي نظرية الجبر الأساسية

تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n ، بحيث $n > 0$ ، على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

النتيجة تحتوي أي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n على n معين من الأصفار، بما في ذلك الأصفار المتكررة، في نظام الأعداد المركبة.

الربط بتاريخ الرياضيات

رينيه ديكرت (1596-1650) فيلسوف وعالم رياضي فرنسي، كتب ديكرت العديد من الأعمال الفلسفية مثل مقال عن المنهج وأعمال رياضية مثل الهندسة.

مثال إضافي

6 اكتب دالة كثيرة الحدود من الدرجة الأقل مع المعاملات الحقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على -1 و 2 و $i - 2$ كأصفار. **الإجابة النموذجية:**
 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 3x - 10$

نصائح للمعلمين الجدد

– i^2 ذكر الطلاب بأن $-1 = i^2$ وبالتالي، $-i^2 = -(-1) = 1$ أو 1

التركيز على محتوى الرياضيات

نظريات الوجود يطلق على نظرية الجبر الأساسية ونظريات تحليل العوامل الخطية نظريات الوجود. فهذه النظريات تخبرك بأن الأصفار أو العوامل الخطية لكثيرة الحدود موجودة، ولكن لا تخبرك بكيفية إيجادها.

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود
اللانهاية بما أن a يمكن أن يكون أي عدد حقيقي غير الصفر، يوجد عدد لا نهائي من الدوال كثيرة الحدود التي يمكن كتابتها لمجموعة معينة من الأصفار.

نصيحة دراسية

الدوال كثيرة الحدود
الأولية لاحظ الفرق بين التعابير التي تُعد جذورًا تربيعية وتعابير غير قابلة للتبسيط تُعد أولية. التعبير $x^2 - 8$ أولي لأنه لا يمكن تحليله إلى تعابير باستخدام معاملات صحيحة. ومع ذلك، لا تُعد $x^2 - 8$ جذورًا تربيعية غير قابلة للتبسيط لأنه توجد أصفار حقيقية مرتبطة بها $\sqrt{8}$ و $-\sqrt{8}$.

بتوسيع نظرية العامل لتشمل كلاً من الأصفار الحقيقية والتخيلية وتطبيق نظرية الجبر الأساسية، نحصل على **نظرية تحليل العوامل الخطية**.

المفهوم الأساسي نظرية تحليل العوامل الخطية

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ، فإن الدالة f تحتوي على n معين من العوامل الخطية
 $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$
حيث a_n عدد حقيقي معين غير الصفر و c_1, c_2, \dots, c_n هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) للدالة f .

وفق **نظرية الجذر المرافق** عندما تحتوي معادلة كثيرة الحدود على متغير واحد وذات معاملات حقيقية على جذر بالصيغة $a + bi$ ، بحيث $b \neq 0$ ، فإن **المرافق المركب**، $a - bi$ ، يُعد جذرًا أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لكتابة دالة كثيرة الحدود توجد أصفارها المركبة.

مثال 6 إيجاد دالة كثيرة الحدود أصفارها معلومة

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تتضمن -2 و 4 و $i - 3$ كأصفار. بما أن $i - 3$ تساوي صفرًا ويجب أن تحتوي الدالة كثيرة الحدود على معاملات حقيقية، إذاً نعرف أن $i + 3$ يجب أن تساوي أيضًا صفرًا. باستخدام نظرية تحليل العوامل الخطية والأصفار -2 و 4 و $i - 3$ و $i + 3$ ، يمكنك كتابة $f(x)$ كما يلي.

$$f(x) = a[x - (-2)][x - 4][x - (3 - i)][x - (3 + i)]$$

في حين أن a يمكن أن يكون عددًا حقيقيًا غير الصفر، من الأسهل أن نفرض أن $a = 1$. ثم اكتب الدالة في أبسط صورة.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1)(x + 2)(x - 4)[x - (3 - i)][x - (3 + i)] & \text{افرض أن } a = 1 \\ &= (x^2 - 2x - 8)(x^2 - 6x + 10) & \text{اضرب} \\ &= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80 & \text{اضرب} \end{aligned}$$

وبالتالي، تصبح الدالة ذات أقل درجة التي تحتوي على -2 و 4 و $i - 3$ و $i + 3$ كأصفار هي $f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 28x - 80$ أو أي مضاعف غير صفري للدالة $f(x)$.

تمرين موجه

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية مع الأصفار الموضحة. **تم تقديم نماذج للإجابات.**

$$6A. -3, 1, 2 \quad 4i \quad \text{(التكرار)} \quad 6B. 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1 + i$$

$$6A. f(x) = x^5 + x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 80x + 48 \quad 6B. f(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 24x - 24$$

في المثال 6، كتبت معادلة بأصفار حقيقية ومركبة. تتضمن الدالة أصفارًا مركبة عندما تحتوي صيغتها المحللة على عامل تربيعي يُعد من الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط. يصبح التعبير التربيعي **الجذور الحقيقية غير القابلة للتبسيط** عندما يحتوي على معاملات حقيقية غير مرتبطة بأصفار حقيقية. يوضح هذا المثال النظرية التالية.

المفهوم الأساسي تحليل الدوال كثيرة الحدود على الأعداد الحقيقية

يمكن كتابة كل دالة كثيرة الحدود من الدرجة $n > 0$ ذات معاملات حقيقية كنتاج للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للتبسيط، وكل له معاملات حقيقية.

كما يتضح من نظرية تحليل العوامل الخطية، عند تحليل دالة كثيرة الحدود على نظام الأعداد المركبة، يمكننا كتابة المعادلة بوصفها ناتج العوامل الخطية فقط.

المتعلمون أصحاب النهط المنطقي اطلب من الطلاب مقارنة نواتج $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ و $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. شجع الطلاب على ملاحظة أن واحدة من كثيرات الحدود هذه تشتمل على جذور موجبة فقط بينما تشتمل الأخرى على جذور سالبة فقط. ثم اطرح السؤال التالي: ما المزايا التي توفرها لنا كثيرات الحدود لاستنتاج هذه الحقيقة؟ **يشتمل الناتج الثاني على كل المعاملات الموجبة، بينما يشتمل الأول على علامات تبديل.**

مثال إضافي

7 افترض أن $k(x) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 23x^2 - 14x - 24$

a. اكتب $k(x)$ كنتاج للعوامل التربيعية غير القابلة للتبسيط والخطية.

$$k(x) = (x - 4)(x + 2)x(x + 3)(x^2 + 1)$$

b. اكتب $k(x)$ كنتاج للعوامل الخطية.

$$k(x) = (x - 4)(x + 2)x(x + 3)(x + i)(x - i)$$

c. اذكر جميع أصفار $k(x)$
4, -2, -3, i, -i

مثال 7 تحليل أصفار الدالة كثيرة الحدود وإيجادها

نفرض أن $k(x) = x^5 - 18x^3 + 30x^2 - 19x + 30$

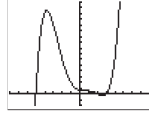
a. اكتب $k(x)$ كنتاج للعوامل الخطية وعوامل الجذور التربيعية غير القابلة للاختزال.

الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$ وبذلك تحتوي الدالة الأصلية على 4 متغيرات إشارة.

$$k(-x) = (-x)^5 - 18(-x)^3 + 30(-x)^2 - 19(-x) + 30$$

$$x^5 + 18x^3 + 30x^2 + 19x + 30 =$$

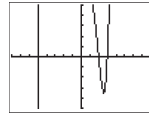
بما أن $k(-x)$ تحتوي على متغير إشارة واحد، إذاً $k(x)$ تحتوي على 4 أصفار حقيقية موجبة أو 2 أو 0 وعلى صفر حقيقي سالب واحد.



[-8, 8] scl: 1 by [-100, 800] scl: 50

يعرض التمثيل البياني الموضح -5 كصفر حقيقي واحد للدالة $k(x)$. استخدم التعويض التركيبي لاختبار هذه الاحتمالية.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -5 & 1 & 0 & -18 & 30 & -19 & 30 \\ & & -5 & 25 & -35 & 25 & -30 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$



[-8, 8] scl: 1 by [-100, 800] scl: 50

بما أن $k(x)$ تحتوي على صفر حقيقي سالب واحد فقط، لست بحاجة إلى اختبار أي أصفار نسبية سالبة ممكنة أخرى. قم بتكبير الأصفار الحقيقية الموجبة في التمثيل البياني الذي يظهر 2 و 3 كأصفار نسبية أخرى. اختبر هذه الاحتمالات بالتتابع في الدوال كثيرة الحدود التربيعية المنخفضة ثم التكعيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & -5 & 7 & -5 & 6 \\ & & 2 & -6 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

ابدأ باختبار 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 0 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

اختبر الآن 3 على الدالة كثيرة الحدود المنخفضة.

لا ينتج عن العامل التربيعي المتبقي $(x^2 + 1)$ أي أصفار نسبية وبالتالي أي جذور حقيقية غير قابلة للاختزال. لذا، تصبح $k(x)$ المكتوبة كنتاج لعوامل خطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال $k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

b. اكتب $k(x)$ كنتاج للعوامل الخطية.

يمكنك تحليل $x^2 + 1$ بكتابة التعبير أولاً كفرق مربعات $(\sqrt{-1})^2 - x^2$ أو $i^2 - x^2$. ثم حلل فرق الجذور التربيعية هذا كما يلي $(x - i)(x + i)$. لذا، تكتب $k(x)$ كنتاج للعوامل الخطية كما يلي.

$$k(x) = (x + 5)(x - 2)(x - 3)(x - i)(x + i)$$

c. اذكر جميع أصفار $k(x)$.

بما أن الدالة من الدرجة 5 بلازمة نظرية الجبر الأساسية، تحتوي $k(x)$ على خمسة أصفار بالفعل، بما في ذلك أي صفر قد يكون متكرراً. يعطينا تحليل العوامل الخطية هذه الأصفار الخمسة: -5 و 2 و 3 و i و $-i$.

تمرين موجّه

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و (b) ناتج العوامل الخطية. ثم (c) اذكر جميع أصفارها.

7a. $f(x) = x^4 + x^3 - 26x^2 + 4x - 120$

7B. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 99x + 108$

نصيحة دراسية

استخدام التكرار سيكون الصفر النسبي في بعض الأحيان صفراً متكرراً في الدالة. استخدم التمثيل البياني للدالة لتحديد هل ينبغي اختبار صفر نسبي باستخدام التعويض التركيبي بالتتابع.

نصيحة دراسية

الصفة التربيعية يمكنك أيضاً استخدام الصفة التربيعية لإيجاد أصفار $x^2 + 1$ لتحليل التعبير.

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = \pm \frac{2i}{2} = \pm i$$

لذا، يُعد i و $-i$ أصفاراً و $(x - i)$ و $(x + i)$ عوامل.

7a. a. $f(x) = (x^2 + 4)$
 $x(x - 5)(x + 6)$
b. $f(x) = (x - 2i)x(x + 2i)(x - 5)(x + 6)$
c. $\pm 2i, 5, -6$
7B. a. $f(x) = (x^2 + 9)x(x - 1)(x - 4)(x + 3)$
b. $f(x) = (x - 3i)x(x + 3i)(x - 1)(x - 4)(x + 3)$
c. $\pm 3i, 1, 4, -3$

يمكنك استخدام التعويض التركيبي مع الأعداد المركبة بنفس الطريقة التي تستخدمها مع الأعداد الحقيقية. يمكن أن يساعدك ذلك على تحليل الدالة كثيرة الحدود لإيجاد جميع أصفارها.

مثال 8 إيجاد أصفار الدالة كثيرة الحدود بمعلومية واحد منها

أوجد جميع الأصفار المركبة للدالة $p(x) = x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 22x - 13$ مع العلم أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة p . ثم اكتب تحليل العوامل الخطية للدالة $p(x)$.

استخدم التعويض التركيبي للتأكد من أن $2 - 3i$ هي صفر للدالة $p(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & & \\ \hline & 1 & -4-3i & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2-3i)(-4-3i) &= -8 + 6i + 9i^2 \\ &= -8 + 6i + 9(-1) \\ &= -17 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & 24+3i & \\ \hline & 1 & -4-3i & 3+6i & & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2-3i)(3+6i) &= 6 + 3i - 18i^2 \\ &= 6 + 3i - 18(-1) \\ &= 24 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2-3i & 1 & -6 & 20 & -22 & -13 \\ & & 2-3i & -17+6i & 24+3i & 13 \\ \hline & 1 & -4-3i & 3+6i & 2+3i & 0 \end{array}$$

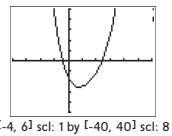
$$\begin{aligned} (2-3i)(2+3i) &= 4 - 9i^2 \\ &= 4 - 9(-1) \\ &= 4 + 9 = 13 \end{aligned}$$

بما أن $2 - 3i$ هي للدالة p ، فأنت تعرف أن $2 + 3i$ أيضًا صفر للدالة p . افسم الدالة كثيرة الحدود المنخفضة على $2 + 3i$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2+3i & 1 & -4-3i & 3+6i & 2+3i \\ & & 2+3i & -4-6i & -2-3i \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

باستخدام هذين الصفرين والدالة كثيرة الحدود المنخفضة من هذه القسمة الأخيرة، يمكنك كتابة $p(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x^2 - 2x - 1)$. بما أن $p(x)$ دالة رباعية كثيرة الحدود، فأنت تعرف أن لها 4 أصفار حقيقية بالفعل. إذا وجدت صفرين اثنين، تجد الصفرين الآخرين. أوجد أصفار $x^2 - 2x - 1$ باستخدام الصيغة التربيعية.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{الصيغة التربيعية} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} && a = 1, b = -2, c = -1 \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} && \text{حوّل لأبسط صورة.} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} && \text{حوّل لأبسط صورة.} \end{aligned}$$



[-4, 6] scl: 1 by [-40, 40] scl: 8

لذا، أصفار الدالة الأربعة $p(x)$ هي $2 - 3i$ و $2 + 3i$ و $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$. ويكون تحليل العوامل الخطية للدالة $p(x)$ هو $[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)][x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$. باستخدام التمثيل البياني للدالة $p(x)$ ، يمكنك التأكد من أن الدالة تحتوي على صفرين حقيقيين عند $1 + \sqrt{2}$ أو حوالي 2.41 و $1 - \sqrt{2}$ أو حوالي -0.41.

تقرين موجب

لكل دالة، استخدم الصفر الموضح لإيجاد جميع الأصفار المركبة للدالة. ثم اكتب تحليل العوامل الخطية للدالة.

$$\begin{aligned} 8A. g(x) &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10; 2 + \sqrt{3} \\ 8B. h(x) &= x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 8x - 95; 1 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

انتبه!

الأعداد المركبة تذكر من الدرس 2-0 أن جميع الأعداد الحقيقية أعداد مركبة أيضًا.

مثال إضافي

8 أوجد جميع الأصفار المركبة في $p(x) = x^4 - 6x^3 + 35x^2 - 58x - 50$ مع العلم أن $5i + 2$ هو صفر لـ p . ثم اكتب تحليل العوامل الخطية لـ $p(x)$.

هو صفر لـ p . ثم اكتب تحليل العوامل الخطية لـ $p(x)$.

$$\begin{aligned} 2 + 5i, 2 - 5i, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}; p(x) &= [x - (2 + 5i)][x - (2 - 5i)][x - (1 + \sqrt{3})][x - (1 - \sqrt{3})] \end{aligned}$$

إجابات إضافية

$$1. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \pm 20, \pm 30, \pm 36, \pm 45, \pm 60, \pm 90, \pm 180; 6, 5, 1, -6$$

$$2. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}; 6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$3. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30; -5, 6, -1, 1$$

$$4. \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}; 2, -\frac{1}{4} \text{ (المضاعفة: 2), } 5, -\frac{1}{4}$$

$$5. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{15}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{20}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}; -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$$

$$6. \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{8}{3}, \pm \frac{16}{3}, \pm \frac{32}{3}, \pm \frac{64}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}, \pm \frac{8}{9}, \pm \frac{16}{9}, \pm \frac{32}{9}, \pm \frac{64}{9}, \pm \frac{1}{18}; -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$$

$$7. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 16, \pm 18, \pm 24, \pm 27, \pm 36, \pm 48, \pm 54, \pm 72, \pm 108, \pm 144, \pm 216, \pm 432; 4 \text{ (المضاعفة: 2), } 3$$

$$8. \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{15}{2}, \pm \frac{45}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{15}{4}, \pm \frac{45}{4}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{5}{8}, \pm \frac{9}{8}, \pm \frac{15}{8}, \pm \frac{45}{8}; \frac{1}{4}, -\frac{5}{2}$$

44 | الدرس 2-4 | أصفار الدوال كثيرة الحدود

44 | الدرس 1-4 | أصفار الدوال كثيرة الحدود

$$25. \text{ الإجابة النموذجية: } \frac{1}{2}; [-3, 5]; \text{ (المضاعفة: 2).}$$

$$-2, 3 \text{ (المضاعفة: 2)}$$

$$26. 1 \text{ صفر موجب, } 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار سالبة}$$

$$27. 3 \text{ أو } 1 \text{ أصفار موجبة, } 1 \text{ صفر سالب}$$

$$28. 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار موجبة, } 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار سالبة}$$

$$29. 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار موجبة, } 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار سالبة}$$

$$30. 3 \text{ أو } 1 \text{ أصفار موجبة, } 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار سالبة}$$

$$31. 4 \text{ أو } 2 \text{ أو } 0 \text{ أصفار موجبة, } 1 \text{ صفر سالب}$$

$$18. \text{ الإجابة النموذجية: } 6, -2, 1, 4; [-3, 10]$$

$$19. \text{ الإجابة النموذجية: } 3, 2, -4, -\frac{1}{2}; [-6, 5]$$

$$20. \text{ الإجابة النموذجية: } 2, -1, -4; [-6, 4]$$

$$21. \text{ الإجابة النموذجية: } -2, 5, 1, \frac{3}{2}; [-4, 7]$$

$$22. \text{ الإجابة النموذجية: } 5, 2; [-2, 9]$$

$$\text{ (المضاعفة: 2), } -\frac{1}{2}$$

$$23. \text{ الإجابة النموذجية: } 3; [-2, 7] \text{ (المضاعفة: 2).}$$

$$-\frac{3}{2}, -1$$

$$24. \text{ الإجابة النموذجية: } 1; [-3, 5] \text{ (المضاعفة: 2).}$$

$$-2 \text{ (المضاعفة: 2).}$$

3 تمارين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-56 للتحقق من الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

افتيه !

خطأ شائع في التمرين 9، سيجد الطلاب أن لديهم الكثير من الأصفار النسبية المحتملة للاختبار. ذكرهم بأنه يمكنهم حذف الكثير من الأصفار للاختبار من خلال ملاحظة أن ℓ يجب أن يكون عددًا موجبًا أكبر من 4. ذكر الطلاب بطرح 45 من الدالة المعطاة، واضبطها لتساوي 0، ثم أوجد المتغير فقط باستخدام الأصفار المحتملة المقبولة لأبعاد الحاوية.

إجابات إضافية

32. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 23x^2 + 54x + 72$

33. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120$

34. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 6x^3 - 14x^2 + 154x - 255$

35. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 19x^3 + 113x^2 - 163x - 296$

36. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 41x^2 + 80x + 420$

37. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 5x^3 - 21x^2 + 119x - 130$

38. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = x^4 + 9x^2 - 112$$

39. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 + 36x - 150$

40. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 74x^2 - 172x + 41$

41. الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 28x^3 + 296x^2 - 1,372x + 2,263$

55a. $V(\ell) = \frac{1}{3}\ell^3 - 3\ell^2$

55b. $6,300 = \frac{1}{3}\ell^3 - 3\ell^2$

55c. القاعدة: $30 \text{ in.} \times 30 \text{ in.}$
الارتفاع: 21 in.

وضّح الأصفار الحقيقية الممكنة لكل دالة. (البنال 5) 32-41. انظر الهامش.

26. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x + 7$

27. $f(x) = 10x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 4x - 8$

28. $f(x) = -3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 6$

29. $f(x) = 12x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x + 12$

30. $g(x) = 4x^5 + 3x^4 + 9x^3 - 8x^2 + 16x - 24$

31. $h(x) = -4x^5 + x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 64x - 124$

اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأصفار الموضحة. (البنال 6) 32-41. انظر الهامش.

32. 3، -4، 6، -1

33. -2، -4، -3، 5

34. -5، 3، 4 + i

35. -1، 8، 6 - i

36. $2\sqrt{5}$ ، $-2\sqrt{5}$ ، -3، 7

37. -5، 2، 4 - $\sqrt{3}$ ، 4 + $\sqrt{3}$

38. $\sqrt{7}$ ، $-\sqrt{7}$ ، 4i

39. $\sqrt{6}$ ، $-\sqrt{6}$ ، 3 - 4i

40. $2 + \sqrt{3}$ ، $2 - \sqrt{3}$ ، 4 + 5i

41. $6 - \sqrt{5}$ ، $6 + \sqrt{5}$ ، $8 - 3i$

اكتب كل دالة في صورة (a) ناتج العوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال و(b) ناتج العوامل الخطية. ثم اذكر جميع أصفارها. (البنال 7)

42. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 20x + 48$

43. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 8$

44. $h(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 18x - 216$

45. $f(x) = 4x^4 - 35x^3 + 140x^2 - 295x + 156$

46. $f(x) = 4x^4 - 15x^3 + 43x^2 + 577x + 615$

47. $h(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$

48. $g(x) = x^4 + 31x^2 - 180$

49-54. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

استخدم الصفر الموضوح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة. ثم اكتب تحليل العوامل الخطية للدالة. (البنال 8)

49. $h(x) = 2x^5 + x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 225x + 108$; 3i

50. $h(x) = 3x^5 - 5x^4 - 13x^3 - 65x^2 - 2,200x + 1,500$; -5، i

51. $g(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 46x - 60$; 3 - i

52. $g(x) = 4x^5 - 57x^4 + 287x^3 - 547x^2 + 83x + 510$; 4 + i

53. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 32x + 96$; -2، i

54. $g(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 46x + 10$; 3 + i

55. الهندسة المعمارية يصمم مهندس معماري نموذجًا مقياسيًا لمبنى بشكل هرمي.

a. إذا كان ارتفاع النموذج المقياسي أقل من طوله بمقدار 9 بوصات وكانت قاعدته مربعة، فاكذب دالة كثيرة الحدود توضح حجم النموذج من حيث طوله.

b. إذا كان حجم النموذج 6,300 بوصة مكعبة، فاكذب معادلة توضح الموقف.

c. ما أبعاد النموذج المقياسي؟

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها يكون أصفارًا، إن وجدت. (البنال 1 و 2)

1-8. انظر الهامش.

1. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 31x^2 + 216x - 180$

2. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 - x + 6$

3. $g(x) = x^4 - x^3 - 31x^2 + x + 30$

4. $g(x) = -4x^4 + 35x^3 - 87x^2 + 56x + 20$

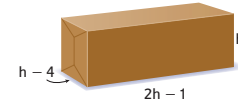
5. $h(x) = 6x^4 + 13x^3 - 67x^2 - 156x - 60$

6. $f(x) = 18x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 48x - 64$

7. $h(x) = x^5 - 11x^4 + 49x^3 - 147x^2 + 360x - 432$

8. $g(x) = 8x^5 + 18x^4 - 5x^3 - 72x^2 - 162x + 45$

9. التصنيع فيما يلي مواصفات أبعاد العبوة الكرتونية الجديدة. إذا تم تمثيل حجم الحاوية بالصيغة $V(h) = 2h^3 - 9h^2 + 4h$ وتحتوي على 45 بوصة مكعبة من سلع ما، فما هي أبعاد العبوة؟ (البنال 3)



أوجد حلًا لكل من المعادلات التالية. (البنال 3)

10. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 = 0$ (-2، 3، -1 (تكرار: 2)

11. $x^4 + 9x^3 + 23x^2 + 3x - 36 = 0$ (-4، 1، -3 (تكرار: 2)

12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ 3، -2، 2، -1

13. $x^4 - 3x^3 - 20x^2 + 84x - 80 = 0$ 4، -5، 2 (تكرار: 2)

14. $x^4 + 34x = 6x^3 + 21x^2 - 48$ -3، 8، 2، -1 15. $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، -4 (تكرار: 2)

15. $6x^4 + 41x^3 + 42x^2 - 96x + 6 = -26$

16. $-12x^4 + 77x^3 = 136x^2 - 33x - 18$ $\frac{2}{3}$ ، $3\frac{1}{4}$ (تكرار: 2)

17. المبيعات يمكن تمثيل المبيعات $S(x)$ بآلاف الدراهم التي يحققها متجر في الشهر تقريبًا

$$S(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x$$

حيث x هو عدد الأيام بعد أول يوم من الشهر. كم عدد الأيام الذي يستغرقها المتجر لتحقيق 16,000 AED؟ (البنال 3) يومان

حدد فترة يجب أن توجد فيها جميع الأصفار الحقيقية لكل دالة. اشرح استدلالك باستخدام اختبارات القسمة العظمى والصغرى. ثم أوجد الأصفار الحقيقية. (البنال 4) 18-25. انظر الهامش.

18. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48$

19. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 29x^2 + 34x + 24$

20. $g(x) = 2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 4x + 16$

21. $g(x) = 6x^4 - 33x^3 - 6x^2 + 123x - 90$

22. $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 39x^2 - 16x - 20$

23. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 21x^2 + 9x - 27$

24. $h(x) = x^5 - x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 16x - 12$

25. $h(x) = 4x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 80x^2 - 75x + 18$

AL BL OL خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1-56، 73، 74، 76، 77، 82-98	73، 74، 76، 77، 82-94 زوجي 2-5
OL ضمن المستوى	1-71، 72-74، 76، 77، 82-98	57-74، 76، 77، 82-94
BL أعلى من المستوى	57-98	



56. **الإنشاءات** يزيد ارتفاع نفق قيد الإنشاء عن نصف عرضه بمقدار قدم واحد وطوله يزيد عن 324 مرة من عرضه بمقدار 32 قدمًا. إذا كان حجم النفق 62,231,040 قدمًا مكعبًا وعلى شكل متوازي مستطيلات، فأوجد الطول والعرض والارتفاع.

$$\ell = 23,360 \text{ ft } w = 72 \text{ ft } h = 37 \text{ ft}$$

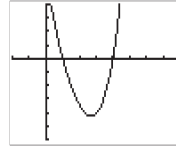
اكتب دالة كثيرة الحدود من أقل درجة ذات معاملات صحيحة تحتوي على العدد الموضح كصفر.

57. $\sqrt[3]{6}$ 58. $\sqrt[3]{5}$ 60-57. **انظر الهامش.**

59. $-\sqrt[3]{2}$ 60. $-\sqrt[3]{7}$

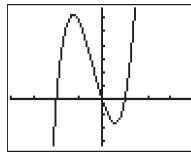
استخدم كل تمثيل بياني لكتابة g كناتج للعوامل الخطية. ثم اذكر جميع أصفارها.

61. $g(x) = 3x^4 - 15x^3 + 87x^2 - 375x + 300$



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-300, 200]$ scl: 50

62. $g(x) = 2x^5 + 2x^4 + 28x^3 + 32x^2 - 64x$



$[-4, 4]$ scl: 1 by $[-40, 80]$ scl: 12

$g(x) =$
 $3(x-4)x$
 $(x-1)x$
 $(x-5i)x$
 $(x+5i)x$
 4, 1, $\pm 5i$

$g(x) = 2x x$
 $(x-1)x$
 $(x+2)x$
 $(x-4i)x$
 $(x+4i)x$
 0, 1, -2, $\pm 4i$

حدد جميع الأصفار النسبية المحتملة للدالة.

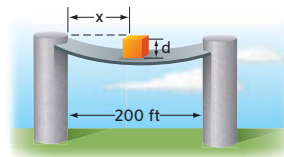
63. $h(x) = 6x^3 - 6x^2 + 12$ -1

64. $f(y) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^3 - y^2 + 2y - 8$ 3

65. **أصفار غير نسبية** $w(z) = z^4 - 10z^3 + 30z^2 - 10z + 29$

66. $b(a) = a^5 - \frac{5}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1$

67. **الهندسة** تدعم دعامتين بينهما مسافة 200 قدم عارضة من الصلب. إذا وُضع وزن على مسافة x قدم من الدعامة الموجودة على اليسار، فسيحدث انحراف رأسي تمثله الدالة التالية $d = 0.0000008x^2$ (x - كم يبعد الوزن عن الدعامة إذا كان الانحراف الرأسي 0.8 قدم؟)



100 ft أو حوالي 161.8 ft

اكتب كل دالة كثيرة الحدود كناتج للعوامل الخطية والعوامل التربيعية غير القابلة للاختزال. 68-71. **انظر الهامش.**

68. $x^3 - 3$

69. $x^3 + 16$

70. $8x^3 + 9$

71. $27x^6 + 4$

46 | الدرس 2-4 | أصفار الدوال كثيرة الحدود

72. **التبيلات المتعددة** في هذه المسألة سوف تستكشف الدوال كثيرة الحدود الزوجية والفردية.

a. **العرض التحليلي** حدد الدرجة وعدد أصفار كل دالة كثيرة الحدود.

i. $f(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$ 3, 3 أصفار

ii. $g(x) = 2x^5 + x^4 - 32x - 16$ 5, 5 أصفار

iii. $h(x) = 5x^3 + 2x^2 - 13x + 6$ 3, 3 أصفار

iv. $f(x) = x^4 + 25x^2 + 144$ 4, 4 أصفار

v. $h(x) = 3x^6 + 5x^5 + 46x^4 + 80x^3 - 32x^2$ 6, 6 أصفار

vi. $g(x) = 4x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 11x + 6$ 4, 4 أصفار

b. **العرض العددي** أوجد أصفار كل دالة.

c. **العرض الكلامي** هل يجب أن تحتوي دالة من الدرجة الفردية على أقل عدد من الأصفار الحقيقية؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

73. **تحليل الخطأ** تستخدم فاطمة وأحمد نظرية الأصفار النسبية لإيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة للدالة $f(x) = 7x^2 + 2x^3 - 5x - 3$

وتعتقد فاطمة أن الأصفار الممكنة

$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{7}, \pm \frac{3}{7}, \pm 1, \pm 3$

أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

انظر الهامش.

74. **الاستنتاج** اشرح لماذا يجب أن تحتوي $g(x) = x^9 - x^8 + x^5 + x^3 - x^2 + 2$ على جذر بين $x = 0$ و $x = -1$.

انظر الهامش.

75. **تحديد** استخدم $f(x) = x^3 + 8x^2$ و $f(x) = x^2 + x - 6$ لإيجاد $f(x) = x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 40x + 12$ موضع فرضية

عن العلاقة بين التبيلات البيانية وأصفار $f(x)$ والرسوم البيانية وأصفار كل مما يلي. **a-b** **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

a. $-f(x)$ b. $f(-x)$

76. **مسألة مفتوحة** اكتب دالة من الدرجة 4 ذات صفر تخيلي وصفر غير نسبي.

الإجابة النموذجية: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

77. **الاستنتاج** حدد هل العبارة صحيحة أم خاطئة. إذا كانت خاطئة، فاضرب مثالاً مضاداً. تحتوي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ذات معاملات حقيقية على صفر غير حقيقي واحد فقط.

انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

تحديد أوجد أصفار كل دالة إذا كانت $h(x)$ تحتوي على أصفار عند $x = 2$ و $x = 3$.

78. $c(x) = 7h(x)$ x_1, x_2, x_3 79. $k(x) = h(3x)$ $\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}$

80. $g(x) = h(x - 2)$ $x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 2$ 81. $f(x) = h(-x)$ $-x_1, -x_2, -x_3$

82. **الاستنتاج** عند وجود أول حدين للدالة كثيرة الحدود التالية $f(x) = a_2x^4 - a_3x^3 + a_4x^2 + \dots + a_nx + c$ إذا كانت x عاملاً للدالة $f(x)$ ، فما القيمة

التي يجب أن تكون c أكبر منها أو تساويها لتصبح حدًا أعلى لأصفار الدالة $f(x)$ ؟ لفرض أن المعاملات المحددة غير سالبة و $a_1 \neq 0$. اشرح استنتاجك.

انظر ملحق الوحدة 1.

83. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يجب أن تحتوي دالة كثيرة الحدود ذات معاملات حقيقية وصفر واحد تخيلي على صفرين تخيليين اثنين على الأقل.

انظر ملحق الوحدة 1.

مراجعة شاملة

اقسم باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 3-1)

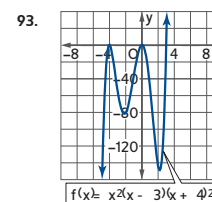
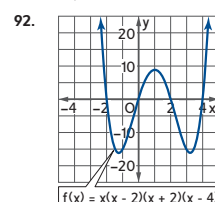
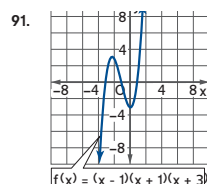
$$84. (x^3 - 9x^2 + 27x - 28) \div (x - 3) \quad x^2 - 6x + 9 - \frac{1}{x-3} \quad 85. (x^4 + x^3 - 1) \div (x - 2) \quad x^3 + 3x^2 + 6x + 12 + \frac{23}{x-2}$$

$$86. (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 2) \div (x + 1) \quad 3x^3 - 5x^2 + 10x - 14 + \frac{12}{x+1} \quad 87. (2x^3 - 2x - 3) \div (x - 1) \quad 2x^2 + 2x - \frac{3}{x-1}$$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. اشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. (الدرس 2-1) 88-90. انظر الهامش.

$$88. f(x) = -4x^7 + 3x^4 + 6 \quad 89. f(x) = 4x^6 + 2x^5 + 7x^2 \quad 90. g(x) = 3x^4 + 5x^5 - 11$$

قدّر لأقرب 0.5 وحدة وصنّف القيم القصوى للتمثيل البياني لكل دالة. ادمع إجابتك بالأرقام. (الدرس 4-1) 91-93. انظر الهامش.



94. المسائل المالية يختار المستثمرون أسهبا مختلفة لضمان محفظة متوازنة. توضح المصفوفات أسعار سهم واحد لكل مجموعة من الأسهم المختلفة في أول يوم عمل من شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر. (الدرس 6-0)

	يوليو	أغسطس	سبتمبر
السهم A	33.81	30.94	27.25
السهم B	15.06	13.25	8.75
السهم C	54	54	46.44
السهم D	52.06	44.69	34.38

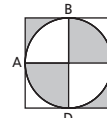
a. تمتلك السيدة رضوى 42 سهبا من السهم A و 59 سهبا من السهم B و 21 سهبا من السهم C و 18 سهبا من السهم D. اكتب مصفوفة صفية تمثل محفظة السيدة رضوى. [42 59 21 18]

b. استخدم ضرب المصفوفات لإيجاد إجمالي قيمة محفظة السيدة رضوى لكل شهر إلى أقرب فلس.

يوليو، 4,379.64 AED؛ أغسطس، 4,019.65 AED؛ سبتمبر، 3,254.83 AED

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

95. اختبارا SAT/ACT هناك دائرة محصورة في مربع وتقطع المربع في النقاط التالية A و B و C و D. إذا كان $AC = 12$ ، فما إجمالي مساحة المناطق المظلمة؟ E



- A 18 D 24π
B 36 E 72
C 18π

96. مراجعة $f(x) = x^2 - 4x + 3$ لها حد أدنى نسبي يقع على أي من قيم x التالية؟ G

- F -2 H 3
G 2 J 4

97. أوجد جميع أصفار $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 20$. A

- A $-4, 1 + 2i, 1 - 2i$ C $-1, 1, 4 + i, 4 - i$
B $1, 4 + i, 4 - i$ D $4, 1 + i, 1 - i$

98. مراجعة أي تعبير يساوي

$$H (t^2 + 3t - 9)(5 - t)^{-1}?$$

- F $t + 8 - \frac{31}{5-t}$
G $-t - 8$
H $-t - 8 + \frac{31}{5-t}$
J $-t - 8 - \frac{31}{5-t}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 73.

ذكر الطلاب أن الخطوة الأولى في إيجاد جميع الأصفار المحتملة هي كتابة الدالة كثيرة الحدود بالصيغة القياسية. بعد ذلك، يتم تحديد عوامل المعامل الرئيسي وعوامل الحد الثابت.

4 التقويم

أخبار الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا كيف ساعدتهم مبادئ القسمة التركيبية في الدرس 2-3 في اختبار الأصفار النسبية المحتملة للدالة كثيرة الحدود.

إجابات إضافية

73. أحمد: الإجابة النموذجية: لم تقسم فاطمة على عوامل المعامل الرئيسي.

74. الإجابة النموذجية: يُنتج إدخال -1 ناتجا سالبا، بينما يؤدي إدخال 0 إلى ناتج موجب.

88. الدرجة تساوي 7 والمعامل الرئيسي يساوي -4. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب،

فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

89. الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي 4. حيث إن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب،

فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

90. الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي 5. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب،

فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

91. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة صغرى نسبية تبلغ -3 عند $x = 0$ وقيمة عظمى نسبية 3 عند $x = -2$

92. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة عظمى نسبية تبلغ 8 عند $x = 1$ وقيمة صغرى نسبية تبلغ -16 عند $x = 3$ و $x = -1$

93. يبدو أن $f(x)$ تشتمل على قيمة عظمى نسبية تبلغ 0 عند $x = 0$ و $x = -4$ وقيمة صغرى نسبية تبلغ -80 عند $x = -2$ و $x = 2$

التعليم المتمايز

التوسع أسأل الطلاب هل من الممكن أن تشتمل الدالة كثيرة الحدود على صفر حقيقي يزيد عن أكبر جذر نسبي ممكن لها. إذا كان ذلك ممكنا، فاطلب منهم أن يعطوا مثالا. نعم: الإجابة النموذجية: تشتمل

الدالة $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ على 1 كأكبر صفر نسبي ممكن لها، بينما الصفر الموجب الفعلي لها هو

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{4} \text{ أو حوالي } 2.28$$

الدوال النسبية

لماذا؟

الحالي

السابق

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-5 حدد نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

الدرس 1-5 حلّ الدوال النسبية ومثلها بيانياً. حل المعادلات النسبية.

بعد الدرس 1-5 اكتب التحليلات الجزئية للكسور الخاصة بالتعابير النسبية.

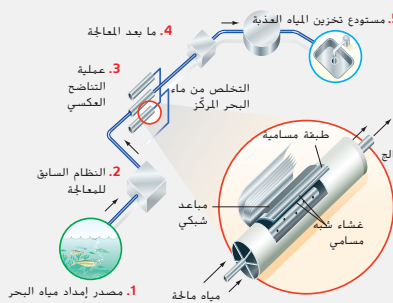
2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- اذكر بعض الطرق لإزالة الأملاح من الماء؟ **الإجابة النموذجية:** التناضح العكسي والتقطير والتحليل الكهربائي والتجميد الخوائي



يتم استخدام تحليلية الماء أو إزالة الملح من ماء البحر حالياً في مناطق من العالم بسبب الكمية المحدودة للماء المتوفر وفي العديد من السفن والغواصات. وتعتبر أيضاً بديلاً لتوفير الماء في المستقبل. ويمكن إنشاء نموذج لتكلفة التطاقات المتنوعة لتحلية الماء باستخدام الدوال النسبية.

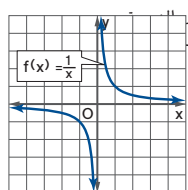
- 1 تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانياً.
- 2 إيجاد حل المعادلات النسبية.

- حددت نقاط الانفصال والسلوك الطرفي للتمثيلات البيانية للدوال باستخدام الحدود.

1 الدوال النسبية الدالة النسبية $f(x)$ تساوي ناتج قسمة دالتين كثيرتي الحدود $a(x)$ و $b(x)$. حيث $b \neq 0$ بصوري صفراً.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, b(x) \neq 0$$

مجال الدالة النسبية هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية باستثناء تلك القيم التي تجعل المعادلة $b(x) = 0$ أو النواتج الصغرية للمعادلة $b(x)$.



تمثل الدالة المطلوبة إحدى أبسط الدوال النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$. كما هو الحال مع الكثير من الدوال يتضمن التمثيل البياني للدالة المطلوبة فروغاً تقترب من قيم x وقيم y محددة. وتُسمى المستقيم هذه القيم **المستقيمات المقاربة**.

وبما أن الدالة المطلوبة غير معرفة عندما $x = 0$ ، إذن مجالها يساوي $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. ويمكن وصف سلوك الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ إلى اليسار (0^-) وإلى اليمين (0^+) لقيمة $x = 0$ باستخدام الحدود.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

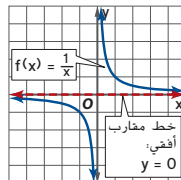
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

من الدرس 1-3، ينبغي أن تدرك الصفر كنقطة للانفصال اللانهائي في مجال الدالة f . يُسمى المستقيم $x = 0$ في الشكل 15.2 خطاً مقارباً رأسياً للتمثيل البياني للدالة f . ويمكن، أيضاً، وصف السلوك الطرفي للدالة f باستخدام الحدود.

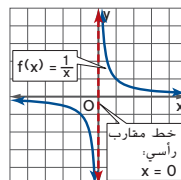
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

يُسمى المستقيم $y = 0$ في الشكل 2.5.2 خطاً مقارباً أفقياً للتمثيل البياني للدالة f .



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.2

قراءة الرياضيات

ترميز الحد التعبير $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية حد دالة f من x عندما تقترب x من c من اليسار والتعبير $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ يُقرأ بالطريقة التالية حد دالة f من x عندما تقترب x من c من اليمين.

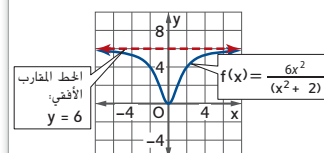
ويمكن تعميم هذه التعريفات للمستقيمات المقاربة الرأسية والأفقية.

يمكنك استخدام معرفتك بالحدود والانفصال والسلوك الطرفي لتحديد المستقيمات المقاربة الرأسية والأفقية، إن وجدت.

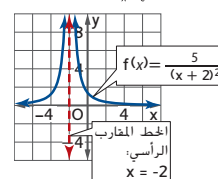
المفهوم الأساسي المستقيمات المقاربة الرأسية والأفقية

التوضيح بالكلمات $x = c$ هو مستقيم مغارب رأسي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$

التوضيح بالكلمات $x = c$ هو مستقيم مغارب رأسي للتمثيل البياني للدالة f إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$



مثال



مثال

مثال 1 إيجاد المستقيمات المقاربة الرأسية والأفقية

أوجد مجال كل دالة ومعادلات المستقيمات المقاربة الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

a. $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$

الخطوة 1 أوجد المجال.

تكون الدالة غير معرّفة عند الصفر الحقيقي في المقام $b(x) = x - 3$ يساوي صفراً. العدد الحقيقي الذي يجعل ناتج المعادلة $b(x)$ يساوي صفراً هو 3. إذاً، مجال الدالة f هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

الخطوة 2 أوجد المستقيمات المقاربة، إن وجدت.

تحقق من المستقيمات المقاربة الرأسية.

حدّد ما إذا كانت $x = 3$ نقطة انفصال لا نهائي. أوجد الحد حيث x تقترب من 3 من اليسار واليمين.

x	2.9	2.99	2.999	غير معرّف	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-69	-699	-6999		7001	701	71

نظراً لأن $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$ ، فأنت تعلم أن $x = 3$ هو مستقيم مغارب رأسي للدالة f .

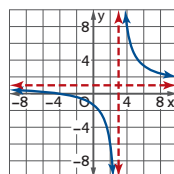
تحقق من المستقيمات المقاربة الأفقية.

استخدم جدولاً لفحص السلوك الطرفي للدالة $f(x)$.

x	-10,000	-1000	-100	0	100	1000	10,000
$f(x)$	0.9993	0.9930	0.9320	-1.33	1.0722	1.0070	1.0007

يشير الجدول إلى أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ وبناءً عليه، فأنت تعلم أن $y = 1$ هو مستقيم مغارب أفقي للدالة f .

التحقق من الحل التمثيل البياني الموضح للدالة $f(x) = \frac{x+4}{x-3}$ يدعم كل هذه النتائج. ✓



■ تكمن تكلفة تحلية الماء غالباً في

الطاقة المستخدمة. ونظراً لزيادة نسبة

الأملاح التي تتم إزالتها، ماذا يحدث

للتكلفة في رأيك؟ الإجابة النموذجية:

تزداد التكلفة بزيادة نسبة الأملاح التي

تتم إزالتها.

■ إذا كانت التكلفة 1,000 AED لإزالة

كل نسبة من الأملاح، إذاً فإن نسبة

تكلفة إزالة $x\%$ من الأملاح إلى نسبة

الأملاح المتبقية ستكون $\frac{1,000x}{100-x}$ ما

نوع القيم التي يمكن أن تشتمل عليها x

؟ اشرح. $0 \leq x < 100$ ؛ لا يمكن أن

تساوي المقامات 0. لذلك يجب أن تكون

x أصغر من 100. ووجود نسبة مئوية

سالبة أمر غير منطقي، لذلك يجب أن

تكون x عدداً نسبياً أكبر من 0.

1 الدوال النسبية

الأمثلة 1-4 توضح كيفية تحليل الدالة

النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ورسمها بيانياً عن طريق تحليل الأصفار الحقيقية لـ $b(x)$ لإيجاد المجال وباستخدام الحدود أو بمقارنة درجة n لـ $a(x)$ بدرجة m لـ $b(x)$ لإيجاد معادلات الخطوط المقاربة المائلة والرأسية والأفقية. **المثال 5** يوضح كيف يمكن أن تكون هناك حالات انفصال قابلة للإزالة في الدالة النسبية.

التقويم التكويني

استخدام التمارين الواردة في الجزء "تمرين موجه" بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

التركيز على محتوى الرياضيات

الخطوط المقاربة يمكن أن تكون الخطوط

المقاربة خطوطاً أفقية أو رأسية أو مائلة. ويمكن

تحديد الخطوط المقاربة من خلال ملاحظة

الحدود والانفصال والسلوك الطرفي للدالة

النسبية.

مثال إضافي

1 ابحث عن مجال كل دالة

ومعادلات الخطوط المقاربة الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

$$a. f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$D = \{x \mid x \neq 1, x \in \mathbb{R}\}$$

مستقيم مقارب رأسي عند $x = 1$

مستقيم مقارب أفقي عند $y = 1$

$$b. f(x) = 4x^2 + \frac{3}{2x^2 + 1}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

لا توجد خطوط مقاربة رأسية؛ مستقيم

مقارب أفقي عند $y = 2$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب يوضح للطلاب

معادلة الدالة النسبية. أسألهم إذا كانت الدالة تحتوي على مستقيم مقارب رأسي. اطلب من الطلاب الرد بـ A للإجابة نعم والرد بـ B للإجابة لا.

نصائح للمعلمين الجدد

الدوال النسبية تفترض العلاقات الموضحة

في مربع المفهوم الأساسي أنه لا يمكن خفض الدالة النسبية f إلى دالة ثابتة.

$$b. g(x) = \frac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1}$$

الخطوة 1 الأصغر في المقام $b(x) = 4x^2 + 1$ تخيلية، لذلك، فإن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية.

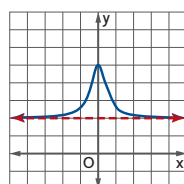
الخطوة 2 لأن مجال g هو كل الأعداد الحقيقية، فليس للدالة مستقيمت مقاربة رأسية.

وباستخدام القسمة، يمكنك تحديد أن

$$g(x) = \frac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1} = 2 + \frac{3}{4x^2 + 1}$$

حيث إن قيمة $|x|$ تزيد، يصبح $4x^2 + 1$ عددًا موجبًا كبيرًا بشكل متزايد، كما يتناقص $\frac{3}{4x^2 + 1}$ مقتربًا من 0. ولذلك،

$$2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2 + 0$$



التحقق من الحل يمكنك استخدام جدول القيم

لدعم هذا الاستنتاج.

$$g(x) = \frac{8x^2 + 5}{4x^2 + 1}$$

التمثيل البياني

الموضح يدعم

أيضًا كل هذه النتائج. ✓

تمرين موجه

أوجد مجال كل دالة ومعادلات المستقيمت المقاربة الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

1B. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$: مستقيم مقارب رأسي عند $x = -4$; لا توجد مستقيمت مقاربة أفقية

$$1A. m(x) = \frac{15x + 3}{x + 5}$$

$$1B. h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 4}$$

1A. $D = \{x \mid x \neq -5, x \in \mathbb{R}\}$: مستقيم مقارب رأسي عند النقطة $x = -5$; مستقيم مقارب

أفقي عند النقطة $y = 15$

يوضح التحليل في مثال 1 وجود علاقة بين السلوك الطرفي للدالة والخط المقارب الأفقي. يرد تلخيص هذه العلاقة، مع السمات الأخرى للتمثيلات البيانية للدوال النسبية فيما يلي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال النسبية

إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

حيث إن $0 \neq b(x)$ و $a(x)$ و $b(x)$ ليس لها عوامل مشتركة غير ± 1 . إذا التمثيل البياني للدالة f له الخصائص التالية.

المستقيمت المقاربة الرأسية قد تحدث المستقيمت المقاربة الرأسية عند الأصغر الحقيقية للمعادلة $b(x)$.

الخط المقارب الأفقي قد يحتوي التمثيل البياني على مستقيم مقارب أفقي واحد أو لا يحتوي على مستقيم مقارب أفقي كما هو محدد بمقارنة الدرجة n من $a(x)$ بالدرجة m من $b(x)$.

• إذا كانت $n < m$ يكون الخط المقارب الأفقي $y = 0$

• إذا كانت $n = m$ ، يكون الخط المقارب الأفقي $y = \frac{a_n}{b_m}$

• إذا كانت $n > m$ ، فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي.

نقاط التقاطع تحدث نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x . إن وجدت، عند الأصغر الحقيقية للمعادلة $a(x)$. يكون التقاطع مع المحور الرأسي y . إن وجد، هو قيمة الدالة f عندما $x = 0$

نصيحة دراسية

الأقطاب يُسمى الخط المقارب الرأسي في التمثيل البياني للدالة النسبية قطب الدالة أيضًا.

التعليم المتمايز

BL

التوسع استخدم بعد المثال 1 اطلب من الطلاب أن يحددوا الخطوط المقاربة الأفقية

$$لـ \frac{x^2}{x^2 - 4}, f(x) = \frac{x}{x - 4}, \text{ و } f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 4} \text{ ثم اجعل الطلاب يضعوا فرضية عن}$$

الخطوط المقاربة لـ $f(x) = \frac{x^n}{x^n - 4}$ لأي عدد صحيح موجب n . تشمل كل دالة على $y = 1$ كخط

مقارب أفقي.

لتمثيل دالة نسبية بيانياً، حوّل f إلى أبسط صورة، إن أمكن، ثم اتبع هذه الخطوات.

الخطوة 1 أوجد المجال.

الخطوة 2 أوجد المستقيمات المقاربة وارسمها، إن وجدت.

الخطوة 3 أوجد نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط التقاطع مع المحور الرأسي y وارسمها، إن وجدت.

الخطوة 4 أوجد نقطة واحدة على الأقل من فترات الاختيار المحددة بأي نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x والمستقيمات المقاربة الرأسية وارسمها.

نصيحة دراسية

فترات الاختيار قد تغير الدالة النسبية الإشارة عند أصغارها وفيها غير المعرفة، لذلك عندما تُرتب قيم x ، فإنها تنقسم مجال الدالة إلى فترات الاختيار التي يمكن أن تساعدك على تحديد ما إذا كان التمثيل البياني يقع فوق المحور الأفقي x أم تحته.

مثال 2 تمثيل الدوال النسبية بيانياً: $n > m$ و $n < m$

في كل دالة، حدد أي مستقيمات مقاربة رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

a. $g(x) = \frac{6}{x+3}$

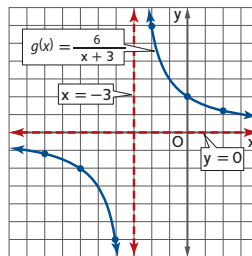
الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عندما $b(x) = 0$ ، لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$.

الخطوة 2 يوجد مستقيم مقارب رأسي عند النقطة $x = -3$.

تساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في البسط صفراً، وتساوي درجة الدالة كثيرة الحدود في المقام 1. لأن $0 < 1$ ، التمثيل البياني g يحتوي على مستقيم مقارب أفقي عند النقطة $y = 0$.

الخطوة 3 ليس للدالة كثيرة الحدود في البسط أصغار حقيقية، لذلك ليس لـ g نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x . لأن $g(0) = 2$ ، تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي 2.

الخطوة 4 مثل المستقيمات المقاربة ونقاط التقاطع بيانياً. ثم اختر قيم x التي تقع في فترات الاختيار المحددة بالخط المقارب الرأسي لإيجاد نقاط إضافية لرسمها على التمثيل البياني. استخدم منحنيات سلسلة لإكمال التمثيل البياني.



الفترة	x	$(x, g(x))$
$(-\infty, -3)$	-8	$(-8, -1.2)$
	-6	$(-6, -2)$
	-4	$(-4, -6)$
$(-3, \infty)$	-2	$(-2, 6)$
	2	$(2, 1.2)$

b. $k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$

ينتج عن تحليل البسط إلى عوامل $k(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x-3}$. لاحظ أنه ليس للبسط والمقام عوامل مشتركة، لذلك يكون التعبير في أبسط صورة.

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة $b(x) = 0$ ، لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$.

الخطوة 2 يوجد مستقيم مقارب رأسي عند النقطة $x = 3$.

قارن بين درجات البسط والمقام. لأن $2 > 1$ ، لا يوجد مستقيم مقارب أفقي.

الخطوة 3 للبسط أصغار عند $x = 2$ و $x = 5$ ، لذلك نقطتنا التقاطع مع المحور $k(0) = -\frac{10}{3}$ ، لذلك تكون نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $-\frac{10}{3}$.

الخطوة 4 مثل المستقيمات المقاربة ونقاط التقاطع بيانياً. ثم أوجد النقاط في فترات الاختيار المحددة بنقاط التقاطع والمقارب المقارب الرأسية وارسمها: $(-\infty, 0)$ ، $(0, 3)$ ، $(3, \infty)$. استخدم المنحنيات السلسلة لإكمال التمثيل البياني.

2A. $h(x) = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$

2B. $n(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

تمرين موجه

51

مثال إضافي

2 في كل دالة، حدد أي نقاط تقاطع وخطوط مقاربة رأسية وأفقية. ثم ارسم الدالة بيانياً واذكر مجالها.

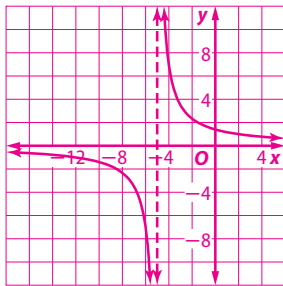
a. $k(x) = \frac{7}{x+5}$ مستقيم

مقارب رأسي عند $x = -5$ ؛

مستقيم مقارب أفقي عند $y = 0$ ؛

نقطة التقاطع مع المحور

الرأسي $D = \{x \mid x \neq -5, x \in \mathbb{R}\}$



b. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ خطوط

مقاربة رأسية عند $x = 2$ و $x = -2$ ؛

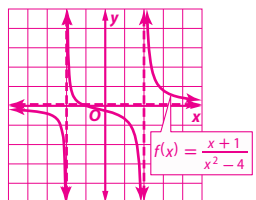
مستقيم مقارب أفقي عند $y = 0$ ؛

نقطة التقاطع مع المحور

الأفقي $x = -1$ ؛ نقطة التقاطع مع

المحور الرأسي $y = -0.25$ ؛

$D = \{x \mid x \neq 2, -2, x \in \mathbb{R}\}$



إجابات إضافية (تمرين موجه)

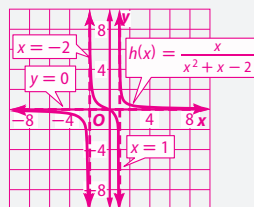
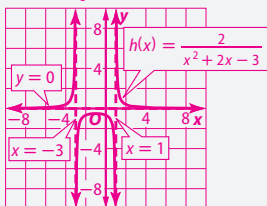
2A. مستقيم مقارب رأسي عند $x =$

-3 و $x = 1$ ؛ مستقيم مقارب أفقي

عند $y = 0$ ؛ نقطة التقاطع مع

المحور الرأسي $y = -\frac{2}{3}$ ؛

$D = \{x \mid x \neq -3, 1, x \in \mathbb{R}\}$



2B. خطوط مقاربة رأسية عند

$x = -3$ و $x = 1$ ؛ مستقيم مقارب أفقي

عند $y = 0$ ؛ نقطة التقاطع مع المحور

الأفقي $x = 0$ ؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي

$y = 0$ ؛ $D = \{x \mid x \neq -2, 1, x \in \mathbb{R}\}$

في مثال 3، درجة البسط مساوية لدرجة المقام.

مثال 3 تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m$

حدد أي مستقيمات مقاربة رأسية وأفقية ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 9}$ ثم مثل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

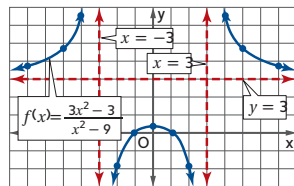
ينتج عن تحليل كل من البسط والمقام إلى عوامل $f(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ بدون عوامل مشتركة.

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عندما $b(x) = 0$ ، ويكون المجال $\{x \mid x \neq -3, 3, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 توجد مستقيمات مقاربة رأسية عندما $x = 3$ و $x = -3$ ويوجد مستقيم مغارب أفقي عند $y = \frac{3}{1}$ أو $y = 3$ ، وهي النسبة بين المعاملات المستخدمة للبسط والمقام. لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية.

الخطوة 3 نبحثنا التقاطع مع المحور الأفقي x هما 1 و -1. وهما النواتج الصغرى للبسط. نقطة التقاطع مع المحور الرأس y هي $\frac{1}{3}$ لأن الدالة $f(0) = \frac{1}{3}$

الخطوة 4 مثل المستقيمات المقاربة ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم أوجد النقاط في فترات الاختيار وارسمها $(-\infty, -3)$ و $(-3, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ و $(3, \infty)$



3A-B. انظر الهامش.

في كل دالة، حدد أي مستقيمات مقاربة رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

3A. $h(x) = \frac{x-6}{x+2}$

3B. $h(x) = \frac{x^2-4}{5x^2-5}$

عندما تكون درجة البسط أكبر بمقدار واحد بالضبط من درجة المقام، فإن التمثيل البياني يكون له ميل أو **مستقيم مقارب مائل**.

المفهوم الأساسي المستقيمات المقاربة المائلة

مثال

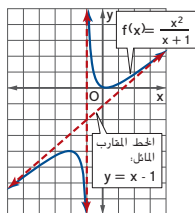
إذا كانت f هي الدالة النسبية وفقًا للمعطيات

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

حيث إن $b(x)$ لها درجة أكبر من 0 و $a(x)$ لا توجد عوامل مشتركة للمعادلتين $b(x)$ غير 1. إذا التمثيل البياني للدالة f يحتوي على مستقيم مغارب مائل إذا كانت قيمة $n = m + 1$ تكون دالة الخط المغارب المائل هي ناتج قسمة كثيرات الحدود $q(x)$ الناتج من قسمة $a(x)$ على $b(x)$.

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$$

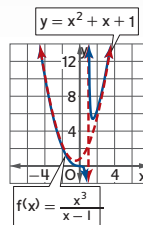
دالة الخط المغارب المائل



نصيحة دراسية

المستقيمات المقاربة اللاحقة

المستقيمات المقاربة الأفقية والرأسية والمائلة تكون كلها خطية. قد يكون للدالة النسبية مستقيم مغارب غير خطي أيضًا. مثلاً، التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ له مستقيم مغارب تربيعي.



مثال إضافي

3 حدد أي خطوط مقاربة رأسية

وأفقية ونقاط التقاطع للدالة

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 - 8}$$

ثم ارسم الدالة بيانيًا واذكر

مجالها. خطوط مقاربة رأسية

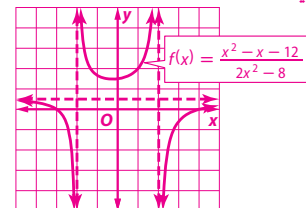
عند $x = 2$ و $x = -2$ ؛ مستقيم

مقارب أفقي عند $y = 0.5$ ؛ نقاط

التقاطع مع المحور الأفقي x : 4،

-3؛ نقطة التقاطع مع المحور

الرأسي y : 1.5



$$D = \{x \mid x \neq -2, 2, x \in \mathbb{R}\}$$

نصائح للمعلمين الجدد

الفروع الناقصة بناءً على إعدادات

النافذة التي يحددها الطلاب على

حاسبات التمثيلات البيانية الخاصة بهم.

قد ينسى الطلاب بعض فروع التمثيل

البياني للدالة النسبية التي يرسمونها.

وأشرح أهمية إيجاد أكبر قدر ممكن من

المعلومات عن التمثيل البياني للدالة

(الخطوط المقاربة ونقاط التقاطع

والمجال) قبل الانتقال إلى حاسبة

التمثيل البياني.

إجابات إضافية

(تمرين موجه)

3A. مستقيم مقارب رأسي عند $x =$

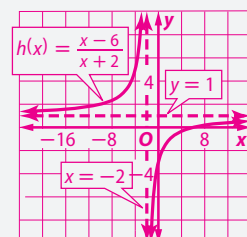
-2؛ مستقيم مقارب أفقي عند y

1؛ نقطة التقاطع مع المحور

الأفقي x : 6؛ نقطة التقاطع مع

المحور الرأس y : -3؛

$$D = \{x \mid x \neq -2, x \in \mathbb{R}\}$$



3B.

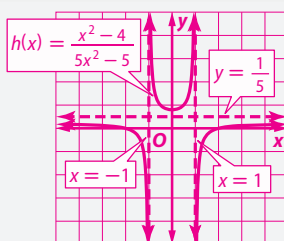
خطوط مقاربة رأسية عند

$x = 1$ و $x = -1$ ؛ مستقيم مقارب أفقي عند

$y = \frac{1}{5}$ ؛ نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x :

2، -2؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأس y :

$$D = \{x \mid x \neq -1, 1, x \in \mathbb{R}\}$$



مثال إضافي

4 حدد أي خطوط مقارنة ونقاط

تقاطع للدالة $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 8}{x + 3}$$

ثم ارسم الدالة بيانياً

واذكر مجالها. مستقيم مقارب

رأسي عند $x = -3$ ؛ مستقيم

مقارب مائل

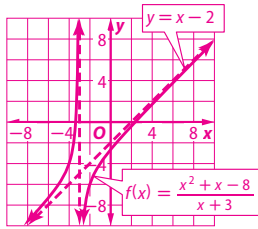
عند $y = x - 2$ ؛ نقاط

التقاطعات مع المحور الأفقي x ؛

$$\frac{-1 + \sqrt{33}}{2},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}; \text{ نقطة التقاطع مع المحور}$$

الرأسي $y: -\frac{8}{3}$



$$D = \{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$$

إجابات إضافية

(تمرين موجه)

4A. مستقيم مقارب رأسي عند $x = -4$

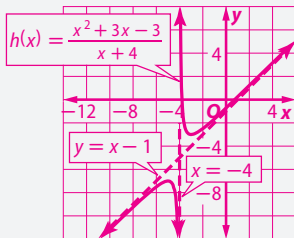
؛ مستقيم مقارب مائل عند

المحور الأفقي $y = x - 1$ ؛ نقاط التقاطع مع

تقريباً؛ نقطة التقاطع مع المحور

الرأسي $y: -\frac{3}{4}$ ؛

$$D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$$



مثال 4 تمثيل الدالة النسبية بيانياً: $n = m + 1$

حدد أي مستقيمتين مقارنة ونقاط التقاطع للدالة $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$ ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

$$f(x) = \frac{2x^3}{(x+4)(x-3)}$$

ينتج عن تحليل المقام إلى عوامل

1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$

2 توجد مستقيمتان مقارنة رأسيّة عند $x = -4$ و $x = 3$

تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذلك لا يوجد مستقيم مقارب أفقي.

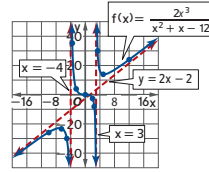
لأن درجة البسط أكبر بواحد بالضبط من درجة المقام، يوجد للدالة f مستقيم مقارب مائل. باستخدام قسمة كثيرات الحدود، يمكنك كتابة ما يلي.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12} = 2x - 2 + \frac{26x - 24}{x^2 + x - 12}$$

لذلك، تكون معادلة الخط المقارب المنحرف هي $y = 2x - 2$

3 تكون نقاط تقاطع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y هي 0. لأن 0 يمثل الناتج الصفري للبسط والدالة $f(0) = 0$

4 تمثل المستقيمتين المقاربتين ونقاط التقاطع بيانياً. ثم أوجد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, -4)$ و $(0, 3)$ و $(3, \infty)$ وارسمها.



4A-B. انظر الهامش.

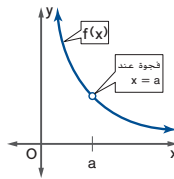
تمرين موجه

في كل دالة، حدد أي مستقيمتين مقارنة ونقاط تقاطع. ثم مثل الدالة بيانياً واذكر مجالها.

$$4A. h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$$

$$4B. p(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$$

عندما يكون لبسط الدالة النسبية ومقامها معاملات مشتركة، يكون للتمثيل البياني للدالة نقاط انفصال يمكن إزالتها والتي لا يمكن إزالتها إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ ولكن يمكن جعلها متصلة في تلك النقطة من خلال التحويل إلى أبسط صورة، إذا لهذه الدالة انفصال يمكن إزالته عند $x = a$ وما عدا ذلك، يكون لهذه الدالة انفصال لا يمكن إزالته عند $x = a$

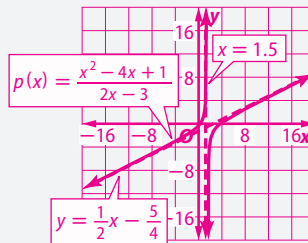


احذف العامل المشترك في البسط والمقام بالتقسيم عليه. يكون الناتج الصفري لـ $a - a$ هو a .

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-c)}$$

نصيحة دراسية

حالات الانفصال التي يمكن إزالتها والتي لا يمكن إزالتها إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ ولكن يمكن جعلها متصلة في تلك النقطة من خلال التحويل إلى أبسط صورة، إذا لهذه الدالة انفصال يمكن إزالته عند $x = a$ وما عدا ذلك، يكون لهذه الدالة انفصال لا يمكن إزالته عند $x = a$



4B. مستقيم مقارب رأسي عند $x = \frac{3}{2}$ ؛ مستقيم

مقارب مائل عند $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ ؛ نقاط

التقاطع مع المحور الأفقي x ؛

0.27 تقريباً، 3.73 تقريباً؛ نقطة تقاطع مع المحور

$$D = \left\{x \mid x \neq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

مثال 5 التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

حدّد أي مستقيمات مقاربة رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع للدالة $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$ ثمّ مثّل الدالة بيانيًا وأذكر مجالها.

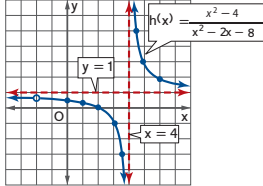
$$\frac{x-2}{x-4}, x \neq -2 = h(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x+2)}$$

الخطوة 1 تكون الدالة غير معرفة عند $b(x) = 0$. لذلك يكون المجال $\{x \mid x \neq -2, 4, x \in \mathbb{R}\}$

الخطوة 2 يوجد مستقيم مقارب رأسي عند $x = 4$. وهو الصفر الحقيقي للمقام بعد تحويله لأبسط صورة.

يوجد مستقيم مقارب أفقي عند $y = \frac{1}{1} = 1$. وهو النسبة للمعاملات الرئيسة لكل من البسط والمقام. لأن درجات الدوال كثيرة الحدود تكون متساوية.

الخطوة 3 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x هي 2، وهو صفر البسط بعد تحويله إلى أبسط صورة. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لأن $h(0) = \frac{1}{2}$



الخطوة 4 مثّل المستقيمات المقاربة ونقاط التقاطع بيانيًا. ثم أوجد النقاط في فترات الاختبار $(-\infty, 2)$ و $(2, 4)$ و $(4, \infty)$ وارسمها.

توجد فجوة عند $(-2, \frac{2}{3})$ لأن

الدالة الأصلية تكون غير معرفة عندما $x = -2$

تمرين موجه

في كل دالة، حدّد أي مستقيمات مقاربة رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثمّ مثّل الدالة بيانيًا وأذكر مجالها.

5A. $g(x) = \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + x - 12}$

5B. $c(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$

انظر الهامش.

انظر الهامش.

2 المعادلات النسبية يمكن حل المعادلات النسبية التي تتضمن كسورًا بضرب كل حد في المعادلة في المقام المشترك الأصغر لكل حدود المعادلة.

مثال 6 حل المعادلة النسبية

أوجد حل $x + \frac{6}{x-8} = 0$

المعادلة الأصلية

اضرب في المقام المشترك الأصغر، $x - 8$.

خاصية التوزيع

صيغة تربيعية

حوّل لأبسط صورة.

$$\begin{aligned} x + \frac{6}{x-8} &= 0 \\ x(x-8) + \frac{6}{x-8}(x-8) &= 0(x-8) \\ x^2 - 8x + 6 &= 0 \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \\ x &= \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 4 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

تمرين موجه

أوجد حلًا لكل من المعادلات التالية.

6A. $\frac{20}{x+3} - 4 = 0$

6B. $\frac{9x}{x-2} = 6$

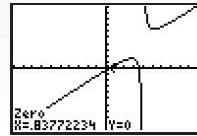
2

-4

نصيحة دراسية

التحقق من صحة الحل

يمكنك أيضًا التحقق من النتيجة في مثال 6 باستخدام حاسبة بيانية لتمثيل $y = x + \frac{6}{x-8}$ بيانيًا. استخدم قائمة الحاسبة البيانية لتحديد مواضع الأصفر. لأن أصفار التمثيل البياني تبدو عند $x = 0.84$ و $x = 7.16$ تقريبًا. يكون الحل صحيحًا.



على $[-20, 20]$ scl: 2
على $[-20, 20]$ scl: 2

مثال إضافي

5 حدد أي خطوط مقاربة رأسية وأفقية وفجوات ونقاط تقاطع

للدالة $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

ثم ارسم الدالة بيانيًا وأذكر مجالها. مستقيم مقارب رأسي عند

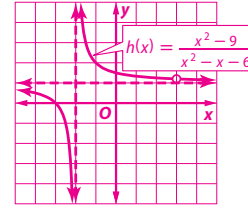
$x = -2$ ؛ مستقيم مقارب أفقي عند

$y = 1$ ؛ نقطة التقاطع مع المحور

الأفقي $x = -3$. نقطة التقاطع مع

المحور الرأسي $y = \frac{3}{2}$ ؛ الفجوة:

$(3, \frac{6}{5})$



$D = \{x \mid x \neq -2, 3, x \in \mathbb{R}\}$

نصائح للمعلمين الجدد

الفجوات في التمثيلات البيانية عندما

يشتمل بسط ومقام الدالة النسبية على

عامل مشترك $(x - c)$. يجب حذف

النقطة $(c, f(c))$ من التمثيل البياني.

ويُشار إليها بدائرة أو فجوة. إذا كان x

$= c$ خطأً مقاربًا رأسيًا، فحينها لن تكون

هناك فجوة في التمثيل البياني.

2 المعادلات النسبية

الأمثلة 6-8 توضح كيفية حل المعادلات

النسبية التي تشتمل على كسور. ويتم

ضرب جميع الحدود في المقام المشترك

الأصغر ثم يتم عزل المتغير. ويجب

التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية

لتحديد أي حلول دخيلة.

مثال إضافي

6 حل $3 \pm \sqrt{13} x - \frac{4}{x-6} = 0$

المتعلمون أصحاب النمط اللغوي/اللغوي قسم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة. اكتب معادلة نسبية على السبورة واجعل كل مجموعة تحلها. مع كتابة الخطوات التي يستخدمونها لإيجاد الحل. ثم اجعل المجموعات تقارن وتضاهي العمليات التي استخدمتها.

قد ينتج من حل المعادلة النسبية حلول دخيلة، تحقق من إجاباتك في المعادلة الأصلية دائماً.

نصيحة دراسية

التقاطع يمكنك استخدام سمة التقاطع في الحاسبة البيانية في حل معادلة نسبية بالتمثيل البياني لكل من طرفي المعادلة وإيجاد كل نقاط التقاطع للتمثيلين البيانيين.

مثال 7 حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

أوجد حل $\frac{4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{3x}{x - 2} + \frac{2}{x - 4}$

المقام المشترك الأصغر للتعبير هو $(x - 2)(x - 4)$ ، وهي عوامل المعادلة $x^2 - 6x + 8$.

$$\frac{4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{3x}{x - 2} + \frac{2}{x - 4}$$

المعادلة الأصلية

اضرب في المقام المشترك الأصغر.

$$(x - 2)(x - 4) \cdot \frac{4}{x^2 - 6x + 8} = (x - 2)(x - 4) \left(\frac{3x}{x - 2} + \frac{2}{x - 4} \right)$$

خاصية التوزيع

$$4 = 3x(x - 4) + 2(x - 2)$$

خاصية التوزيع

$$4 = 3x^2 - 10x - 4$$

اطرح 4 من كل طرف.

$$0 = 3x^2 - 10x - 8$$

حل.

$$0 = (3x + 2)(x - 4)$$

أوجد الحل.

$$x = -\frac{2}{3} \text{ أو } x = 4$$

لأن الدالة الأصلية تكون غير معرفة عند $x = 4$ ، يمكنك حذف هذا الحل الدخيل. لذلك، يكون الحل الوحيد هو $-\frac{2}{3}$.

تمرين موجه

أوجد حلاً لكل من المعادلات التالية.

7A. $\frac{2x}{x + 3} + \frac{3}{x - 6} = \frac{27}{x^2 - 3x - 18} - \frac{3}{2}$

7B. $-\frac{12}{x^2 + 6x} = \frac{2}{x + 6} + \frac{x - 2}{x}$

ليس لها حل

أمثلة إضافية

7 حل $x + \frac{x}{x - 1} = \frac{3x - 2}{x - 1}$

8 تيار الماء معدل سرعة تيار الماء

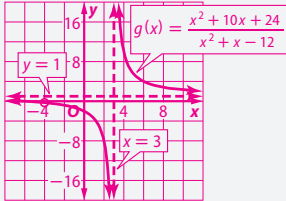
في النهر 4 أميال في الساعة.
وخلال ساعتين، يقطع القارب مسافة 6 أميال في اتجاه التيار إلى إحدى ضفتي النهر ويقطع 6 أميال للعودة. فإذا كانت r هي سرعة القارب في الماء الراكد، و $r + 4$ هي سرعته في اتجاه التيار، وكانت $r - 4$ هي سرعته ضد التيار، و

$$\frac{6}{r - 4} + \frac{6}{r + 4} = 2$$

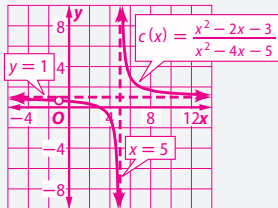
فأوجد قيمة r .

إجابات إضافية (تمرين موجه)

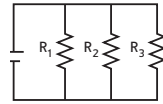
5A. مستقيم مقارب رأسي عند $x = 3$ ؛
مستقيم مقارب أفقي عند $y = 1$ ؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: -6$ ، نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y: -2$ ؛
الفجوة: $(-4, -\frac{2}{7})$ ؛
 $D = \{x \mid x \neq -4, 3, x \in \mathbb{R}\}$



5B. مستقيم مقارب رأسي عند $x = 5$ ؛
مستقيم مقارب أفقي عند $y = 1$ ؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: 3$ ؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y: \frac{3}{5}$ ؛
الفجوة: $(-1, \frac{2}{3})$ ؛
 $D = \{x \mid x \neq -1, 5, x \in \mathbb{R}\}$



مثال 8 من الحياة اليومية حل المعادلة النسبية



الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت R

هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث،

إذاً $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ في هذه الدائرة، R_1 تساوي ضعف مقاومة R_2 ، و R_3 تساوي 20 أوم. لنفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. أوجد R_1 و R_2 .

المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{20}$$

اطرح $\frac{1}{20}$ من كل طرف.

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2}$$

اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، وهو $20R_2$.

$$(20R_2) \cdot \frac{1}{20} = (20R_2) \left(\frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} \right)$$

حوّل لأبسط صورة.

$$R_2 = 10 + 20 = 30$$

R_2 تساوي 30 أوم، و $R_1 = 2R_2 = 60$ أوم.

تمرين موجه

8. **الأجهزة الإلكترونية** لنفترض أن التيار I ، بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I = t + \frac{1}{10 - t}$ ، حيث t هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟ **10.1 تقريباً أو 0.9 ثانية تقريباً**



مهن من الحياة اليومية

فني الكهرباء يعمل فنيو الكهرباء في تركيب مكونات كهربية متنوعة مثل توصيلات الأسلاك والمصابير ويقومون بصيانتها. كما يجب عليهم الحفاظ على الالتزام بالقوانين العالمية والمحلية والخاصة بالدولة. يكمل معظم فنيي الكهرباء برنامج تمرين يتضمن كلا من التعليم داخل الفصول الدراسية والتدريب العملي.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لمصاح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لمصاح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

43. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-6)^2}$$

44. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)(x+5)^2}{(x-4)(x+5)}$$

46. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 5x - 6}$$

47. الإجابة النموذجية:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 14x + 20}{x^2 + x - 12}$$

53. التهليلات المتعددة في هذه المسألة، ستتحقق من المستقيمتين المقاربة للدوال النسبية.

b, d. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

a. العرض الجدولي انسخ الجدول وأكمل. حدّد الخط المقارب الأفقي لكل دالة جبريًا.

الخط المقارب الأفقي	الدالة
$y = 0$	$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2}$
$y = 0$	$h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$
$y = 0$	$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$

b. العرض البياني ممثّل كل دالة وخطها المقارب الأفقي من الجزء a بيانيًا.

c. العرض الجدولي انسخ الجدول التالي وأكمل. استخدم نظرية الصفر النسبي لتساعدك على إيجاد الأصفار الحقيقية للبسط في كل دالة.

الأصفار الحقيقية للبسط	الدالة
1, 4	$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2}$
3	$h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 4}$
-1, 1	$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 + 3}$

d. العرض الكلامي ضع فرضية عن سلوك التمثيل البياني لدالة نسبية عندما تكون درجة المقام أكبر من درجة البسط وللبسط ناتج صفري حقيقي واحد على الأقل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. الاستنتاج بافتراض أن $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{dx^3 + ex^2 + f}$ ، فهل سيكون للدالة $f(x)$ في بعض الأحيان أو دائمًا مستقيم مقارب أفقي أم لن يكون لها ذلك

مطلقًا عند $y = 1$ إذا كانت a و b و c و d و e و f ثوابت و $a \neq 0$ و $d \neq 0$. اشرح. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

55. ما قبل الكتابة صمم خطة درس لتدريس موضوعات التمثيل البياني للدوال النسبية الواردة في هذا الدرس. ضع خطة تتناول فيها الهدف والطلاب والفكرة الرئيسة والتسلسل المنطقي والإطار الزمني لإكمال العمل. راجع عمل الطلاب.

56. تجدّد اكتب معادلة نسبية لها مستقيمتان مقاربتان رأسية عندما $x = -2$ و $x = 3$ وخط مقارب مائل $y = 3x$.

الإجابة النموذجية: $f(x) = \frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 - x + 6}$

57. الكتابة في الرياضيات استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لتوضيح كيفية تمثيل دالة نسبية بيانيًا. راجع عمل الطلاب.

58. تجدّد أوجد قيمة k حتى يصبح للمعادلة النسبية حل دخيل واحد وحل حقيقي واحد.

$$\frac{2}{x^2 - 4x + k} = \frac{2x}{x - 1} + \frac{1}{x - 3}$$

59. الكتابة في الرياضيات اشرح لماذا يجب استخدام فترات الاختبار للحصول على تمثيل بياني دقيق لدالة نسبية. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

45. الكهرباء عندما تكون المقاومة الكلية لدائرة متصلة على التوازي ثابتة.

$$r_2 = \frac{30r_1}{r_1 - 30}$$

a. أوجد المستقيمتان المقاربتان الرأسية والأفقية للدالة، إن وجدت. تحقق من إجابتك بيانيًا.

b. انسخ الجدول الموضح وأكمل.

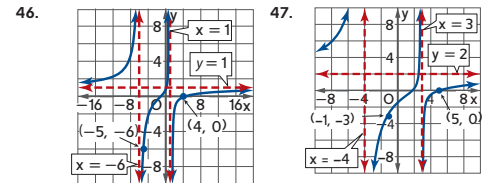
70	65	60	55	50	45	r_1
52.5	55.7	60	66	75	90	r_2

a, c. انظر ملحق الوحدة 1.

c. هل المجال $r_1 < 30$ صحيح في هذا الموقف؟ اشرح استنتاجك.

46-47. انظر الهامش.

استخدم معرفتك بالمستقيمتان المقاربتان والنقاط المذكورة للتعبير عن الدالة الموضحة في كل تمثيل بياني.



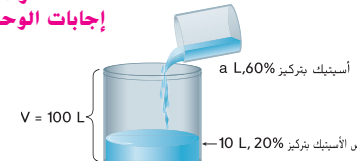
استخدم سمة التقاطع في الحاسبة البيانية لحل كل معادلة.

48. $\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^3 + 6} = 8$ $\approx -1.59, \approx 10.05$ 49. $\frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^4 + 3x^2 - 4} = 1$ $\approx -2.65, \approx 2.65$

50. $\frac{3x^3 - 4x^2 + 8}{4x^4 + 2x - 1} = 2$ $\approx -0.98, \approx 0.90$ 51. $\frac{2x^5 - 3x^3 + 5x}{4x^3 + 5x - 12} = 6$ $\approx -3.87, \approx 1.20, \approx 3.70$

52. الكيمياء عندما يُضاف محلول حمض الأسيتيك بتركيز 60% إلى 10 لترات من محلول حمض الأسيتيك بتركيز 20% في خزان سعته 100 لتر، يتغير تركيز المحلول الإجمالي.

a-d. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.



a. وضّح أن تركيز المحلول يكون $f(a) = \frac{3a + 10}{5a + 50}$ ، حيث تكون a هي حجم المحلول بتركيز 60%.

b. أوجد المجال ذا الصلة للدالة $f(a)$ والمستقيمتان المقاربتان الرأسية أو الأفقية، إن وجدت.

c. اشرح دلالة أي قيود للمجال أو المستقيمتان المقاربتان.

d. بغض النظر عن قيود المجال، هل توجد أي مستقيمتان مقاربتان إضافية للدالة؟ اشرح.

مراجعة شاملة

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها يعد أصفارًا. إن وجدت. (الدرس 4-1)

60. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6; -3, -1, 2$

61. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 18$
 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18; -2$

62. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$
 $\pm 1, \pm 2; 1$ (3-الكسور)

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعبيرات ذات الحدين الموضحة عوامل لـ $f(x)$. استخدم الدوال ذات الحدين التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة إلى عوامل للدالة $f(x)$. (الدرس 3-1)

63. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24; x - 3, x - 2$

64. $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 4x; x - 4, 2x - 1$
 $f(x) = x(2x + 1)(x + 1)(x - 4) = f(x) = (x - 4)(2x^3 + 3x^2 + x)$

65. $f(x) = (3x - 2)(2x^3 + 21x^2 + 60x + 25) = f(x) = (3x - 2)(2x + 1)(x + 5)^2$

66. $f(x) = (4x - 3)(x - 1)(x^2 + x - 2) = f(x) = (4x - 3)(x - 1)(x + 2)(x - 1)$

67. $f(x) = 4x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 4x^2; x + 2, 4x + 1$

68. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 10x^2 + x - 2; x + 1, x - 1$
 $f(x) = x^2(x + 2)^2(4x - 1) = f(x) = (x + 2)(4x^4 + 7x^3 - 2x^2)$

69. $f(x) = (x + 7)^2$

70. $f(x) = (x - 4)^3$
 $f(x) = (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x - 1) = f(x) = (x + 1)(x - 1)(4x^3 - 8x^2 - x + 2)$

مثل كل دالة مما يلي بيانيًا. (الدرس 2-1) 69-71. انظر الهامش.

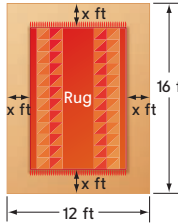
72. $f(x) = (x + 7)^2$

73. $f(x) = (x - 4)^3$

74. $f(x) = x^4 - 5$

72. **البيع بالتجزئة** تتسوق سمر في متجر يعرض إرجاع AED 10 للمشتري لكل AED 50 تنفقها في هذا المتجر. لنفترض أن $f(x) = \frac{x}{50}$ و $h(x) = 10x$ حيث x هي المبلغ المالي الذي أنفقته سمر. (الدرس 6-1)

a. $h[f(x)]$: الإجابة النموذجية: يمكن إيجاد المبلغ النقدي الذي يتم إرجاعه بحساب عدد المرات التي أنفقت فيها 50 AED.



73. **التصميم الداخلي** يعمل أحمد حسن في التصميم الداخلي. طُلب منه وضع سجادة شرقية في المكتب الجديد لإحدى الشركات. ينبغي أن تغطي السجادة نصف إجمالي مساحة الأرضية مع وجود عرض ثابت للمنطقة المحيطة بالسجادة. (الدرس 3-0)

a. إذا كانت أبعاد الغرفة 12 قدمًا في 16 قدمًا، فاكتب معادلة لتمثيل مساحة السجادة فيما يتعلق بـ x . $(12 - 2x)(16 - 2x) = 96$

b. مثل الدالة ذات الصلة بيانيًا. انظر الهامش.

c. ما أبعاد السجادة؟ 8 أقدام في 12 قدمًا

حوّل إلى أبسط صورة. (الدرس 2-0)

74. $i^{10} + i^2$

75. $(2 + 3i) + (-6 + i)$

76. $(2.3 + 4.1i) - (-1.2 - 6.3i)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

79. **مراجعة** أراد عامر أن يحسب متوسط درجاته في 6 اختبارات. جمع الدرجات بطريقة صحيحة ليحصل على T ولكنه قسّم على 7 بدلاً من 6. وكانت النتيجة أقل من متوسطه الفعلي بـ 12 درجة. أي معادلة يمكن استخدامها لتحديد قيمة T ؟ C

A $6T + 12 = 7T$

C $\frac{T}{7} + 12 = \frac{T}{6}$

B $\frac{T}{7} = \frac{T - 12}{6}$

D $\frac{T}{6} = \frac{T - 12}{7}$

80. تستطيع ريهام أن تجمع أجزاء الأحجية في ثلاث ساعات. وتستطيع شيخة أن تجمع أجزاء الأحجية نفسها في خمس ساعات. كم ستستغرقان من الوقت إذا عملتا معًا؟ J

F $1\frac{3}{8}$ ساعات

H $1\frac{3}{4}$ ساعات

G $1\frac{5}{8}$ ساعات

J $1\frac{7}{8}$ ساعات

77. **اختبار SAT/ACT** تبيع إحدى الشركات القهوة المطحونة في حاويتين على شكل أسطوانة وبجيمين مختلفين. تسع الحاوية الأصغر 10 أوقيات من القهوة. إذا كانت الحاوية الأكبر لها ضعف نصف قطر الحاوية الأصغر ومرة ونصف قدر الارتفاع، فكم عدد أوقيات القهوة التي تسعها الحاوية الأكبر؟ (يتم حساب حجم الأسطوانة بالقاعدة $V = \pi r^2 h$) C

A 30

C 60

E 90

B 45

D 75

78. ما حلول المعادلات $1 = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}$ ؟ H

F $x = 1, x = -2$

H $x = 1 + \sqrt{3}, x = 1 - \sqrt{3}$

G $x = -2, x = 1$

J $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

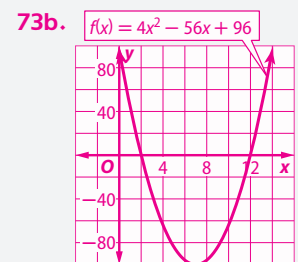
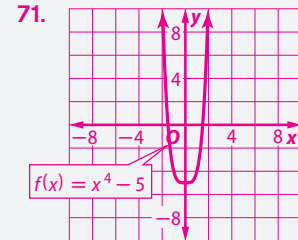
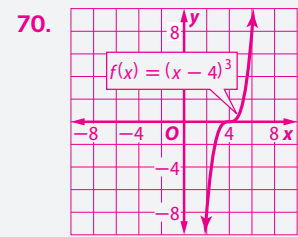
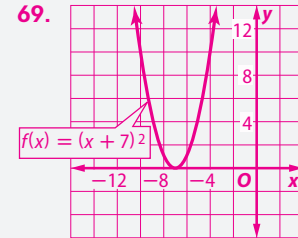
4 لتقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب اطلب من الطلاب حل

$\frac{4}{x(x-1)} + \frac{4}{x} = \frac{x}{x-1}$

إجابات إضافية



المتابعة

استكشف الطلاب عمل النماذج باستخدام الدوال الأسية والدوال الجذرية وكثيرة الحدود والنسبية.

أسأل:

ما قيود وضع النماذج الرياضية؟ الإجابة النموذجية: لا يمكن عمل نماذج لجميع المواقف من الحياة اليومية. أما بالنسبة للمواقف التي يمكن عمل نماذج لها، قد لا تكون التنبؤات التي

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-6 حل المعادلات كثيرة الحدود والنسبية.

الدرس 1-6 حل المتباينات كثيرة الحدود. حل المتباينات النسبية.

بعد الدرس 1-6 حل أنظمة المتباينات في الأمثلة الخطية.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

أوجد حلًا لـ $2x - 6 = 0$

هل $x = 2$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟ **سالب**

هل $x = 3$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟

لا موجب ولا سالب، فهي تجعله يساوي 0.

هل $x = 4$ تجعل ناتج $x - 62$ موجبًا أم سالبًا؟ **موجب**

(يتبع في الصفحة التالية)

المتباينات غير الخطية

الحالي

لماذا؟

السابق

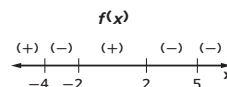
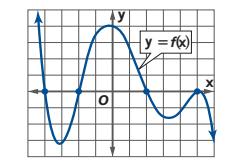


- حل المتباينات كثيرة الحدود.
- قيمت بحل المعادلات كثيرة الحدود والمعادلات النسبية. (الدرس 1-3 و 1-4)
- تكون العديد من العوامل متضمنة عند بدء عمل جديد، بها في ذلك مقدار من الاستئجار المبدئي وأعمال الصيانة وتكاليف العمالة وتكلفة تصنيع المنتج المراد بيعه وسعر البيع الفعلي المحدد للمنتج. يمكن استخدام المتباينات غير الخطية لتحديد السعر المحدد لبيع أحد المنتجات لتحقيق ربح معين.

1 المتباينات كثيرة الحدود إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود، فعندئذ تأخذ **المتباينة كثيرة الحدود** الصورة العامة $f(x) > 0$ ، $f(x) < 0$ ، $f(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq 0$ أو $f(x) > 0$ أو $f(x) < 0$ وتكون التالية $f(x) < 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا سالبًا. بينما تكون $f(x) > 0$ صحيحة عندما يكون $f(x)$ عددًا موجبًا.

في الدرس 1-1، تعلمت أن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لدالة كثيرة الحدود ما هي إلا أصفار حقيقية للدالة. عند ترتيبها، تنقسم أصفار المحور الأفقي x إلى فترات تكون قيمة $f(x)$ إما موجبة بشكل كامل (تكون أعلى المحور الأفقي x) أو سالبة بشكل كامل (تكون أسفل المحور الأفقي x).

لإيجاد إشارة $f(x)$ لقيمة واحدة فقط في كل فترة على المحور الأفقي x ، يمكنك تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة موجبة أو سالبة. بداية من فترات الاختيار الممثلة من خلال **مخطط الإشارات** الموجود في الجانب الأيسر، تعرف ما يلي:



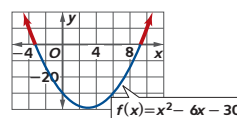
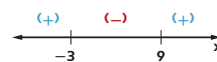
- $f(x) < 0$ على $(-4, -2) \cup (2, 5) \cup (5, \infty)$,
- $f(x) \leq 0$ على $[-4, -2] \cup [2, \infty)$,
- $f(x) = 0$ في $x = -4, -2, 2, 5$,
- $f(x) > 0$ على $(-\infty, -4) \cup (-2, 2) \cup (5, 5]$ ، و
- $f(x) \geq 0$ على $(-\infty, -4] \cup [-2, 2] \cup [5, 5]$.

مثال 1 إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود

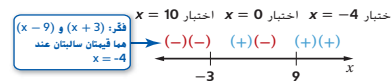
أوجد حلًا لها يلي $x^2 - 6x - 30 > -3$

جميع العدد 3 في كل طرف، نحصل على $x^2 - 6x - 27 > 0$ بافتراض أن $f(x) = x^2 - 6x - 27$ وينتج عن تحليل العوامل ما يلي $f(x) = (x + 3)(x - 9)$. إذن تحتوي $f(x)$ على أصفار حقيقية عند -3 و 9 . قم بإنشاء مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار. وبعد ذلك بقيمة ما على المحور الأفقي x في كل فترة اختبار داخل الصورة التي تم تحليلها إلى عوامل للدالة كثيرة الحدود لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة عند تلك النقطة.

$$f(x) = (x + 3)(x - 9)$$



$$1A. x^2 + 5x + 6 < 20 \quad (-7, 2)$$



لأن $f(x)$ موجبة على الفترات الأولى والأخيرة، فإن مجموعة الحل لـ $x^2 - 6x - 30 > -3$ هي $(-\infty, -3) \cup (9, \infty)$ وبدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج. نظرًا لوجود $f(x)$ أعلى المحور الأفقي x على هذه الفترات نفسها.

تحرير موجة

أوجد حلًا للمتباينات التالية.

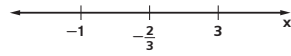
$$1B. (x - 4)^2 > 4 \quad (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$$

إذا كنت تعرف الأعداد الحقيقية لدالة ما، بما في ذلك مقدار التكرار، والسلوك الطرفي للدالة، فيمكنك تصميم مخطط إشارات بدون اختبار القيم.

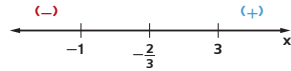
مثال 2 إيجاد حل لمتباينة كثيرة الحدود باستخدام السلوك الطرفي

أوجد حلًا لـ $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$

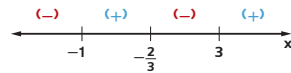
الخطوة 1 بافتراض أن $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ استخدم الأساليب الواردة في الدرس 4-1 لتحديد أن f يحتوي على أصفار حقيقية مع تكرار العدد 1 عند -1 و $-\frac{2}{3}$ و 3. قم بإنشاء مخطط الإشارات.



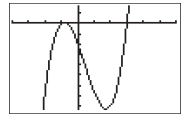
الخطوة 2 حدد السلوك الطرفي لـ $f(x)$. لأن درجة f فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فأنت تعرف أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ يعني هذا أن الدالة تبدأ سالبة على اليسار وتنتهي موجبة على اليمين.



الخطوة 3 لأن كل صفر مدرج يمثل موقع تغيير الإشارة، يمكنك إكمال مخطط الإشارات.



تساوي حلول $3x^3 - 4x^2 - 13x - 6 \leq 0$ قيم المحور الأفقي x بحيث يكون $f(x)$ سالبًا أو مساويًا لـ 0. من مخطط الإشارات، يمكنك معرفة أن مجموعة الحل تساوي $[-\frac{2}{3}, 3] \cup (-\infty, -1]$.



التحقق من الحل يكون التمثيل البياني لـ $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ على المحور الأفقي x على $[-\frac{2}{3}, 3] \cup (-\infty, -1]$. ✓

تمرين موجه

أوجد حلًا للمتباينات التالية.

2A. $2x^2 - 10x \leq 2x - 16$ [2, 4]

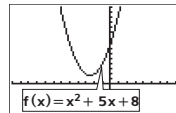
2B. $2x^3 + 7x^2 - 12x - 45 \geq 0$ $\{-3\} \cup [\frac{5}{2}, \infty)$

عندما لا تقاطع دالة كثيرة الحدود مع المحور الأفقي x ، يكون للمتباينات المرتبطة حلول غير عادية.

مثال 3 المتباينات كثيرة الحدود التي لها مجموعات حل غير عادية

أوجد حلًا للمتباينات التالية.

a. $x^2 + 5x + 8 < 0$



لا تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ على أصفار حقيقية. إذا لا توجد أي تغيرات في الإشارات، تكون هذه الدالة موجبة بالنسبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x . لذلك، لا يوجد حل لـ $x^2 + 5x + 8 < 0$. يدعم التمثيل البياني لـ $f(x)$ هذا الاستنتاج. لعدم وجود التمثيل البياني على المحور الأفقي x أو أسفله، ومجموعة الحل هي \emptyset .

b. $x^2 + 5x + 8 \geq 0$

لأن الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 5x + 8$ موجبة لجميع القيم الحقيقية للمحور الأفقي x ، تساوي مجموعة الحل لـ $x^2 + 5x + 8 \geq 0$ جميع الأعداد الحقيقية أو $(-\infty, \infty)$.

نصيحة دراسية

المتباينات كثيرة الحدود يمكن التحقق من حل إحدى المتباينات كثيرة الحدود بتمثيل الدالة بيانيًا وتقدير القيمة الحقيقية للمتباينة لكل فترة في الحل.

■ بناءً على إجاباتك، ما الاستنتاج الذي يمكنك التوصل إليه لوضع حلول لـ $2x - 6 > 0$ ؟ $x > 3$

■ لماذا في رأيك يعد 3 عددًا مهمًا

للمتباينة $2x - 6 > 0$ ؟ الإجابة

النموذجية: عندما تعرف القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة، يمكنك اختبار الفترات في كلا جانبي تلك القيمة لإيجاد ما يجعل المتباينة صحيحة. وتكون هذه المتباينة موجبة للقيم التي تزيد عن 3، إذًا فإن $x > 3$ هو الحل.

1 المتباينات كثيرة الحدود

الأمثلة 1-3 توضح كيفية حل المتباينات

كثيرة الحدود باستخدام الأصفار

الحقيقية للدالة كثيرة الحدود المرتبطة

ومضاعفتها والسلوك الطرفي للدالة إلى

جانب مخطط العلامات.

التقويم التكويني

استخدام التمارين الواردة في الجزء

”تمرين موجه“ بعد كل مثال لتحديد مدى

فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حلًا لـ $x^2 - 8x + 16 \leq 1$ [3, 5]

2 أوجد حلًا لـ $x^3 - 22x > 3x^2 - 24$ $(-4, 1) \cup (6, \infty)$

3 أوجد حل كل من المتباينات التالية.

a. $x^2 + 2x + 3 < 0$

b. $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ $(-\infty, \infty)$

c. $x^2 + 12x + 36 > 0$ $(-\infty, -6) \cup (-6, \infty)$

d. $x^2 + 12x + 36 \leq 0$ $[-6]$

2 المتباينات النسبية

المثالان 4 و 5 يوضحان كيفية حل

المتباينات النسبية من خلال كتابة

المتباينة أولاً بالصيغة العامة بتعبير

نسبي واحد على اليسار و 0 على اليمين.

وتستخدم أصفار الدالة مع مخطط

العلامات لتحديد في أي الفترات تكون

التعابير في الدالة موجبة أم سالبة أم

تساوي صفراً.

مثال إضافي

4 أوجد حلاً لـ $\frac{3x+4}{x+2} - 3 \geq 0$ $(-\infty, -2)$

نصائح للمعلمين الجدد

تغيير العلامات يمكن أن تغير الدالة

النسبية العلامات عند أصفارها الحقيقية

أو عند نقاط الانقطاع الخاصة بها.

لذلك يتضمن مخطط العلامات أصفار

كل من البسط والمقام.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر عدة طلاب لكي

يعرضوا ويوضحوا للفصل كيفية استخدام

مخطط العلامات لاختبار الفترات عند

حل إحدى المتباينات.

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المتباينات النسبية لحل متباينة

نسبية، أوجد الأصفار أولاً من البسط

والنقاط غير المحددة من المقام.

واستخدم هذه الأصفار والنقاط غير

المحددة لتقسيم خط أعداد إلى فترات

ممثلة في مخطط علامات. اختر عدداً

واحداً من كل فترة وأوجد قيمة $f(x)$

لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجباً أم سالباً

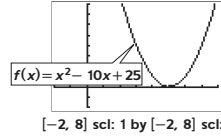
في تلك الفترة. إذا كان $f(x) < 0$ ، فإن

المتباينة $f(x)$ تكون سالبة. إذا كان $f(x)$

> 0 ، فإن المتباينة صحيحة عندما تكون

$f(x)$ موجبة.

c. $x^2 - 10x + 25 > 0$



$[-2, 8]$ scl: 1 by $[-2, 8]$ scl: 1

d. $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

تحتوي الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 10x + 25$ على صفر عند العدد 5. بالنسبة لجميع القيم الأخرى للمحور الأفقي x ، تكون الدالة موجبة. لذلك، تكون مجموعة الحل لـ $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ مساوية لـ $\{5\}$.

تمرين موجّه

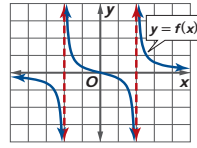
أوجد حلاً للمتباينات التالية.

3A. $x^2 + 2x + 5 > 0$ $(-\infty, \infty)$

3B. $x^2 + 2x + 5 \leq 0$ \emptyset

3C. $x^2 - 2x - 15 \leq -16$ $\{1\}$

3D. $x^2 - 2x - 15 > -16$ $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$



2 المتباينات النسبية انظر في الدالة النسبية الموضحة على الجانب الأيسر. لاحظ الفترات التي تكون عليها $f(x)$ موجبة وسالبة. في حين يمكن أن تغير الدالة كثيرة الحدود من إشاراتها فقط في أصفارها الحقيقية، يمكن أن تغير الدالة النسبية من إشاراتها في الأصفار الحقيقية أو في نقاط الانقطاع لديها. لهذا السبب، عند حل أي **متباينة نسبية**، يجب عليك تضمين أصفار البسط والمقام في مخطط الإشارات.

يمكنك البدء في حل متباينة نسبية من خلال كتابة المتباينة أولاً بالصورة العامة مع تضمين تعبير نسبي واحد على اليسار وصفر على اليمين.

نصيحة دراسية

المتباينات النسبية تذكر تضمين جميع الأصفار والنقاط غير المحددة في دالة نسبية عند إنشاء مخطط الإشارات.

مثال 4 إيجاد حل لمتباينة نسبية

أوجد حلاً لـ $\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$

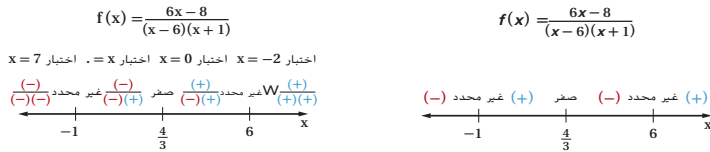
$\frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1} > 0$ متباينة أصلية

استخدم المقام المشترك الأصغر، $(x-6)(x+1)$ ، لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.

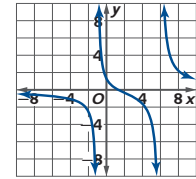
$\frac{4x+4+2x-12}{(x-6)(x+1)} > 0$ حوّل لأبسط صورة.

لنفترض أن $f(x) = \frac{6x-8}{(x-6)(x+1)}$. إن الأصفار والنقاط غير المحددة في المتباينة تمثل أصفار البسط، $\frac{4}{3}$ والمقام، 6 و -1. قم بإنشاء مخطط إشارات

باستخدام هذه الأعداد. بعد ذلك اختر قيم المحور الأفقي x في كل فترة واختبره لتحديد هل $f(x)$ موجبة أم سالبة.



تساوي مجموعة حل المتباينة الأصلية اتحاد تلك الفترات التي تكون لها $f(x)$ موجبة. $(-\infty, -1) \cup (\frac{4}{3}, 6)$ ويدعم التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{4}{x-6} + \frac{2}{x+1}$ في الشكل 1.6.1 هذا الاستنتاج.



الشكل 1.6.1

التعليم المتمايز

التوسّع اطلب من الطلاب تحديد القيم الموجبة لـ n ، حيث سيكون مكعب n أكبر 10 مرات من مربع n . $(10, \infty)$

مثال إضافي

5 النجارة نجار يصنع المناضد.

وتتخذ أسطح المناضد شكل مستطيل محيطه 20 قدمًا ومساحة لا تقل عن 24 قدمًا مربعة. اكتب وأوجد حلًا لمتباينة يمكن استخدامها لتحديد الأطوال الممكنة التي يمكن أن تُصنع بها المناضد.

$$24 \leq \ell(10 - \ell); 4 \text{ أقدام إلى } 6 \text{ أقدام}$$

إجابات إضافية

1. $[-4, 2]$
2. $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$
3. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [8, \infty)$
4. $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (4, \infty)$
5. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
6. $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, 6]$
7. $(-3, -\frac{3}{4}) \cup (0, \infty)$
8. $(-\frac{2}{5}, 3) \cup (6, \infty)$
9. $(-\infty, \infty)$
10. \emptyset
11. \emptyset
12. $(-\infty, \infty)$
13. $\{4\}$
14. $\{-3\}$
15. $\{-2\}$
16. $(-\infty, \infty)$
17. $-0.0004x^2 + 80x - 1,000,000 \geq 2,000,000;$
 $50,000 \leq x \leq 150,000$

$$18. (-\frac{15}{2}, -4)$$

$$19. (-\infty, 5)$$

$$20. (6, \frac{25}{2}]$$

$$21. (-\infty, -\frac{20}{3}) \cup (-3, \infty)$$

$$22. (-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (-\frac{7}{27}, \infty)$$

$$23. (-\infty, \frac{14}{13}] \cup (\frac{5}{3}, \infty)$$

$$24. (-\infty, -1) \cup [-\frac{3}{4}, 3) \cup [4, \infty)$$

$$25. (-3, \frac{2}{3}] \cup (1, \infty)$$

$$26. [-5, -4) \cup (-4, -\frac{3}{5}]$$

تَهْرِين مَوْجِه
أوجد حلًا للمتباينات التالية.

$$4A. \frac{x+6}{4x-3} \geq 1 \left(\frac{3}{4}, 3 \right] \quad 4B. \frac{x^2-x-11}{x-2} \leq 3 \quad (-\infty, -1] \cup (2, 5] \quad 4C. \frac{1}{x} > \frac{1}{x+5} \quad (-\infty, -5) \cup (0, \infty)$$

يمكنك استخدام المتباينات غير الخطية لحل مسائل من الحياة اليومية.

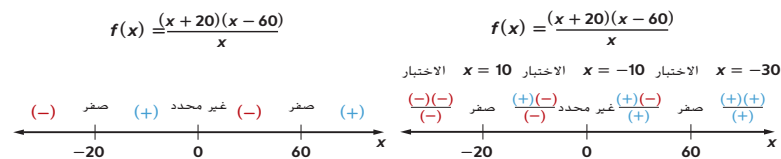
مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد حل لمتباينة نسبية

المتنزهات الترفيهية تقوم مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية بتأجير حافلة نظير دفع 600 AED لأخذهم إلى أحد المتنزهات الترفيهية في اليوم التالي لحفل التخرج. تبلغ تكلفة تذكرة المتنزه الترفيهي 60 AED وتقل بمقدار 0.50 AED في صورة خصم لكل فرد في المجموعة. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد حل لها لتحديد كم عدد الطلاب الذين يجب عليهم الذهاب في رحلة نظير تكلفة إيجابية تكون أصغر من 40 AED لكل طالب.

لتفترض أن x يمثل عدد الطلاب.

تكلفة التذكرة لكل طالب	+	تكلفة الحافلة لكل طالب	يجب أن تكون أصغر من 40 AED
$60 - 0.5x$	+	$\frac{600}{x}$	
			40
			$>$
			اكتب المتباينة.
			$60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$
			اطرح 40 من كل طرف.
			$60 - 0.5x + \frac{600}{x} - 40 < 0$
			استخدم العامل المشترك الأصغر، x . لإعادة كتابة كل كسر. ثم اجمع.
			$60x - 0.5x^2 + 600 - 40x < 0$
			حوّل لأبسط صورة.
			$-0.5x^2 + 20x + 600 < 0$
			اضرب كل طرف في -2. اعكس إشارة المتباينة.
			$x^2 - 40x - 1,200 > 0$
			حلل إلى عوامل.
			$(x+20)(x-60) > 0$

لتفترض أن $f(x) = \frac{(x+20)(x-60)}{x}$. أستخدم هذه المتباينة هي -20 و 60 و 0 . استخدم هذه الأعداد لإنشاء مخطط الإشارات لهذه الدالة وإكمالها.



إذا، مجموعة الحل لـ $60 - 0.5x + \frac{600}{x} < 40$ هي $(-20, 0) \cup (60, \infty)$

نظرًا لتعدد وجود عدد سالب من الطلاب، يجب أن يذهب أكثر من 60 طالبًا إلى المتنزه الترفيهي نظير تكلفة إجمالية تبلغ أصغر من 40 AED لكل طالب.

$$\left(\frac{250-21}{2} \right) \geq 1,000; 8.6 \text{ أقدام إلى } 116.4 \text{ قدمًا}$$

تَهْرِين مَوْجِه

5. تنسيق الحدائق يعمل مهندس تصميم الحدائق على تصميم سور يحيط بحديقة مستطيلة الشكل يبلغ محيطها 250 قدمًا. إذا كانت مساحة الحديقة تبلغ 1,000 قدم مربع على أقل تقدير، فاكتب متباينة وأوجد حلًا لها لإيجاد الأطوال المحتملة للسور.

التعليم المتمايز

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل معًا في مجموعات مختلفة القدرات مكونة

من ثلاثة لتحليل البسط إلى عوامل في المتباينة النسبية $\frac{x^2-x-12}{x+4} \geq 0$ اطلب من كل عضو في

المجموعة أن يحدد عددًا مهمًا مختلفًا. ثم اطلب من المجموعات شرح السبب في إمكانية كتابة الحل

بالصيغة $(-\infty, -3] \cup (-4, -3]$ هو ترميز الفترة لـ $-3 < x < -4$ أو $x \leq 4$

إجابات إضافية

$$50a. S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4,000}{r}$$

$$50b. 2\pi r^2 + \frac{4,000}{r} < 2,400 \text{ أو } 2\pi r^2 + \frac{4,000}{r} - 2,400 < 0$$

$$50c. (-20.33, 0) \cup (1.68, 18.65)$$

حيث إن نصف القطر لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن الأطوال الممكنة لنصف القطر تقع بين 1.68 cm و 18.65 cm فقط.

50. **التعبئة** تباع الشركة أوعية الزيت أسطوانية الشكل كهذا الوعاء المشار إليه. **a-c. انظر الهامش.**



- a. استخدم حجم الوعاء للتعبير عن مساحة سطحه في صورة دالة ويكون نصف قطر المساحة بالسنتيمترات. (إرشاد: لتر واحد = 1,000 سنتيمتر مكعب)
- b. تريد الشركة أن تكون مساحة سطح الوعاء أقل من 2,400 سنتيمتر مربع. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد أنصاف الأقطار للوعاء بهذا البند من المتطلبات.
- c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حل للمتباينة التي كتبتها في الجزء b وفسر الحل.

أوجد حلًا للمتباينات التالية: $(-\infty, -3) \cup (-3, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 4)$

$$51. (x + 3)^2(x - 4)^3(2x + 1)^2 < 0$$

$$52. (y - 5)^2(y + 1)(4y - 3)^4 \geq 0 \quad [-1, \infty)$$

$$53. (a - 3)^3(a + 2)^3(a - 6)^2 > 0 \quad (-\infty, -2) \cup (3, 6) \cup (6, \infty)$$

$$54. c^2(c + 6)^3(3c - 4)^5(c - 3) \leq 0 \quad (-\infty, -6] \cup \left[\frac{4}{3}, 3\right] \cup \{0\}$$

55. **وقت الدراسة** يحدد ياسر أنه بمساعدة المعلومات التي يعرفها في الوقت الحالي، يستطيع تحقيق مجموع درجات يصل إلى نسبة 75% من الاختبار الذي يخضع له. يعتقد ياسر أن كل 5 دقائق كاملة يخصصها في الدراسة، سيرفع من مجموع درجاته بنسبة 1%. $75 + \left\lceil \frac{t}{5} \right\rceil \geq 89.5$

a. إذا كان ياسر يرغب في الحصول على مجموع درجات يصل إلى 89.5% على أقل تقدير، فاكثب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد الوقت t الذي سيفضيه في الدراسة.

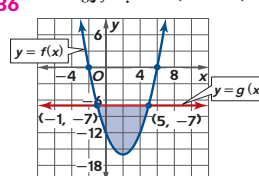
b. أوجد حلًا للمتباينة التي كتبتها في الجزء a وفسر الحل. **75: الإجابة النموذجية:** لأن $t \geq 72.5$ ، سيجب على ياسر قضاء 75 دقيقة في الدراسة تحضيرًا للاختبار.

56. **ألعاب** تصرف آلة كرة السكي 3 بطاقات في كل مرة يلعب فيها أحد الأشخاص ثم بطاقتين إضافيتين لكل 80 نقطة يسجلها اللاعب. a. اكتب دالة غير خطية لرسم نموذج لكمية البطاقات المستتلة لمجموع نقاط المحور الأفقي x .

b. اكتب متباينة يمكن استخدامها لإيجاد مجموع النقاط الذي سيحتاج إليه اللاعب للحصول على 11 بطاقة على أقل تقدير.

c. أوجد حلًا للمتباينة الموجودة في الجزء b وفسر الحل الذي توصل إليه. **انظر الهامش.**

57. **مساحة دائرة محاطة بتقطع مكافئ ومستقيم أفقي هي** $A = \frac{2}{3}bh$ حيث يمثل b قاعدة الدائرة بطول المستقيم الأفقي ويمثل h ارتفاع الدائرة. أوجد المساحة المحاطة بـ f و g .



64 | الدرس 1-6 | المتباينات غير الخطية

إذا كان k غير سالب، فأوجد الفترة لـ x الذي تكون له كل متباينة صحيحة. **58-61. انظر الهامش.**

$$58. x^2 + kx + c \geq c$$

$$59. (x + k)(x - k) < 0$$

$$60. x^3 - kx^2 - k^2x + k^3 > 0$$

$$61. x^4 - 8k^2x^2 + 16k^4 \geq 0$$

62. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من المتباينات غير الخطية ذات القيم المطلقة.

a. **العرض الجدولي** انسخ الجدول الوارد أدناه وأكمله.

الدالة	الأصناف	النقاط غير المحددة
$f(x) = \frac{x-1}{ x+2 }$	1	-2
$g(x) = \frac{ 2x-5 }{x-3}$	$\frac{5}{2}$	3
$h(x) = \frac{ x+4 }{ 3x-1 }$	-4	$\frac{1}{3}$

b-d. **انظر ملحق إجابات الوحدة 1.**

b. **العرض البياني** مثل كل دالة بيانيًا في الجزء a.

c. **العرض الرمزي** قم بإنشاء مخطط إشارات لكل متباينة. ضعن الأصناف والنقاط غير المحددة وقدر إشارة البسوط والمقامات كل على حدة.

$$i. \frac{x-1}{|x+2|} < 0$$

$$ii. \frac{|2x-5|}{x-3} \geq 0$$

$$iii. \frac{|x+4|}{|3x-1|} > 0$$

d. **العرض العددي** اكتب حلًا لكل متباينة موجودة في الجزء c.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **تحليل الخطأ** يقوم خميس وراشد بحل $\frac{x^2}{(3-x)^2} \geq 0$ يعتقد سمير أن الحل هو $(-\infty, 0]$ أو $[0, \infty)$. ويعتقد راشد أن الحل هو $(-\infty, \infty)$. هل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

64. **الاستنتاج** إذا كانت مجموعة الحل لمتباينة كثيرة الحدود هي $(-3, 3)$ ، فكم ستساوي مجموعة الحل إذا كان رمز المتباينة معكوسًا؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

65. **تحدٍ** أوجد القيم التي يكون لها $(c + d)^2 > (a + b)^2$ إذا كان $a < b$ و $a < 0$ و $|a + b| > |c + d|$ و $c < d$.

66. **الاستنتاج** إذا كان $c < d > 0$ ، فأوجد الفترة التي يكون عليها $(x - c) \leq 0$ و $(x - d) < 0$ صحيحًا. اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

67. **تحدٍ** ما مجموعة الحل لـ $(x - a)^{2n} > 0$ إذا كان n عددًا طبيعيًا؟ $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$

68. **الاستنتاج** ماذا يحدث لمجموعة الحل لـ $x + a < 0$ و $x + b < 0$ إذا تغير التعبير إلى $-(x + a)(x - b) < 0$ ، حيث $a > 0$ و $b > 0$ ؟ اشرح استنتاجك.

انظر الهامش.

69. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكنك حل $\frac{3x+1}{x-2} < 6$ بضرب كل طرف في $x - 2$. **انظر الهامش.**

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية والجذرية (الدرس 1-1)

- دالة أسية هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$ ، حيث a و n أعداد حقيقية غير صفرية.
- دالة أحادية الحد هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$ ، حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.
- دالة جذرية هي أي دالة يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ، حيث n و p أعداد صحيحة موجبة أكبر من 1 الذي ليس لديه عوامل مشتركة.

الدوال كثيرة الحدود (الدرس 2-1)

- دالة كثيرة الحدود هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n \neq 0$ ، الدرجة تساوي n .
- يوجد في التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود n أصغار حقيقية مميزة على الأكثر و $n - 1$ نقاط انعطاف على الأكثر.
- يعتمد سلوك التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود عند c الصغرية الخاصة به على عدد مرات تكرار العامل $(x - c)$.

نظريتا الباقي والعامل (الدرس 1-3)

- القسمة التركيبية، طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي بالصيغة $x - c$.
- في حالة قسمة f على $x - c$ ، فإن الباقي يساوي $f(c)$.
- $x - c$ هي عامل لدالة كثيرة الحدود f إذا وفقط إذا كان $f(c) = 0$.

أصغار الدوال كثيرة الحدود (الدرس 1-4)

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ذات معاملات أعداد صحيحة، فإن أي صغر نسبي لـ $f(x)$ يكتب بالصيغة $\frac{p}{q}$ ، حيث p و q ليس لديهما عوامل مشتركة، و p هي عامل a_0 و q هي عامل a_n .
- في الدالة كثيرة الحدود من الدرجة n ، يوجد n أصغار، بما في ذلك الأصغار المتكررة في نظام الأعداد المركبة. يوجد في هذه الدالة n عوامل:

$$f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

الدوال النسبية (الدرس 1-5)

- يتضمن التمثيل البياني لـ f خطأً مغارباً رأسياً $x = c$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$.
- يتضمن التمثيل البياني لـ f خطأً مغارباً أفقياً $y = c$ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.
- الدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ قد يوجد بها مستقيمات مغاربة رأسية أو مستقيمات مغاربة أفقية أو مستقيمات مغاربة مائلة أو نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط تقاطع مع المحور الرأسي y . يمكن تحديدهم جميعاً جبرياً.

المتباينات غير الخطية (الدرس 6 - 2)

- يجب أن يشمل مخطط إشارات المتباينة النسبية أصغارا ونقاطاً غير محددة.

66 | الوحدة 1 | دليل الدراسة والمراجعة

المفردات الأساسية

المرافقات المركبة (complex conjugates) (صفحة 124)	الدالة كثيرة الحدود (polynomial function) (صفحة 97)
الحل الدخيل (extraneous solution) (صفحة 91)	الدالة الأسية (power function) (صفحة 86)
الخط المقارب الأفقي (horizontal asymptote) (صفحة 131)	الدالة التربيعية (quartic function) (صفحة 99)
الجذور الحقيقية غير القابلة للاختزال (irreducible over the reals) (صفحة 124)	الدالة النسبية (rational function) (صفحة 130)
معامل الحد الأكبر (leading coefficient) (صفحة 97)	الصفر المتكرر (repeated zero) (صفحة 101)
اختبار الحد الرئيس (leading-term test) (صفحة 98)	مخطط الإشارات (sign chart) (صفحة 141)
الحد الأدنى (lower bound) (صفحة 121)	القسمة التركيبية (synthetic division) (صفحة 111)
التكرار (multiplicity) (صفحة 102)	التعويض التركيبي (synthetic substitution) (صفحة 113)
الخط المقارب المائل (oblique asymptote) (صفحة 134)	نقطة انعطاف (turning point) (صفحة 99)
	الحد الأعلى (upper bound) (صفحة 121)
	الخط المقارب الرأسي (vertical asymptote) (صفحة 131)

مراجعة المفردات

حدد الكلمة أو العبارة التي تكمل كل جملة أفضل ما يمكن.

- معامل الحد ذي أكبر أس للمتغير هو (معامل القيمة العظمى، الدرجة) لدالة الحدود. **معامل القيمة العظمى**
- (دالة كثيرة الحدود، دالة أسية) هي أي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n \neq 0$ ، a_1, a_2, \dots, a_n أعداد حقيقية و n عدد طبيعي. **الدالة كثيرة الحدود**
- يوجد في الدالة التي لديها عدة عوامل لـ $(x - c)$ (أصغار متكررة، نقاط انعطاف). **أصغار متكررة**
- (قسمة كثريرات الحدود، القسمة التركيبية) هي أقصر طريقة لقسمة الدوال كثيرة الحدود على عوامل خطية. **القسمة التركيبية**
- ترتبط (نظرية الباقي، نظرية العامل) بالعوامل الخطية لكثيرة الحدود ذات أصغار لدالتها المرتبطة. **نظرية العامل**
- يمكن ذكر بعض الأصغار الممكنة لدالة كثيرة الحدود في قائمة باستخدام نظرية (العامل، الأصغار النسبية). **الأصغار النسبية**
- يتم تحديد المستقيمات المغاربة (الرأسية، الأفقية) عن طريق أصغار مقام دالة نسبية. **الرأسية**
- تحدد أصغار (المقام، البسط) نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x لتمثيل بياني لدالة نسبية. **البسط**
- تحدث المستقيمات المغاربة (الأفقية، المائلة) عندما تمتلك دالة نسبية مقاماً بدرجة أكبر من 0 وبسطاً بدرجة أكبر من درجة مقامها. **المائلة**
- (الدالة التربيعية، الدالة الأسية) هي دالة تكتب بالصيغة $f(x) = ax^n$ ، حيث a و n أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية. **الدالة الأسية**

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير مراجع الصفحة بعد كل كلمة إلى المكان الذي ذُكر فيه المصطلح لأول مرة. إذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لتنشيط ذاكراتهم بشأن المفردات.

إجابات إضافية

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب.

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب.

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب.

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب.

25. 3 أصغار حقيقية ونقطتان دوران؛ 0 و 3 و 4

26. 5 أصغار حقيقية و 4 نقاط دوران؛ -10 و 0 و 2

27. 4 أصغار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ -3 و -1 و 1 و 3

28. 4 أصغار حقيقية و 3 نقاط دوران؛ $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

دليل الدراسة والمراجعة تابع

1-3 نظريتا الباقي والعمود

مثال 4

اقسم باستخدام القسمة المطولة. $(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div (2x - 1)$ باستخدام القسمة التركيبية.

أعد كتابة تعبير القسمة $\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$ بحيث يكون المقام بالصيغة $x - c$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 4}{2x - 1} = \frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4) \div 2}{(2x - 1) \div 2} = \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2}{x - \frac{1}{2}}$$

لذا، $c = \frac{1}{2}$ وقم بإجراء القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\frac{(2x^3 - 3x^2 + 5x - 4)}{(2x - 1)} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{(2x - 1)}$$

اقسم باستخدام القسمة المطولة.

$$31. (x^3 + 8x^2 - 5) \div (x - 2) \quad x^2 + 10x + 20 + \frac{35}{x - 2}$$

$$32. (-3x^3 + 5x^2 - 22x + 5) \div (x^2 + 4) \quad -3x + 5 - \frac{10x + 15}{x^2 + 4}$$

$$33. (2x^5 + 5x^4 - 5x^3 + x^2 - 18x + 10) \div (2x - 1) \quad x^4 + 3x^3 - x^2 - 9 + \frac{1}{2x - 1}$$

اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

$$34. (x^3 - 8x^2 + 7x - 15) \div (x - 1) \quad x^2 - 7x - \frac{5}{x - 1}$$

$$35. (x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x - 18) \div (x - 2) \quad x^3 + x^2 + 9x + 9$$

$$36. (2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 16x - 6) \div (2x - 1) \quad x^3 + 2x^2 - 4x + 6$$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدود الموضحة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدود التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$

$$37. f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 24. (x + 3) \quad \text{نعم، } f(x) = (x + 3)(x^2 - 8)$$

$$38. f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 4, (x - 1), (x + 1) \quad \text{نعم، نعم، } f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 4)(2x - 1)$$

$$39. f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4, (x + 1), (x - 2) \quad \text{نعم، نعم، } f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$$

1-4 أصفار الدوال كثيرة الحدود

مثال 5

أوجد حل $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$

لأن معامل القيمة العظمى يساوي 1، فإن جميع الأصفار النسبية الممكنة تكون عوامل لـ -32 . لذا تساوي جميع الأصفار النسبية الممكنة $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$. باستخدام التعويض التركيبي، يمكنك تحديد أن -2 تساوي صفراً نسبياً.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -16 & -32 \\ & & -2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

لذا، $f(x) = (x + 2)(x^2 - 16)$ ويمكن كتابة الدالة كثيرة الحدود هذه بالصيغة $f(x) = (x + 2)(x - 4)(x + 4)$ والأصفار النسبية لـ f تساوي -2 و -4 و 4

أذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أي منها أصفار، إن وجدت.

$$40. f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \pm 1, \pm 2 \quad \text{(التكرار: 2) و -1}$$

$$41. f(x) = x^3 - 14x - 15 \quad \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15, -3$$

$$42. f(x) = x^4 + 5x^2 + 4 \quad \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5 \quad \text{أصفار غير نسبية}$$

$$43. f(x) = 3x^4 - 14x^3 - 2x^2 + 31x + 10 \quad \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}; 2, -\frac{1}{3}$$

أوجد حلاً لكل من المعادلات التالية.

$$44. x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0 \quad 1, 2, 3 \quad \text{(التكرار: 2)}$$

$$45. 6x^3 - 23x^2 + 26x - 8 = 0 \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$$

$$46. x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 28x = 48 \quad 2, 2, 3, 4, -\frac{3}{2}, -2, 2, 4$$

$$47. 2x^4 - 11x^3 + 44x = -4x^2 + 48 \quad \frac{3}{2}, -2, 2, 4 \quad f(x) = (x + 7)(x - 6)(x + i)(x - i)$$

استخدم الصفر الموضح لإيجاد كل الأصفار المركبة لكل دالة.

ثم اكتب تحليل العوامل الخطية للدالة.

$$48. f(x) = x^4 + x^3 - 41x^2 + x - 42, i \quad 1, 3, 2i, -2i, f(x) = (x - 3)(x - i)(x - 2i)(x + 2i)$$

$$49. f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12, -2i \quad 1, 3, 2i, -2i, f(x) = (x - 3)(x - i)(x - 2i)(x + 2i)$$

إجابات إضافية

$$50. D = \{x | x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}; x = -4$$

$$51. D = \{x | x \neq 5, -5, x \in \mathbb{R}\}; x = 5, x = -5, y = 1$$

$$52. D = \{x | x \neq 5, -3, x \in \mathbb{R}\}; x = 5, x = -3, y = 0$$

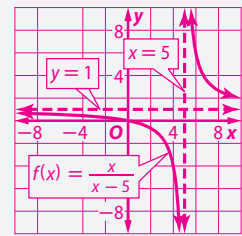
$$53. D = \{x | x \neq -3, -9, x \in \mathbb{R}\}; x = -3, x = -9, y = 1$$

54. خطوط المقاربة: $x = 5, y = 1$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: 0$

نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y: 0$

$$D = \{x | x \neq 5, x \in \mathbb{R}\}$$



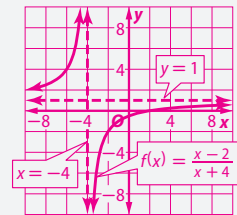
55. خطوط المقاربة: $x = -4, y = 1$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$2: x$ نقطة التقاطع مع المحور

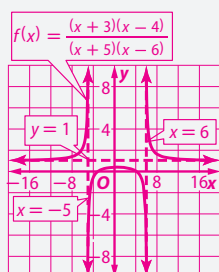
الرأسي $y: -\frac{1}{2}$

$$D = \{x | x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}$$

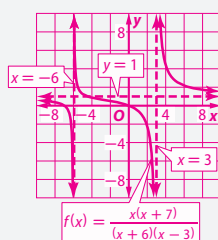


إجابات إضافية

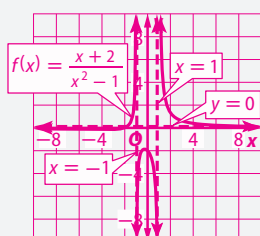
56. خطوط المقارنة: $x = -5, x = 6$,
 $y = 1$: نقاط التقاطع مع المحور
 الأفقي x : -3 و 4 ; نقطة التقاطع
 مع المحور الرأسي y : $\frac{2}{5}$;
 $D = \{x \mid x \neq -5, 6, x \in \mathbb{R}\}$



57. الخطوط المقارنة: $x = -6, x = 3$,
 $y = 1$: نقاط التقاطع مع المحور
 الأفقي x : 0 و -7 ; نقطة التقاطع مع
 المحور الرأسي y : 0 ;
 $D = \{x \mid x \neq -6, 3, x \in \mathbb{R}\}$



58. خطوط المقارنة: $x = -1, x = 1$,
 $y = 0$: نقطة التقاطع مع المحور
 الأفقي x : -2 ; نقطة التقاطع مع
 المحور الرأسي y : x ; $D = \{x \mid x \neq -1, 1, x \in \mathbb{R}\}$



أبحث عن مجال كل دالة وكل معادلات المستقيمات المقارنة الرأسية أو الأفقية. إن وجدت.

50-53. انظر الهامش.

$$50. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 4} \quad 51. f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 25}$$

$$52. f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-5)^2(x+3)^2} \quad 53. f(x) = \frac{(x-5)(x-2)}{(x+3)(x+9)}$$

في كل دالة. حدد أي مستقيمات مقارنة ونقاط تقاطع. ثم مثل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

54-59. انظر الهامش.

$$54. f(x) = \frac{x}{x-5} \quad 55. f(x) = \frac{x-2}{x+4}$$

$$56. f(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-6)} \quad 57. f(x) = \frac{x(x+7)}{(x+6)(x-3)}$$

$$58. f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \quad 59. f(x) = \frac{x^2-16}{x^3-6x^2+5x}$$

أوجد حلًا لكل من المعادلات التالية. $\frac{9 \pm \sqrt{33}}{2} \approx 1.63, 7.37$

$$60. \frac{12}{x} + x - 8 = 1 \quad 61. \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = -\frac{x}{x+2} \quad -3$$

$$62. \frac{1}{d+4} = \frac{2}{d^2+3d-4} - \frac{1}{1-d} \quad \emptyset$$

$$63. \frac{1}{n-2} = \frac{2n+1}{n^2+2n-8} + \frac{2}{n+4} \quad \frac{7}{3}$$

1-6 المتباينات غير الخطية

أوجد حلًا للمتباينات التالية.

$$64. (x+5)(x-3) \leq 0 \quad [-5, 3] \quad 65. x^2 - 6x - 16 > 0 \quad (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$$

$$66. x^3 + 5x^2 \leq 0 \quad [-\infty, -5] \cup [0, \infty) \quad 67. 2x^2 + 13x + 15 < 0 \quad (-5, -\frac{3}{2})$$

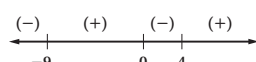
$$68. x^2 + 12x + 36 \leq 0 \quad [-6, -6] \quad 69. x^2 + 4 < 0 \quad \emptyset$$

$$70. x^2 + 4x + 4 > 0 \quad (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \quad 71. \frac{x-5}{x} < 0 \quad (0, 5)$$

$$72. \frac{x+1}{(12x+6)(3x+4)} \geq 0 \quad (-\frac{4}{3}, -1] \cup (-\frac{1}{2}, \infty) \quad 73. \frac{5}{x-3} + \frac{2}{x-4} > 0 \quad (3, \frac{26}{7}) \cup (4, \infty)$$

7 مثال

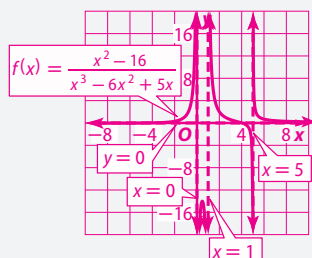
أوجد حل $x^3 + 5x^2 - 36x \leq 0$
 ينتج عن تحليل دالة كثيرة الحدود إلى عوامل
 $f(x) = x^3 + 5x^2 - 36x = x(x+9)(x-4)$ تساوي $f(x) = x(x+9)(x-4)$. لذا
 تتضمن $f(x)$ أصفارًا حقيقية عند 0 و -9 و 4
 أنشئ مخطط إشارات باستخدام هذه الأصفار. ثم عوّض عن قيمة x
 من كل فاصل زمني للاختبار في الدالة لتحديد ما إذا كان $f(x)$ موجبة
 أم سالبة عند هذه النقطة.



لأن $f(x)$ سالبة في الفاصلين الزمنيين الأول والثالث، فإن حل المعادلة $x^3 + 5x^2 - 36x \leq 0$ يساوي $[-\infty, -9] \cup [0, 4]$.

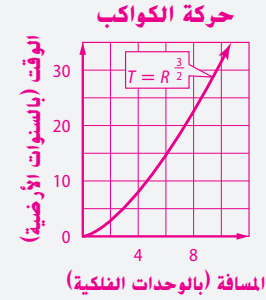
69

59. خطوط المقارنة: $x = 0, x = 1, x = 5, y = 0$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 4
 و $D = \{x \mid x \neq 0, 1, 5, x \in \mathbb{R}\}$



إجابات إضافية

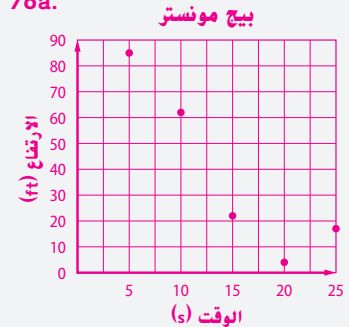
74b.



75a.

[0, 100] scl: 10 في [0, 3.5] scl: 0.5

76a.



الإجابة النموذجية: الدالة التكعيبية

76b. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.032x^3 - 1.171x^2 + 6.943x + 76$; $r^2 = 0.997$

78a. $f(x) = -50x^2 + 500x + 10,000$

78c. 10 AED؛ الإجابة النموذجية: إذا رفعت سعر كتبها لأكثر من 10 AED، فستحقق أقل من 10,000 AED

80b. $p(x) = \frac{200}{x + 50,000}$

82a. $10 < \frac{3,000}{x} + 5$ ؛ يجب أن يحضر ما يزيد عن 600 فرد إلى الحفلة.

82b. يجب أن يحضر الحفلة أكثر من 800 فرد.

دليل الدراسة والمراجعة تب

التطبيقات وحل المسائل

74. **الفيزياء** ينص قانون كيبلر الثالث، في الفيزياء، الذي يتعلق بحركة الكواكب على أنه يتم تحديد الوقت الذي تستغرقه T للوصول إلى كوكب ما لإكمال دورة واحدة في مدارها

حول الشمس عن طريق $T = R^{\frac{3}{2}}$. حيث R هي المتوسط الحسابي لمسافة

يُعد الكوكب عن الشمس. يتم قياس الوقت بالسنوات الأرضية، ويتم قياس المسافة بوحدات فلكية. (الدرس 1-1)

a. حدد مجال الدالة ذات الصلة ومداها.

b. مثل الدالة بيانياً: **انظر الهامش.**

c. يتم رصد الوقت الذي يستغرقه كوكب المريخ ليدور حول الشمس بـ 1.88 سنة أرضية. حدد متوسط بُعد كوكب المريخ عن الشمس بالأميال، علماً بأن الوحدة الفلكية الواحدة تساوي 93 مليون ميل. **حوالي 141.66 مليون mi**

75a. **انظر الهامش.**

75. **سياق الخيول** أقام فصل الرياضة التابع للأستاذ حديدي سباقاً سنوياً للخيول في الريف للتنافس بين الطلاب. تم تحديد سرعة v بالأميال لكل ساعة منذ إطلاق السباق بعد t ثوانٍ. (الدرس 2-1)

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v	85	50	30	20	15	12

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.

b. حدد دالة أسية لتمثيل البيانات.

c. استخدم الدالة للتنبؤ بالسرعة التي يسير عندها الخيل بعد 1.2 ثانية. **حوالي 35.6 mi/h**

d. استخدم الدالة للتنبؤ بالوقت الذي تكون فيه سرعة الخيل هي 47 ميلاً لكل ساعة. **0.94 ثانية تقريباً**

76. **المتنزهات** يتم تحديد مستوى الارتفاع عن سطح الأرض لراكب الأقطار الأفقوني "بيج مونستر" في الجدول. (الدرس 2-2)

الوقت (بالثواني)	25	20	15	10	5
الارتفاع (بامتدم)	17	4	22	62	85

انظر الهامش.

a. صمم مخطط تشتت للبيانات وحدد نوع الدالة كثيرة الحدود التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود لتمثيل مجموعة البيانات. قُرب كل معامل إلى أقرب جزء من ألف واذكر معامل الارتباط. **انظر الهامش.**

c. استخدم النموذج لتقدير ارتفاع الراكب عند 17 ثانية.

d. استخدم النموذج لتحديد بصورة تقريبية أول وقت يرتفع فيه الراكب 50 قدماً فوق سطح الأرض: **الإجابة النموذجية: حوالي 11.4 ثانية**

77. **زراعة الحدائق** زرع والدا أيمن بستانهما الجديد في عام 2001. ومنذ عام 2001 إلى عام 2011، زادت كمية العشب الزاحف على النحو التالي $f(x) = 0.021x^3 - 0.336x^2 + 1.945x - 0.720$. حيث x تساوي عدد الأعوام منذ عام 2001 و $f(x)$ عدد الأقدام المربعة لكل عام. استخدم القسمة التركيبية لإيجاد عدد الأقدام المربعة للعشب الزاحف 3-1 في البستان في عام 2011. قُرب إلى أقرب جزء من ألف. (الدرس 1-3) **6.13 ft²**

70 | الوحدة 1 | دليل الدراسة والمراجعة

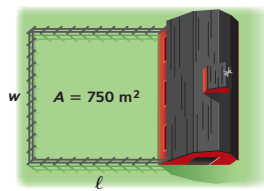
78. **التجارة** يبيع محل كتب مستعملة 1,000 كتاب، في المتوسط، شهرياً بمتوسط سعر يبلغ 10 AED لكل كتاب. ونظراً لارتفاع التكاليف، ترغب صاحبة المحل في رفع أسعار جميع الكتب. وحسبت أن حجم مبيعاتها سيقل 50 كتاباً من الكتب التي رفعت سعرها 1 AED. (الدرس 1-4)

a. اكتب دالة تمثل إجمالي حجم مبيعاتها بعد رفع أسعار كتبها بمقدار x درهم إماراتي. **انظر الهامش.**

b. كم عدد الدراهم الإماراتية التي تحتاجها لرفع أسعار كتبها بحيث يصل إجمالي قيمة مبيعاتها 11,250 AED؟ **5 AED**

c. ما أقصى مبلغ يمكن أن ترتفع به الأسعار وأن تحقق 10,000 AED من إجمالي المبيعات؟ اشرح. **انظر الهامش.**

79. **الزراعة** ترغب إحدى الفلاحات في تطويق مساحة مستطيلة باستخدام جانب واحد من حظيرتها و 80 متراً من مادة السياج. حدد أبعاد مساحة التطويق. افترض أن عرض مساحة التطويق w لن يكون أكبر من جانب الحظيرة. (الدرس 1-4)



80. **البيئة** تشتهر إحدى البرك باحتوائها على 0.40 % من الحمض. تحتوي البركة على 50,000 جالون من الماء. (الدرس 1-5)

a. كم عدد جالونات الحمض في البركة؟ **200 gal**

b. افترض أنه تمت إضافة x جالونات من الماء النقي إلى البركة. اكتب $p(x)$. وهي النسبة المئوية للحمض في البركة بعد إضافة x جالونات من الماء. **انظر الهامش.**

c. أوجد الخط المقارب الأفقي لـ $p(x)$. **$y = 0$**

d. هل تشتمل الدالة على أي مستقيمات مقاربة رأسية؟ اشرح.

لا. الإجابة النموذجية: $p(x)$ يتم تحديدها لجميع الأعداد في الفاصل الزمني $(-\infty, \infty)$.

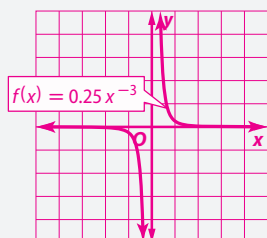
81. **الأعمال التجارية** يقوم أحد الخبازين ببيع x كعكات، ونتيجة لذلك فإنه سيحقق معدل إيرادات يصل إلى $b(x) = x^2 - 5x - 150$ مئة درهم إماراتي. حدد أدنى عدد من الكعكات التي يحتاج الخباز أن يبيعها لتحقيق ربح. (الدرس 1-6) **16 كعكة**

82. **حفلة دينية** يرغب أحد الفصول الأولية في تنظيم حفلة دينية لجمع تبرعات. وتبلغ تكلفة الفاعة التي يرغب الفصل في استئجارها 3,000 AED فضلاً عن رسم إضافي يقدر بـ 5 AED لكل فرد. (الدرس 1-6)

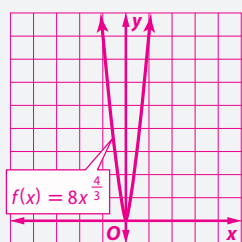
a. اكتب متباينة لتحديد كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة إذا أراد الفصل أن يجعل تكلفة الرسوم أصغر من 10 AED لكل فرد ثم أوجد حلاً لها.

b. ستوفر الصالة مؤثرات DJ مقابل 1,000 AED إضافي. كم عدد الأفراد الذين يجب أن يحضروا الحفلة لتصبح تكلفة الرسوم أصغر من 10 AED لكل فرد؟

إجابات إضافية



1. $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
 $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;
توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ؛
لا نهائي عند $x = 0$: التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



2. $D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$;
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ؛
متواصل لجميع الأرقام الحقيقية: التناقص: $(-\infty, 0)$ ؛ التزايد: $(0, \infty)$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ؛
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب.

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ؛
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب.

14. الدرجة تساوي 2 والمعامل الرئيسي يساوي -32. لأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب،

فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

19. الطقس بين الجدول متوسط درجة الحرارة العالية في مدينة باي شهريًا.

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
62.3°	66.5°	73.3°	79.1°	85.5°	90.7°
يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
93.6°	93.5°	89.3°	82.0°	72.0°	64.6°

a-c. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

a. صمم مخطط تشتت للبيانات.
b. استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات باستخدام دالة كثيرة الحدود درجتها 3.
استخدم $x = 1$ لشهر يناير وفتر كل معامل إلى أقرب جزء من ألف.

c. استخدم النموذج للتنبؤ بمتوسط درجة الحرارة الكبرى ليناير القادم. افترض أن $x = 13$

$$21. f(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50x - 50$$

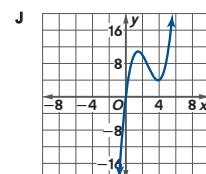
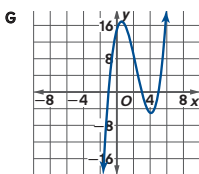
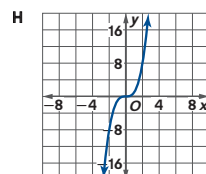
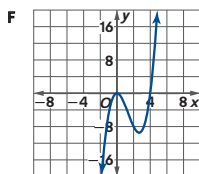
اكتب دالة كثيرة الحدود لأقل درجة ذات معاملات حقيقية بالصيغة القياسية التي تشتمل على الأعداد الموضحة.

$$20. -1, 4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$$

$$21. 5, -5, 1 - i$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 9x + 12$$

22. الاختيار من متعدد أي من الدوال التي يتم تمثيلها بيانيًا أدناه يجب أن يكون لديها أصفار تخيلية؟



اقسم باستخدام القسمة التركيبية.

$$23. f(x) = (x^3 - 7x^2 + 13) \div (x - 2) \quad \frac{x^2 - 5x - 10 - \frac{7}{x-2}}{x-2}$$

$$24. f(x) = (x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 8) \div (x + 3) \quad \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 9 + \frac{35}{x+3}}{x+3}$$

حدد أي مستقيمتان متقاربتان ونقاط تقاطع. ثم مثل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

$$25. f(x) = \frac{2x-6}{x+5}$$

$$26. f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-4}$$

25-26. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

أوجد حلًا للمتيانينات التالية.

$$27. x^2 - 5x - 14 < 0 \quad (-2, 7) \quad 28. \frac{x^2}{x-6} \geq 0 \quad \{0\} \cup (6, \infty)$$

تمرين على الاختبار

مثل كل دالة بيانيًا وحلها. وضع المجال والهدى ونقاط التقاطع 1-2. انظر السلوك الطرفي والاتصال ومواضع تزايد الدالة أو تناقصها. الهامش.

$$1. f(x) = 0.25x^{-3}$$

$$2. f(x) = 8x^{\frac{4}{3}}$$

أوجد حلًا لكل من المعادلات التالية.

$$3. x = \sqrt{4-x} - 8 \quad -5 \quad 4. \sqrt{5x+4} = \sqrt{9-x} + 7 \quad 9$$

$$5. -2 + \sqrt{3x+2} = x \quad 6. \frac{3x+2}{8\sqrt{7x^2+4}} = 54 \quad \text{لا يوجد حل}$$

$$7. x^4 - 5x^3 - 14x^2 = 0 \quad 8. x^3 - 3x^2 - 10x = -24 \quad -3, 4, 2$$

وضح السلوك الطرفي للتمثيل البياني لكل دالة كثيرة الحدود باستخدام الحدود. أشرح استدلالك باستخدام اختبار الحد الرئيس. 9-10. انظر الهامش.

$$9. f(x) = 5x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 11x - 8$$

$$10. f(x) = -3x^5 - 8x^4 + 7x^2 + 5$$

اذكر عدد الأصفار الحقيقية الممكنة ونقاط الانعطاف لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق تحليل العوامل.

3 أصفار حقيقية ونقطتان انعطاف: -5 و 0 و 3

$$11. f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 60x$$

5 أصفار حقيقية و 4 نقاط انعطاف: -2 و 0 و 2

$$12. f(x) = x^5 - 16x$$

13. الاختيار من متعدد أي من الدوال يوجد بها 3 نقاط انعطاف؟ D

$$A. f(x) = x^4 - 4 \quad C. f(x) = x^3 + 9x^2 + 20x$$

$$B. f(x) = x^4 - 11x^3 \quad D. f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

14. كرة البيسبول يتم تحديد الارتفاع h بالقدم في كرة البيسبول. بعد ضرب الكرة من قبل أحد اللاعبين. عن طريق $h(t) = -32t^2 + 128t + 4$. حيث t هي الزمن بالثواني بعد ضرب الكرة. وضع السلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة باستخدام الحدود. اشرح باستخدام اختبار الحد الرئيس. انظر الهامش.

لكل دالة، (a) طبق اختبار الحد الرئيس (b) حدد الأصفار وعدد مرات تكرار أي أصفار متكررة (c) أوجد بعض النقاط الإضافية (d) مثل الدالة بيانيًا. 15-16. انظر ملحق إجابات الوحدة 1.

$$15. f(x) = x(x-1)(x+3)$$

$$16. f(x) = x^4 - 9x^2$$

استخدم نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت التعابير ذات الحدود المقدمة هي عوامل لـ $f(x)$ أم لا. استخدم التعابير ذات الحدود التي تعد عوامل لكتابة الصيغة المحللة لـ $f(x)$.

$$17. f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15, (x+3)$$

$$18. f(x) = x^4 - x^3 - 34x^2 + 4x + 120, (x+5), (x-2)$$

$$f(x) = (x+3)(x-1)(x-5) \quad \text{نعم، نعم، نعم، نعم.}$$

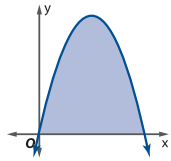
$$f(x) = (x-2)(x+5)(x-6)(x+2) \quad \text{نعم، نعم، نعم، نعم.}$$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم

المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

الهدف:

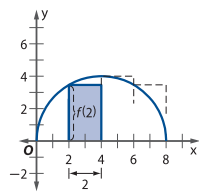
- تقريب المساحة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي x .



يُعد حساب التفاضل والتكامل أحد فروع التفاضل والتكامل الذي يركز على عمليات إيجاد المساحات والأحجام والأطوال. في الهندسة، تعلّمت كيفية حساب محيطات ومساحات وأحجام المضلعات والمجسمات والأشكال المركبة عبر الاستعانة بمعرفتك المتعلقة بالأشكال الأساسية، مثل المثلثات والأهرامات والمخاريط. يمكن إيجاد محيطات ومساحات وأحجام الأشكال والأجسام غير المنتظمة التي لا تُعد من ضمن مجموعة الأشكال الأساسية بطريقة متشابهة. يُعد حساب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x . كما هو موضح على الجانب الأيسر. من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل.

نشاط 1 تقريب المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

قرب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x}$ والمحور الأفقي x باستخدام المستطيلات.



الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات تكون بعرض وحدتين بين $f(x)$ والمحور الأفقي x . ينبغي إيجاد ارتفاع المستطيل عندما تتقاطع النقطه الطرفية عند الجانب الأيسر مع $f(x)$. كما هو موضح في الشكل. لاحظ أن ارتفاع المستطيل الأول يساوي $f(0)$ أو 0

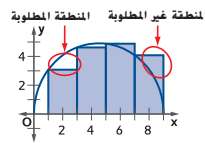
الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

الخطوة 3 قرب مساحة المنطقة باستخدام ناتج جمع مساحات المستطيلات.

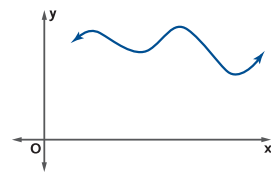
حلل النتائج

- ما التقدير التقريبي للمساحة؟ **21.86 وحدة²**
- كيف تؤثر مساحة أحد المستطيلات الواقعة خارج التمثيل البياني على التقدير التقريبي؟ **انظر الهامش.**
- احسب المساحة الفعلية لنصف الدائرة. كيف تتم مقارنة التقدير التقريبي مع المساحة الفعلية؟ **انظر الهامش.**
- كيف يمكن استخدام المستطيلات لإيجاد عملية التقدير الأكثر دقة؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

قد لا يؤدي استخدام المستطيلات الكبيرة نسبيًا في حساب المساحة الواقعة أسفل المنحنى إلى الحصول على تقدير تقريبي يتسم بالدقة مثل العدد 3 المطلوب. قد تكون قطاعات المساحة الملحوظة أسفل المنحنى غير محسوبة، وبالمثل، إذا تجاوزت المستطيلات المنحنى، فقد يتم تضمين كميات كبيرة من المساحات التي تقع أسفل أحد المنحنيات في التقريب.



بالإضافة إلى ذلك، لا تكون المناطق محاطة دائمًا بمنحنى يتقاطع مع المحور الأفقي x . لقد تناولت بالدراسة العديد من الدوال التي لها تمثيلات بيانية تتضمن سلوكيات طرفية مختلفة. لا يلزم أن تكون لهذه التمثيلات البيانية نقطتا تقاطع مع المحور الأفقي x . تسمح بوجود نقاط بداية ونهاية واضحة، في تلك الحالات، نحسب غالبًا المساحة الواقعة أسفل المنحنى للفترة الموجودة على المحور الأفقي x .



1 التركيز

الهدف تقريب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x .

نصيحة دراسية

بالنسبة إلى النشاط 1. قد ترغب في أن يستخدم الطلاب بوصلة لرسم الرسم بياني. ويكون مركز نصف الدائرة عند $(4, 0)$. ويبلغ نصف القطر 4. وتكون الرؤوس اليسرى السفلى للمستطيلات الأربعة هي $(0, 0)$ و $(2, 0)$ و $(4, 0)$ و $(6, 0)$. أما الرؤوس اليسرى العليا للمستطيلات فهي $(0, f(0))$ و $(2, f(2))$ و $(4, f(4))$ و $(6, f(6))$ وعرض كل مستطيل يساوي 2. أما الأطوال فهي $f(0)$ و $f(2)$ و $f(4)$ و $f(6)$.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

في النشاط 1، نظم الطلاب في مجموعات ثنائية بقدرات مختلفة. اطلب من الطلاب التفكير في الخطوات من 1 إلى 3 ثم الإجابة عن تحليل النتائج في التمارين من 1 إلى 4.

أسأل:

- ما قاعدة مساحة الدائرة؟ $A = \pi r^2$
- ما قاعدة مساحة نصف الدائرة؟ $A = \frac{1}{2} \pi r^2$

إجابات إضافية

- الإجابة النموذجية: تساعد المساحة الإضافية التي يتم إيجادها خارج المنحنى المضمن في المجموع في تقدير المساحة التي يتم إيجادها أسفل المنحنى غير المُضمّن.
- 25.13 وحدة 2؛ الإجابة النموذجية: تكون المساحة المقربة أصغر من المساحة الفعلية. ومع استخدام المزيد من المستطيلات، تقترب المساحة المقربة من المساحة الفعلية.
- الإجابة النموذجية: يؤدي استخدام مستطيلات ذات عرض أصغر في تقريب أكثر دقة، وتتناسب المستطيلات الأصغر حجمًا بشكل أفضل مع شكل المنحنى وتساعد في تقليل المساحات التي لا يتم تقديرها.

- الإجابة النموذجية: لا توجد مساحة إضافية فوق المنحنى المضمن في التقريب الذي يمكن أن يفسر المساحة التي تقع أسفل المنحنى غير المضمن. وبالتالي، يجب أن يكون التقريب أصغر من المساحة الفعلية

- نعم؛ الإجابة النموذجية: فيما يتعلق بهذا المثال، ينتج عن استخدام نقاط النهاية اليمنى للمستطيلات مستطيلات تتداخل مع المنحنى وتتضمن المساحة التي تقع فوق المنحنى. وينتج عن ذلك تقريب أعلى. ولكن، لا يحدث ذلك دائمًا، وإذا كان هذا المنحنى متناظرًا، كما في المثال السابق، فسوف تكون عمليات التقريب متماثلة بغض النظر عن نقطة النهاية المستخدمة.

نظم الطلاب في مجموعات ثنائية لحل النشاط 2 الخطوات من 1 إلى 4 ثم الإجابة عن تحليل النتائج في التمارين من 5 إلى 9.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمرينين 10 و 11.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم الجزء b من التمرين 11 لتقييم فهم الطلاب لكيفية تقريب المساحة بين المنحنى والمحور الأفقي x .

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه عن المساحة أسفل المنحنى. اجعلهم يذكروا وصفاً لكيفية تأثير عرض المستطيلات المستخدمة على التقريب.

توسيع المفهوم

وضح للطلاب الصيغة الرمزية للتعبير عن المساحة أسفل المنحنى $f(x)$ في الفترة من 1 إلى 5 من النشاط 2.

$$\int_1^5 (x^2 + 2) dx$$

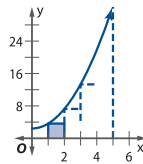
عن حرف S مطول، الذي تبدأ به كلمة "sum" (المجموع).

اطلب من الطلاب أن يضغطوا على **MATH** 9 لفتح نافذة تسمح لهم بإيجاد قيمة العدد الصحيح. وبمجرد إدخالهم للقيم $x^2 + 2$ و x و 1 و 5 ثم الضغط على **ENTER**. ستعرض نوافذهم ما يلي.

```
fnInt(X^2+2,X,1,
5)
49.33333333
```

نشاط 2 تقريب المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات

قرب المساحة بين المنحنى $f(x) = x^2 + 2$ والمحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ باستخدام المستطيلات.



الخطوة 1 ارسم 4 مستطيلات بعرض وحدة واحدة بين $f(x)$ والمحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$ كما هو موضح في الشكل. استخدم النقطة الطرفية عند الجانب الأيسر لكل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع كل مستطيل.

الخطوة 2 احسب مساحة كل مستطيل.

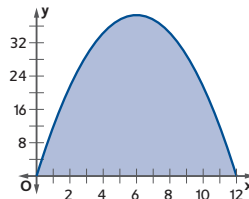
الخطوة 3 قرب مساحة المنطقة عن طريق إيجاد ناتج جمع مساحات المستطيلات.

الخطوة 4 كرر الخطوات من 1 إلى 3 باستخدام 8 مستطيلات، يساوي عرض كل منها 0.5 وحدة، و 16 مستطيلًا. يساوي عرض كل منها 0.25 وحدة.

حلل النتائج

- ما قيمة المساحة الكلية التي تقرب منها التقديرات التقريرية؟ **الإجابة النموذجية: 48 وحدة²**
- باستخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر، تقع جميع المستطيلات بالكامل أسفل المنحنى. كيف يؤثر هذا على التقدير التقريبي لمساحة المنطقة؟ **انظر الهامش.**
- هل تختلف التقديرات التقريرية إذا تم إيجاد كل ارتفاع محدد للمستطيل باستخدام النقطة النهائية له عند الجانب الأيمن؟ هل هذا حقيقي دومًا؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
- ما الذي سيحدث للتقديرات التقريرية إذا تواصلنا في زيادة عدد المستطيلات المراد استخدامها؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**
- قدم فرضية تمثل العلاقة بين المساحة الواقعة أسفل أحد المنحنيات وعدد المستطيلات المستخدمة لإيجاد التقدير التقريبي. اشرح إجابتك. **انظر الهامش.**

10a. 6 مستطيلات: 280 وحدة²; 12 مستطيلًا: 286 وحدة²;
التمثيل والتطبيق 24 مستطيلًا: 287.5 وحدة²



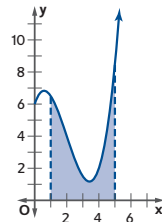
10. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور الأفقي x .

a. قرب المساحة باستخدام 6 مستطيلات و 12 مستطيلًا و 24 مستطيلًا. أوجد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.

b. ما قيمة المساحة الكلية التي تقرب منها التقديرات التقريرية؟ **الإجابة النموذجية: 288 وحدة²**

c. هل يؤدي استخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريرية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.

لا، الإجابة النموذجية: التمثيل البياني متماثل. سيؤدي استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيمن إلى الوصول إلى التقدير التقريبي نفسه عند استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيسر.



11. في هذه المسألة، ستقوم بتقريب المساحة الواقعة بين المنحنى $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ والمحور الأفقي x على الفترة $[1, 5]$.

a. قرب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أولاً ومن ثم استخدام 8 مستطيلات. أوجد ارتفاع كل مستطيل باستخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيسر.

4 مستطيلات: 14 وحدة²; 8 مستطيلات: 13.75 الوحدات²

b. هل يكون ناتج حساب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات مساوياً لتقديرات تقريرية كافية؟ اشرح استنتاجك.

c. هل يؤدي استخدام نقاط طرفية الموجودة عند الجانب الأيمن والمقابلة للنقاط النهائية الموجودة عند الجانب الأيسر لارتفاعات المستطيلات إلى وجود تقديرات تقريرية مختلفة؟ اشرح استنتاجك.

نصيحة دراسية

نقاط طرفية قد تستخدم أي نقطة داخل فترة فرعية لإيجاد ارتفاع المستطيلات المستخدمة لتقريب المساحة. النقاط المستخدمة بشكل أكثر هي نقاط طرفية عند الجانب الأيسر والنقاط الطرفية عند الجانب الأيمن والنقاط الموجودة في المنتصف.

11b. الإجابة النموذجية:

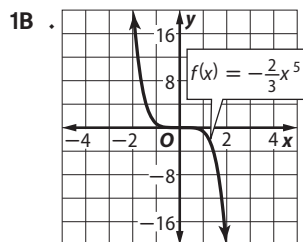
ليس من المحتمل أن يؤدي تقريب المساحة باستخدام 4 مستطيلات أو 8 مستطيلات إلى تمثيل جيد للمساحة الفعلية. تمنع طبيعة المنحنى المستطيلات التي يساوي عرضها وحدة واحدة و 0.5 وحدة من التوافق بشكل مناسب أسفلها.

11c. نعم: الإجابة النموذجية: التمثيل البياني غير متماثل. سيؤدي استخدام نقاط طرفية عند الجانب الأيمن في إيجاد ارتفاع المستطيلات إلى إنشاء مستطيلات مختلفة ذات مساحات مختلفة.

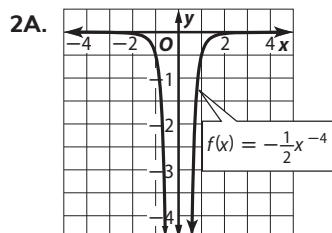
إجابات إضافية

- 8.** الإجابة النموذجية: ينبغي أن يكون كل تقريب تم العثور عليه باستخدام المزيد من المستطيلات تمثيلاً أفضل للمساحة الفعلية. ستمأل المستطيلات الأصغر المنطقة المنحنية بشكل أفضل وتساعد على ضمان دخول معظم المساحة أسفل المنحنى في التقريب.
- 9.** الإجابة النموذجية: كلما زاد عدد المستطيلات المستخدمة، كان تقريب المساحة أفضل. تتناسب المستطيلات الأصغر حجماً مع المنطقة المطلوبة بشكل أفضل من المستطيلات كبيرة الحجم، وبالتالي ينتج عنها عمليات تقريب أكثر دقة.

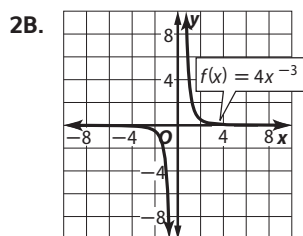
الصفحة 85، الاستعداد للوحدة 1



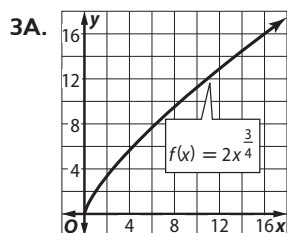
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, \infty)$



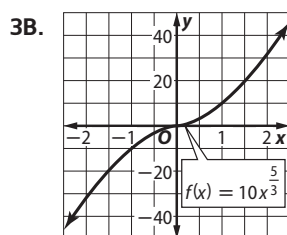
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) R = (-\infty, 0)$
 لا توجد نقاط تقاطع
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ متصلة
 لا نهائي عند $x = 0$
 التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



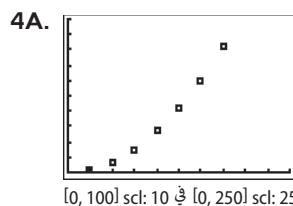
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty),$
 $R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 توجد نقاط تقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $f(x) = 0$
 انفصال لا نهائي عند $x = 0$
 التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



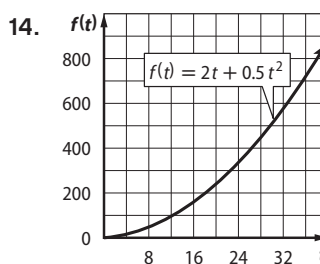
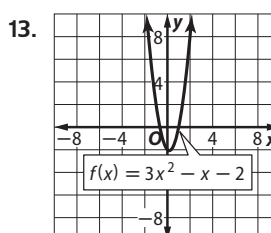
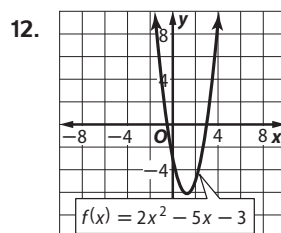
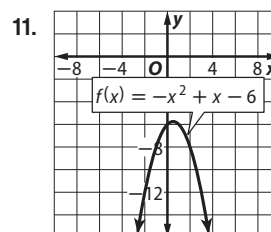
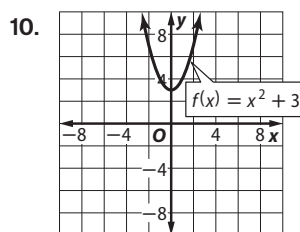
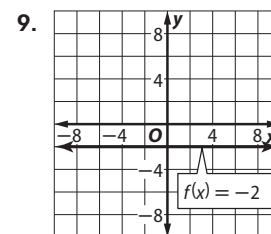
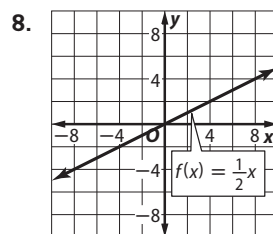
$D = [0, \infty), R = [0, \infty);$
 نقطة التقاطع: 0
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متصلة عند $(0, \infty)$
 التزايد: $(0, \infty)$



$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: التزايد: $(-\infty, \infty)$

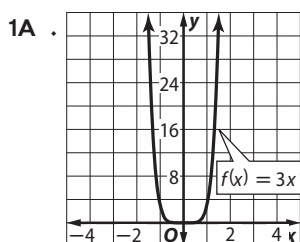


[0, 100] scl: 10 في [0, 250] scl: 25



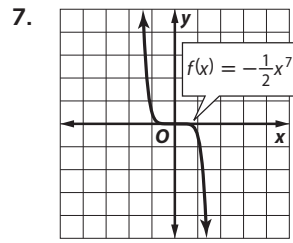
15. $\{x \mid x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}; (-\infty, 6]$
16. $\{x \mid -2 \leq x, x \in \mathbb{Z}\}$
17. $\{x \mid -2 < x < 9, x \in \mathbb{R}\}; (-2, 9)$
18. $\{x \mid 1 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}; (1, 4]$
19. $\{x \mid x < -4 \text{ or } x > 5, x \in \mathbb{R}\}; (-\infty, -4) \cup (5, \infty)$
20. $\{x \mid x < -1 \text{ أو } x \geq 7, x \in \mathbb{R}\}; (-\infty, -1) \cup [7, \infty)$

الصفحات من 87 إلى 89، الدرس 1-1 (تبرين موجه)

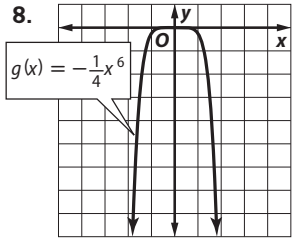


$D = (-\infty, \infty), R = [0, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ التزايد: $(0, \infty)$

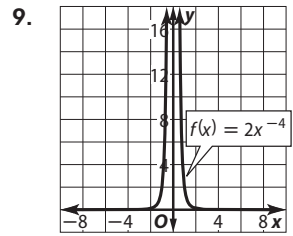
الصفحات من 92 إلى 95، الدرس 1-1



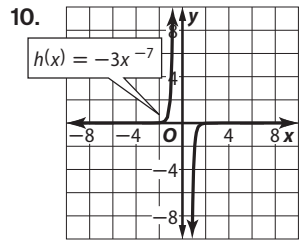
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, \infty)$



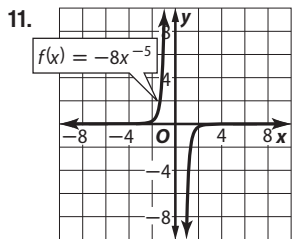
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, 0]$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التزايد: $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$



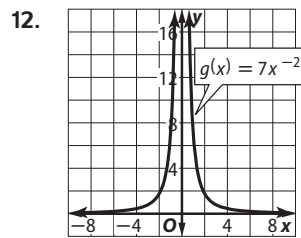
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (0, \infty)$
 لا توجد نقاط تقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انفصال
 لانهائي عند $x = 0$: التزايد: $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$



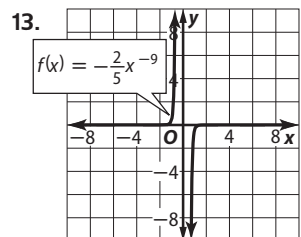
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 لا توجد نقاط تقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انفصال
 لانهائي عند $x = 0$: التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



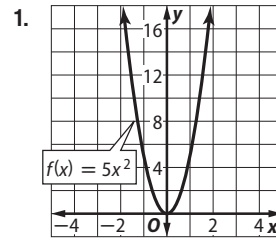
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 نقاط تقاطع: لا توجد
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انفصال
 لانهائي عند $x = 0$: التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



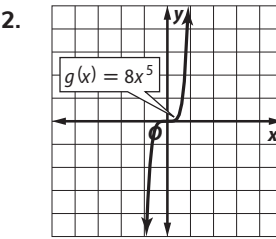
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (0, \infty)$
 لا توجد نقاط تقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انفصال
 لانهائي عند $x = 0$: التزايد: $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$



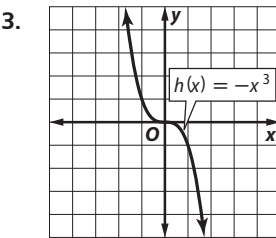
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
 توجد نقاط تقاطع: لا توجد
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انفصال
 لانهائي عند $x = 0$: التزايد: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$



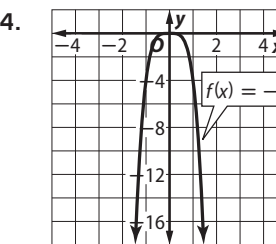
$D = (-\infty, \infty), R = [0, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, 0)$; التزايد: $(0, \infty)$



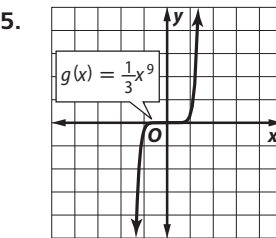
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التزايد: $(-\infty, \infty)$



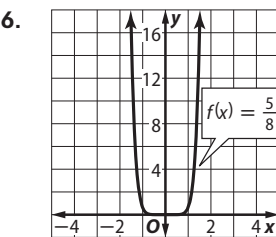
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, \infty)$



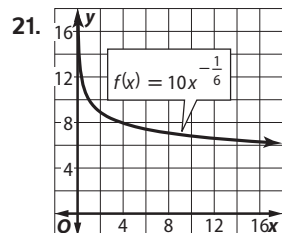
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, 0]$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التزايد: $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$



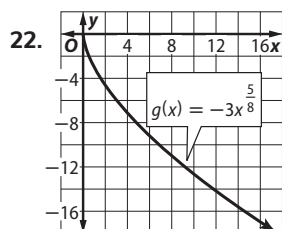
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التزايد: $(-\infty, \infty)$



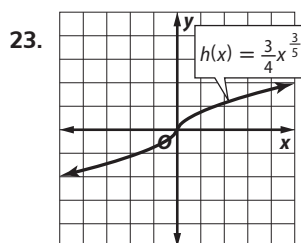
$D = (-\infty, \infty), R = [0, \infty)$
 نقطة التقاطع: 0 ;
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية:
 التناقص: $(-\infty, 0)$; التزايد: $(0, \infty)$



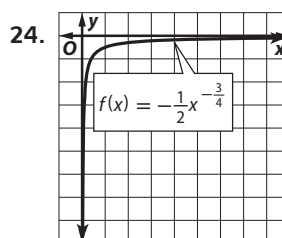
$D = (0, \infty), R = (0, \infty)$
لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
متصلة عند $x = 0$: $(0, \infty)$ التناقص:



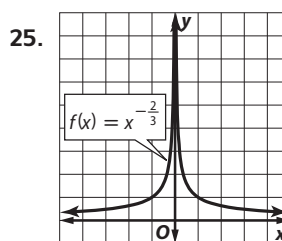
$D = [0, \infty), R = (-\infty, 0]$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
متصلة عند $x = 0$: $(0, \infty)$ التناقص:



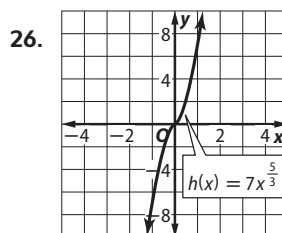
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: $(-\infty, \infty)$ التزايد:



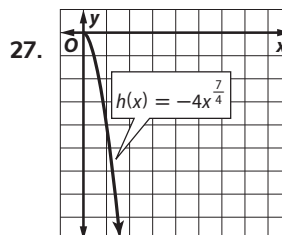
$D = (0, \infty), R = (-\infty, 0)$
لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
متصلة عند $x = 0$: $(0, \infty)$ التزايد:



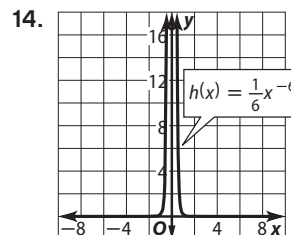
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (0, \infty)$
لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
انفصال لانهائي عند $x = 0$: $(-\infty, 0)$ التزايد: $(0, \infty)$ التناقص:



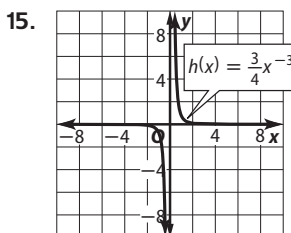
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: $(-\infty, \infty)$ التزايد:



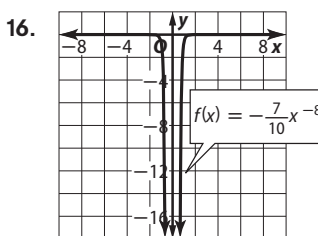
$D = [0, \infty), R = (-\infty, 0]$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
متصلة عند $x = 0$: $(0, \infty)$ التناقص:



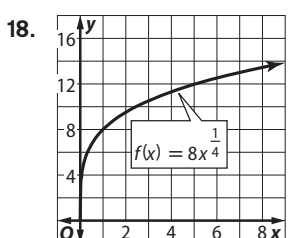
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (0, \infty)$
لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
انفصال لانهائي عند $x = 0$: $(-\infty, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التناقص:



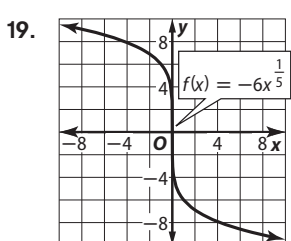
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
انفصال لانهائي عند $x = 0$: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ التناقص:



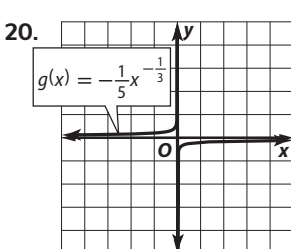
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0)$
نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
انفصال لانهائي عند $x = 0$: $(-\infty, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التزايد:



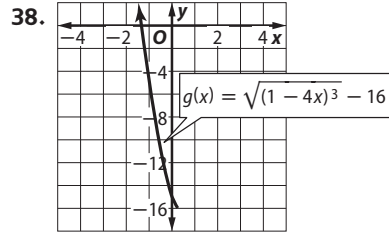
$D = [0, \infty), R = [0, \infty)$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
متصلة عند $x = 0$: $(0, \infty)$ التزايد:



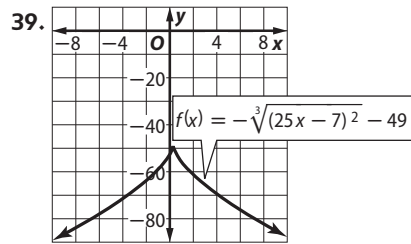
$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: $(-\infty, \infty)$ التناقص:



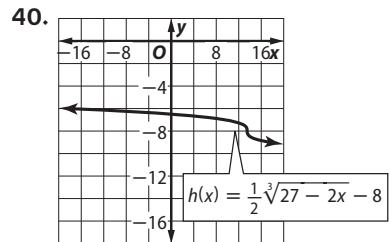
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
انفصال لانهائي عند $x = 0$: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ التزايد:



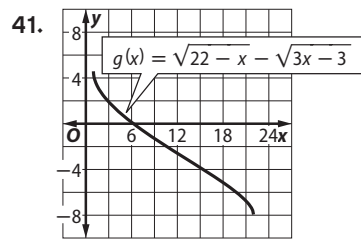
$D = (-\infty, 0.25]$,
 $R = [-16, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : -1.34
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -15
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 متصلة عند $[-52.0, -\infty)$
 التناقص: $(52.0, -\infty)$



$D = (-\infty, \infty)$,
 $R = [00.94, -\infty) =$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -52.66
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 $= -\infty$: متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: التزايد: $(-\infty, 0.28)$
 التناقص: $(0.28, \infty)$

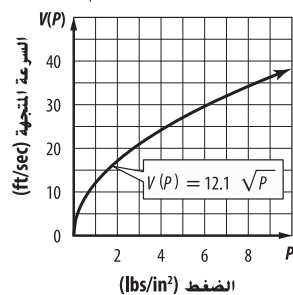


$D = (-\infty, \infty)$,
 $R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : -2,034.5
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -6.5
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: التناقص: $(-\infty, \infty)$

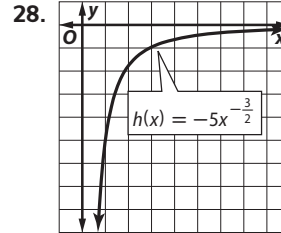


$D = [1, 22]$,
 $R = [-\sqrt{63}, \sqrt{21}]$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 6.25
 متصلة عند $[1, 22]$
 التناقص: $(1, 22)$

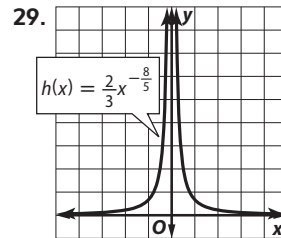
42a. السرعة المتجهة للمياه باستخدام الفوهة



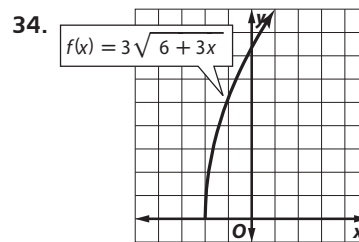
42b. $D = [0, \infty)$, $R = [0, \infty)$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 $(0, \infty)$; التزايد: $[0, \infty)$



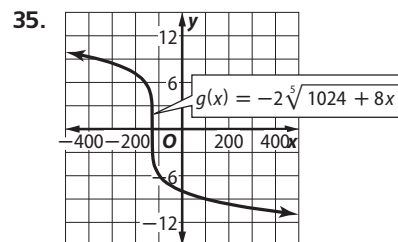
$D = (0, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$
 لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 $= 0$: متصلة عند $(0, \infty)$
 التزايد: $(0, \infty)$



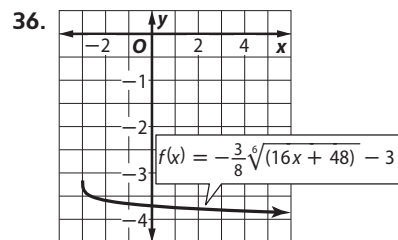
$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
 $R = (0, \infty)$; لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$: انفصال
 لا نهائي عند $x = 0$: التزايد: $(0, \infty)$
 التناقص: $(-\infty, 0)$



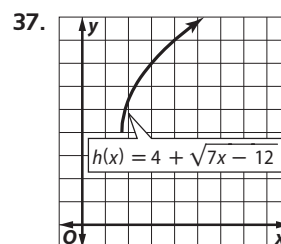
$D = [-2, \infty)$, $R = [0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : -2
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : $3\sqrt{6}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 متصلة عند $[-2, \infty)$
 التزايد: $(\infty, -2)$



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : -128
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -8
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 متصلة لجميع الأرقام الحقيقية: التناقص: $(-\infty, \infty)$

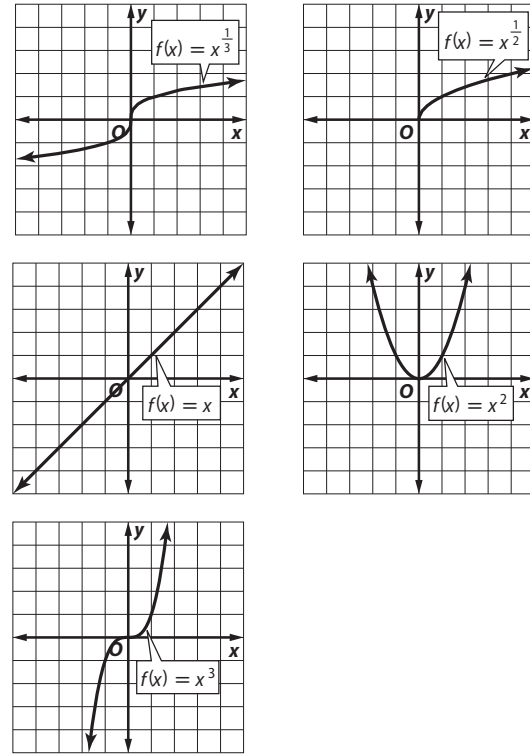


$D = [-3, \infty)$,
 $R = (-\infty, -3]$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -3
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3.71$
 $= -\infty$: متصلة عند $[-3, -3]$
 التناقص: $(\infty, -3)$



$D = [12/7, \infty)$, $R = [4, \infty)$
 لا توجد نقاط تقاطع: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 $= [12/7, \infty)$: متصلة عند $[12/7, \infty)$
 التزايد: $(12/7, \infty)$

80a. الإجابات النموذجية المعطاة.

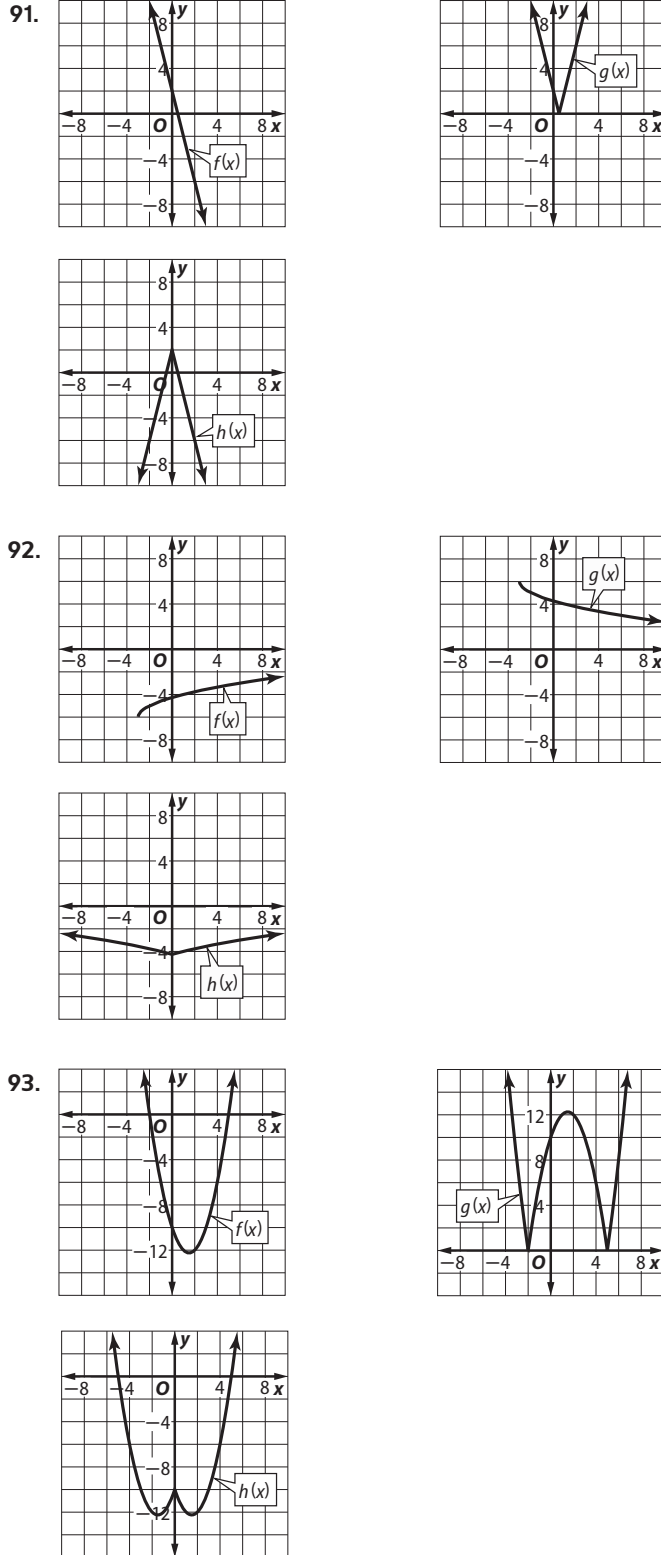


80c. الإجابة النموذجية: إذا كان $0 < n < 1$ فإن متوسط معدل تغير الدالة يتناقص مع اقتراب x من اللانهاية. إذا كان $n = 1$ فإن متوسط معدل تغير الدالة يكون ثابتاً مع اقتراب x من اللانهاية. إذا كان $n > 1$ فإن متوسط معدل تغير الدالة يزداد مع اقتراب x من اللانهاية.

$$\begin{aligned}
 81. \sqrt[3]{\frac{8^n \times 2^7}{4^{-n}}} &= \sqrt[3]{\frac{(2^3)^n \times 2^7}{(2^2)^{-n}}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{2^{3n} \times 2^7}{2^{-2n}}} \\
 &= \sqrt[3]{2^{(3n+7)-(-2n)}} \\
 &= \sqrt[3]{2^{5n+7}} \\
 &= \sqrt[3]{2^{4n+6} \times 2^{n+1}} \\
 &= \sqrt[3]{2^{4n+6}} \times \sqrt[3]{2^{n+1}} \\
 &= 2^{2n+3} \sqrt[3]{2^{n+1}}
 \end{aligned}$$

82d. الإجابة النموذجية: إذا كان الأس أصغر من صفر، تكون القوة الأسية أكبر من 0 وأصغر من 1. وإذا كان الأس أكبر من صفر، وأصغر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من 1 وأصغر من الأساس. إذا كان الأس أكبر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من الأساس. أي عدد غير صفري إلى القوة الأسية الصفرية يساوي 1. لذا، إذا كان الأس أصغر من 0، تكون القوة الأسية أصغر من 1. ولا تكون القوة الأسية للعدد الموجب سالبة أبداً. لذلك تكون القوة الأسية أكبر من 0. أي عدد غير صفري إلى القوة الأسية الصفرية يساوي 1 وإلى القوة الأسية الأولى يكون هو ذاته. إذاً، إذا كان الأس أكبر من صفر، وأصغر من 1، فإن القوة الأسية تكون بين 1 والأساس. وأي عدد إلى القوة الأسية الأولى يساوي ذاته. إذن، إذا كان الأس أكبر من 1، تكون القوة الأسية أكبر من الأساس.

85. الإجابة النموذجية: بها أن n يزداد، فإن قيمة $\frac{1}{n}$ تقترب من 0. وهذا يعني أن قيمة x^n ستقترب من 1 إذا كانت قيمة x موجبة و -1 إذا كانت قيمة x سالبة. ولذلك، بالنسبة للقيم الموجبة لـ x ، ستقترب $f(x)$ من 1 + 5 أو 6 وستكون مشابهة للخط $y = 6$ أما بالنسبة للقيم السالبة للمحور x ، ستقترب $f(x)$ من -1 + 5 أو 4 وستكون مشابهة للخط $y = 4$.



3. الإجابة النموذجية:

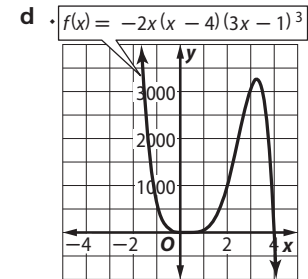
السلوك الطرفي	درجة كثيرة الحدود	المعامل الرئيسي
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	فردية	سالب
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	زوجية وغير صفرية	سالب
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	فردية	موجب
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	زوجية وغير صفرية	موجب

صفحة 102، الدرس 2-1 (تعزيز موجه)

6A. a. الدرجة تساوي 5، والمعامل الرئيسي يساوي 54-. إذا فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

b. الأصفار الحقيقية المميزة هي $x = 0$ و $x = 4$ و $x = \frac{1}{3}$ الصفر الموجود في $x = \frac{1}{3}$ يشتمل على مضاعفة 3.

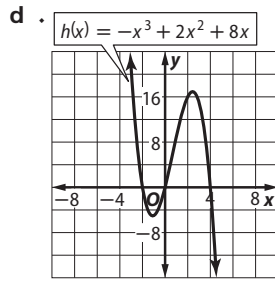
الفترة	قيمة x	f(x)	(x, f(x))
($\infty, 0$)	-1	$f(-1) = 640$	(-1, 640)
(0, $\frac{1}{3}$)	$\frac{1}{4}$	$f(\frac{1}{4}) \approx -0.03$	($\frac{1}{4}$, -0.03)
($\frac{1}{3}$, 4)	1	$f(1) = 48$	(1, 48)
(4, $-\infty$)	5	$f(5) = -27,440$	(5, -27,440)



6B. a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي -1. إذا فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

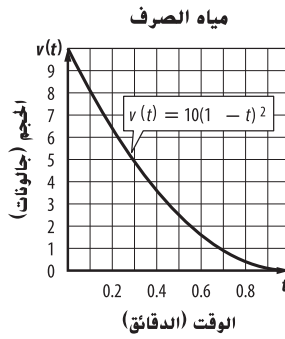
b. الأصفار الحقيقية المميزة هي $x = -2$ و $x = 0$ و $x = 4$ لا توجد مضاعفة.

الفترة	قيمة x	f(x)	(x, f(x))
($\infty, -2$)	-4	$f(-4) = 64$	(-4, 64)
(-2, 0)	-1	$f(-1) = -5$	(-1, -5)
(0, 4)	2	$f(2) = 16$	(2, 16)
(4, $-\infty$)	10	$f(10) = -720$	(10, -720)



الصفحات من 104 إلى 106، الدرس 2-1

11.



12. الدرجة تساوي 7 والمعامل الرئيسي يساوي 5-. حيث إن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

13. الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي 2. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

14. الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي 7 ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

15. الدرجة تساوي 6 والمعامل الرئيسي يساوي 6-. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

16. الدرجة تساوي 3 والمعامل الرئيسي يساوي 4-. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

17. الدرجة تساوي 5 والمعامل الرئيسي يساوي 2-. لأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

18. الدرجة تساوي 3 والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

19. الدرجة تساوي 4 والمعامل الرئيسي يساوي 2-. ولأن الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



35b. $-3, 0$ (مضاعفة: 2), 5

35d.

3, (2 مضاعفة) 0, -5 .36b

36d.

37b. 0, 3, -2 (مضاعفة: 3)

37d.

[0, 5] scl: 1 في [6000, 14000] scl: 1000

33b. $0, -4, 1$ (مضاعفة: 2)

.33d

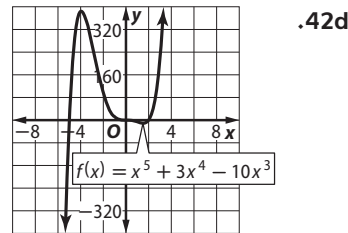
34b. 0 (مضاعفة: 2) $-2, 4$

73G | الوحدة 1 | ملحق الاجابات

42a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

42b. 0 (مضاعفة: 3)، 2-، 5

42c. الإجابة النموذجية: (3, 216)، (1, -6)، (-3, 270)، (-6, -1,728)



44. الإجابة النموذجية: $f(x) = -1.25x + 5$

45. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.09x^3 - 2.70x^2 + 24.63x - 65.21$

46. الإجابة النموذجية: $f(x) = 0.88x^4 + 0.89x^3 - 1.71x^2 - 2.99x + 4.89$

47. الإجابة النموذجية: $-f(x) = 4.05x^4 - 0.09x^3 + 6.69x^2 - 222.03x + 2,697.74$

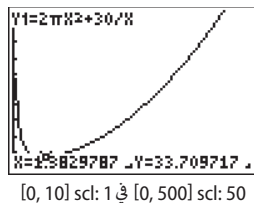
49a. وفقًا للبيانات، تزيد القيم عندما يزيد x ، لذلك، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

49b. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = 0.146x^4 - 3.526x^3 + 32.406x^2 - 63.374x + 473.255$
الخط ليس ملائمًا بشكل جيد. هناك الكثير من النقاط البعيدة عن المركز.

49c. المعامل الرئيسي يساوي 0.146. لذلك فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ الإجابة النموذجية: كان التنبؤ دقيقًا لأن المعامل الرئيسي موجب، حيث $f(x) \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$.

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{30}{r} \quad .68b$$

68c. حوالي 33.7 in^2



69. $f(x) = x^3 - 8x^2 - 3x + 90$

70. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 24x - 64$

71. $f(x) = x^5 - 9x^4 + 23x^3 - 3x^2 - 36x$

72. $f(x) = x^5 - 4x^4 - 19x^3 + 46x^2 - 24x$

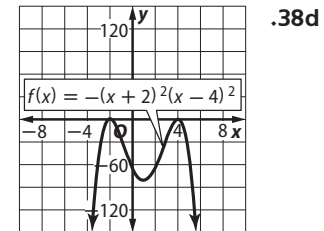
73. $f(x) = 12x^4 + 83x^3 + 131x^2 - 54x - 72$

74. $f(x) = 6x^5 - 23x^4 - 39x^3 + 15x^2 + 25x$

38a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي -1. ولأن
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

38b. -2 (مضاعفة: 2)، 4 (مضاعفة: 2)

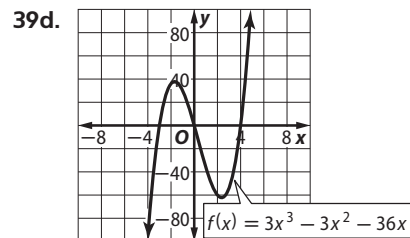
38c. الإجابة النموذجية: (5, -49)، (-1, -25)، (-3, -49)



39a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي 3. ولأن
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

39b. 0, 4, -3

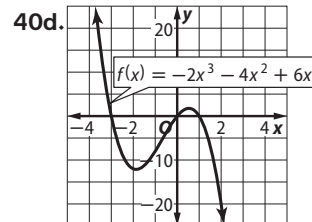
39c. الإجابة النموذجية: (5, 120)، (2, -60)، (-2, 36)، (-4, -96)



40a. الدرجة تساوي 3، والمعامل الرئيسي يساوي -2. ولأن
الدرجة فردية والمعامل الرئيسي سالب، فإن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

40b. 0, 1, -3

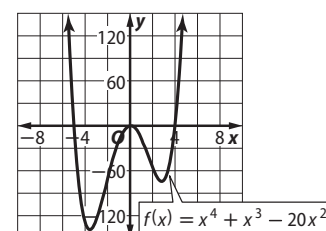
40c. الإجابة النموذجية: (2, -20)، (0.5, 1.75)، (-2, -12)، (-4, 40)

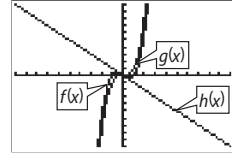


41a. الدرجة تساوي 4، والمعامل الرئيسي يساوي 1. ولأن
الدرجة زوجية والمعامل الرئيسي موجب، فإن
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

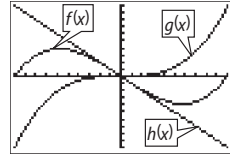
41b. 0 (مضاعفة: 5)، 4، -2

41c. الإجابة النموذجية: (5, 250)، (2, -56)، (-2, -72)، (-6, 360)

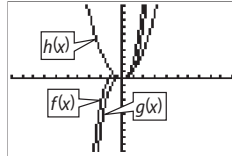




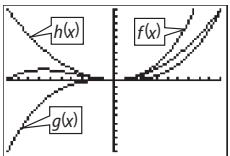
$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1



$[-1, 1]$ scl: 0.1 في $[-1, 1]$ scl: 0.1



$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1



$[-1, 1]$ scl: 0.1 في $[-1, 1]$ scl: 0.1

89b. الإجابة النموذجية: قريب جدًا من الأصل، تقرب الدالة سلوك الحد ذي الدرجة الأدنى أو $h(x)$.

89c. الإجابة النموذجية: بما أن $x \rightarrow \infty$ و $x \rightarrow -\infty$ ، فإن الدالة تقرب سلوك الحد ذي الدرجة الأعلى، أو $g(x)$.

89d. الإجابة النموذجية: بما أن $x \rightarrow \infty$ و $x \rightarrow -\infty$ ، فإن الدالة تقرب سلوك الدالة a وقريبًا جدًا من الأصل، تقرب الدالة سلوك الدالة b .

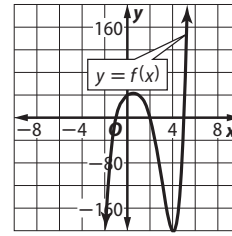
90. مادلين: الإجابة النموذجية: تفيد البيانات أن هناك نقطتي انعطاف. ولذلك، تعد الدالة التكعيبية تمثيلًا أفضل من الدالة التربيعية. وعند إدخال الجدول في حاسبة تمثيل بياني أيضًا، فإن $r^2 = 0.99$ للدالة التكعيبية و $r^2 = 0.75$ للدالة التربيعية. تدعم هذه الدالة نموذج مادلين.

91. الإجابة النموذجية: لا، لا يمكن أن تشتمل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على كل من حد أقصى مطلق وحد أدنى مطلق لأن $x \rightarrow \infty$ ، $f(x) \rightarrow \infty$ ستقترب إما من ∞ أو $-\infty$. إذا كان $f(x) \rightarrow \infty$ لأن $x \rightarrow \infty$ ، فحينها تكون القيمة العظمى المطلقة غير ممكنة. إذا كان $f(x) \rightarrow -\infty$ لأن $x \rightarrow \infty$ ، فحينها تكون القيمة الصغرى المطلقة غير ممكنة.

92. الإجابة النموذجية: لا تشتمل الدالة $f(x) = 0$ على درجة لعدم وجود أي حدود لكثيرة الحدود. تشتمل الدالة $g(x) = 0$ على درجة تساوي 0 لأن $c = cx^0$ لجميع x .

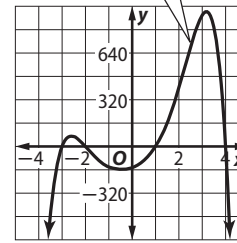
93. ينتج عن إعادة ترتيب الحدود $f(x) = x^3 - x^2 - 12x + 60$ لاحظ كيف تشتمل المجموعة الأولى من الحدود الثلاثة على العامل المشترك x وتشتمل المجموعة الثانية للحدود الثلاثة على العامل المشترك 5. بعد تحليل العوامل باستخدام خاصية التوزيع، فإن $f(x) = x(x^2 - x - 12) + 5(x^2 - x - 12)$ لاحظ الآن مدى تطابق العوامل داخل الأقواس. باستخدام خاصية التبديل، فإن $f(x) = (x + 5)(x^2 - x - 12)$ بعد تحليل العامل الثاني، يكون $f(x) = (x + 5)(x - 4)(x + 3)$ تم تحليل الدالة الآن تمامًا وأصفار الدالة هي -5 و 4 و -3 تم تحديد ذلك من خلال ضبط كل عامل ليساوي صفرًا وإيجاد قيمة x .

94. الإجابة النموذجية: هذا ممكن لأنه يمكن ضغط أحد التمثيلات البيانية بشكل أكبر من الآخر. على سبيل المثال، $g(x) = 5a(x - 1)(x + 4)(x - 5)$ و $f(x) = a(x - 1)(x + 4)(x - 5)$ تشتمل على نفس الأصفار والدرجة والسلوك الطرقي، بافتراض أن $a > 0$. سيكون التمثيل البياني لـ $g(x)$ أكثر امتدادًا بسبب عامل 5.

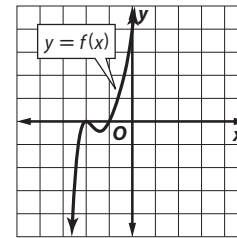


76. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = (x - 2)(x - 5)$
 $\times (x + 1)(x^2 + 4)$

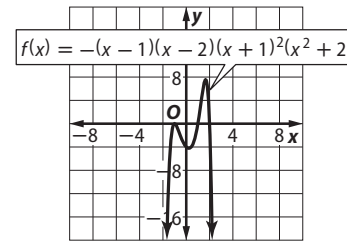
$$f(x) = -(x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 1)(x^2 + 6)$$



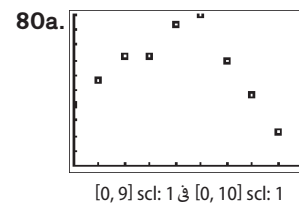
77. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = -(x + 2)$
 $\times (x + 3)(x - 4)$
 $\times (x - 1)(x^2 + 6)$



78. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = (x + 1) \times$
 $(x + 2)^2(x^2 + 1)$



79. الإجابة النموذجية:
 $f(x) = -(x - 1) \times$
 $(x - 2)(x + 1)^2 \times$
 $(x^2 + 2)$

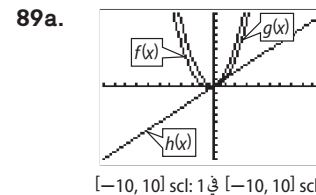


$[0, 10]$ scl: 1 في $[0, 10]$ scl: 1

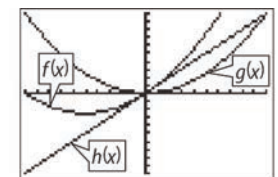
80a. $f(x) = -0.009x^3 - 0.230x^2 + 2.305x + 3.796$

80c. $f(x) = 0.012x^4 - 0.225x^3 + 0.978x^2 + 0.152x + 4.312$

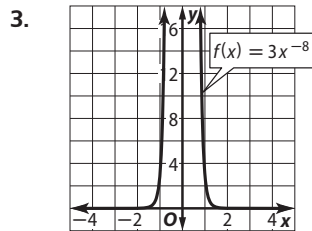
80d. الإجابة النموذجية: وفقًا لمعاملات الارتباط الخاصة بكل نموذج، فإن $r^2 = 0.94$ للدالة التكعيبية و $r^2 = 0.96$ للدالة الرباعية. وبالتالي، تعد الدالة الرباعية نموذجًا أفضل.



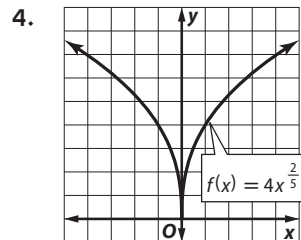
$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1



$[-1, 1]$ scl: 0.1 by $[-1, 1]$ scl: 0.1



$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
 $R = (0, \infty)$; لا توجد نقاط
 تقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ انقصال
 لا نهائي عند $x = 0$: التزايد:
 $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متصلة لجميع
 الأرقام الحقيقية: التناقص: $(-\infty, 0)$;
 التزايد: $(0, \infty)$

الصفحات 127-128، الدرس 5-1

42a. $g(x) = (x - 4)(x - 3)(x + 2)^2$

42b. $g(x) = (x - 4)(x - 3)(x + 2)^2$

42c. 4, 3, -2 (مضاعفة: 2)

43a. $g(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5})$

43b. $g(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 3 + \sqrt{5})(x - 3 - \sqrt{5})$

43c. -2, -1, $3 - \sqrt{5}$, $3 + \sqrt{5}$

44a. $h(x) = (x^2 + 9)(x - 4)(x + 6)$

44b. $h(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x - 4)(x + 6)$

44c. $3i$, $-3i$, 4, -6

45a. $f(x) = (x^2 - 4x + 13)(4x - 3)(x - 4)$

45b. $f(x) = (4x - 3)(x - 4)(x - 2 + 3i)(x - 2 - 3i)$

45c. $\frac{3}{4}$, 4, $2 - 3i$, $2 + 3i$

46a. $f(x) = (4x + 5)(x + 3)(x^2 - 8x + 41)$

46b. $f(x) = (4x + 5)(x + 3)(x - 4 + 5i)(x - 4 - 5i)$

46c. $-\frac{5}{4}$, -3, $4 + 5i$, $4 - 5i$

47a. $h(x) = (x + 3)(x - 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

47b. $h(x) = (x + 3)(x - 5)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

47c. -3, 5, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

48a. $g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 36)$

48b. $g(x) = (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + 6i)(x - 6i)$

48c. $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $6i$, $-6i$

49. 3, -4, $\frac{1}{2}$, $3i$, $-3i$; $h(x) = (x - 3)(x + 4)(2x - 1)(x + 3i)(x - 3i)$

50. -5, 6, $\frac{2}{3}$, $5i$, $-5i$; $h(x) = (x + 5)(x - 6)(3x - 2)(x + 5i)(x - 5i)$

73J



95. الإجابة النموذجية: توجد نقطة انعطاف واحدة عند القيمة العظمى المطلقة، وواحدة عند القيمة الصغرى النسبية وواحدة عند الحد الأقصى النسبي. لذلك، فإن درجة الحد الأدنى تساوي 1 أو 3 أو 4.

96. الإجابة النموذجية: ارسم مخطط انتشار (تمثيلاً بيانياً بالنقاط المبعثرة) للبيانات. استخدم مخطط التشتت لتحديد الدرجة التي تتشابه عندها كثيرة الحدود بشكل أكبر مع البيانات. أوجد معادلة الانحدار لكثيرة الحدود وقارن القيمة المطلقة لمعامل الارتباط الخاص بها بالرقم 1. مثل هذه المعادلة بيانياً على نفس شاشة مخطط الانتشار للتأكد من تشابهها. إذا كان النموذج لا يتناسب مع البيانات أو كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط غير قريبة من 1، فيمكن إيجاد معاملات الارتباط لكثيرات الحدود الأخرى لمعرفة ما إذا هناك نموذج أكثر ملاءمة.

104. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مزاحاً 4 وحدات لليمين و 3 وحدات لأعلى: $g(x) = (x - 4)^2 + 3$.

105. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ منعكساً في المحور الأفقي x ومزاحاً وحدتين لليسار و 4 وحدات لأسفل: $g(x) = -(x + 2)^2 - 4$.

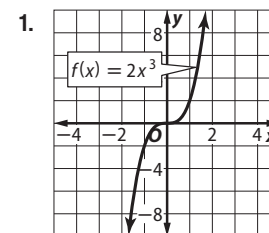
106. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مزاحاً 6 وحدات لليمين و 4 وحدات لأسفل: $g(x) = (x - 6)^2 - 4$.

الصفحة 116، الدرس 4-1

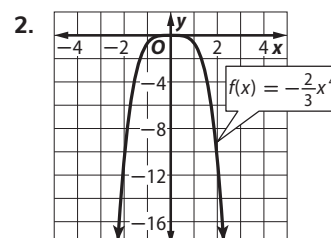
62. الإجابة النموذجية: سوف أستخدم حاسبة التمثيلات البيانية لتمثيل كثيرة الحدود وتحديد الأصفار الثلاثة الصحيحة a و b و c . بعد ذلك، سوف أستخدم القسمة التركيبية لقسمة كثيرات الحدود على a . وسأقسم بعد ذلك كثيرة الحدود المنخفضة الناتجة على b . ثم كثيرة الحدود المنخفضة الجديدة على c . ستشتمل كثيرة الحدود المنخفضة الثالثة على الدرجة 2. وفي النهاية، سأحلل كثيرة الحدود من الدرجة الثانية إلى عوامل لإيجاد الصفرين النسبيين غير الصحيحين d و e . لذلك، تكون كثيرة الحدود إما ناتجاً لـ $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$ أو هذا الناتج مضروباً في عدد نسبي.

68. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام كل من القسمة المطولة والقسمة التركيبية لقسمة كثيرة حدود على عامل خطي. ويمكن استخدام القسمة المطولة أيضاً لقسمة كثيرة حدود على عامل غير خطي. في القسمة التركيبية، تُستخدم المعاملات فقط. وفي كل من القسمة المطولة والقسمة التركيبية، تكون العناصر الناتجة مطلوبة إذا كانت القوة الأسية لأحد المتغيرات مفقودة.

الصفحة 118، اختبار منتصف الوحدة



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متصلة لجميع
 الأرقام الحقيقية: التزايد: $(-\infty, \infty)$



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0]$
 نقطة التقاطع:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متصلة لجميع
 الأرقام الحقيقية: التزايد:
 $(-\infty, 0)$; التناقص: $(0, \infty)$

-
- $g(x) = \frac{(2x+3)(x-6)}{(x+2)(x-1)}$

-

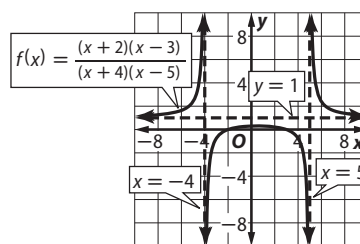
-

-
- $g(x) = \frac{(x+2)(x+5)}{(x+5)^2(x-6)}$
- $y = 0$
- $x = -5$
- $x = 6$

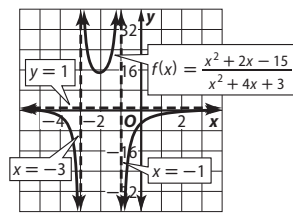
-

-

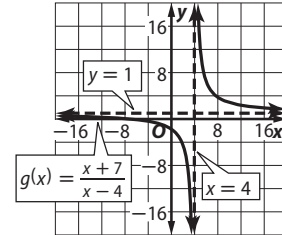
- vi.
- $i, -i, \frac{3}{4}, 2$

 $\neq -4, 5, x \in \mathbb{R}\}$ 

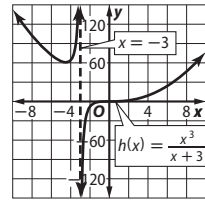
22. خطوط المقاربة: $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x : 3, -5
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq -3, -1, x \in \mathbb{R}\}$



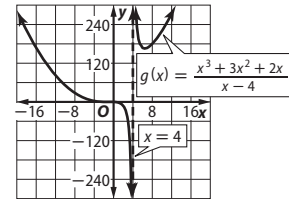
23. خطوط المقاربة: $x = 4$, $y = 1$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 7
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $-\frac{7}{4}$
 $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$



24. مستقيم المقاربة: $x = -3$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 0
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$

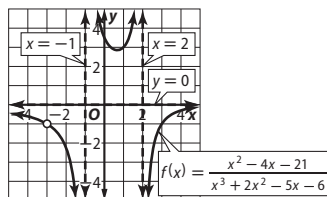


25. مستقيم المقاربة: $x = 4$
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x : -2, 0
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq 4, x \in \mathbb{R}\}$

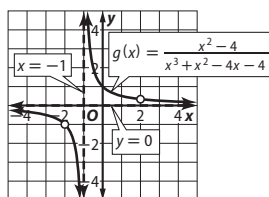


26. خطوط المقاربة: $x = -1$, $x = 2$; $y = 0$; الفجوة:

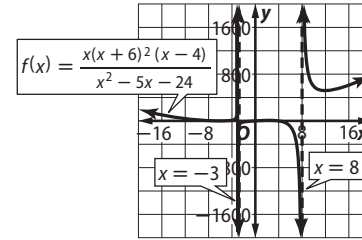
$(-1, -3)$ ؛ نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 7؛ نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq -3, -1, 2, x \in \mathbb{R}\}$



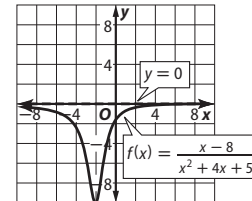
- خطوط المقاربة: $x = -1$, $y = 0$
الفجوة: $(-1, -3)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 1
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq -2, -1, 2, x \in \mathbb{R}\}$



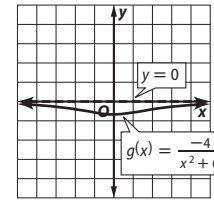
16. خطوط المقاربة: $x = -3$, $x = 8$
نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x : 6, 0
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $D = \{x \mid x \neq -3, 8, x \in \mathbb{R}\}$



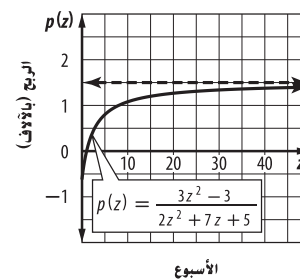
17. مستقيم المقاربة: $y = 0$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 8
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $-\frac{8}{5}$
 $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



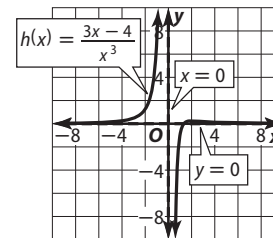
18. مستقيم المقاربة: $y = 0$
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $-\frac{2}{3}$
 $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$



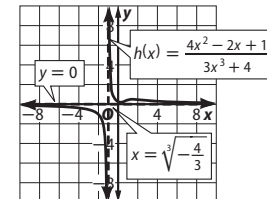
- 19c. غسيل السيارات



20. خطوط المقاربة: $x = 0$, $y = 0$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : $\frac{4}{3}$
 $D = \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$



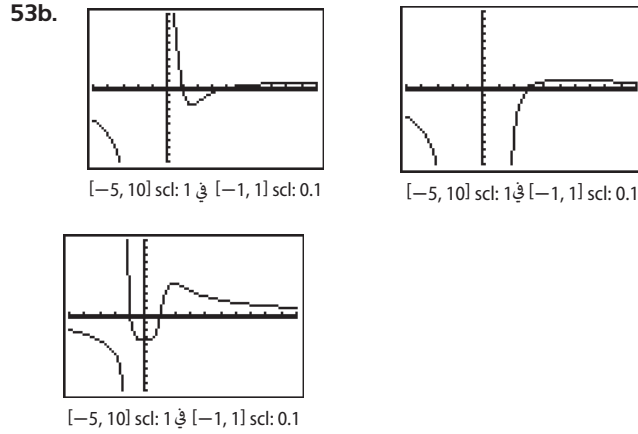
21. خطوط المقاربة: $x = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}$, $y = 0$
نقطة التقاطع مع المحور الرأس y : $\frac{1}{4}$
 $D = \{x \mid x \neq \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}, x \in \mathbb{R}\}$



52b المجال ذو الصلة: الأرقام الحقيقية a مثل $0 \leq a \leq 90$:
الخط المقارب الأفقي: $y = 0.6$

52c الإجابة النموذجية: لأن الخزان به 10 لترات من المحلول بالفعل ويسع إجمالي 100 لتر فقط، يجب أن تكون كمية المحلول المضاف أصغر من أو تساوي 90 لترًا. ولا يمكن أيضًا إضافة كميات سالبة من المحلول، لذلك يجب أن تكون الكمية المضافة أكبر من أو تساوي 0. وبما أنك تضيف المزيد من محلول 60%، فسوف يقترب إجمالي المحلول من 60%، ولكن لأن تركيز المحلول الموجود بالفعل في الخزان أقل، فلا يمكن أن يصل تركيز إجمالي المحلول أبدًا إلى 60%. لذلك، يوجد مستقيم المقاربة أفقي عند $y = 0.6$.

52d نعم؛ الإجابة النموذجية: الدالة غير معرفة عند $a = -10$ ، ولكن لأن القيمة ليست في المجال المناسب، لا يتصل الخط المقارب بالدالة. وإذا لم تكن هناك قيود للمجال، فسيكون هناك مستقيم المقاربة رأسي عند $a = -10$.

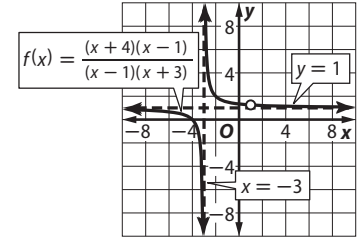


53d الإجابة النموذجية: إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام ويشتمل البسط على صفر حقيقي واحد على الأقل، فسيشتمل التمثيل البياني للدالة على $y = 0$ حيث سيتقاطع مستقيم المقاربة مع الخط المقارب عند الأصفار الحقيقية للبسط.

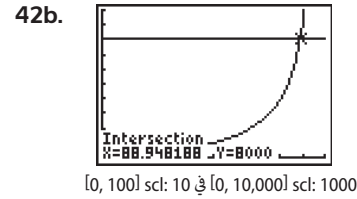
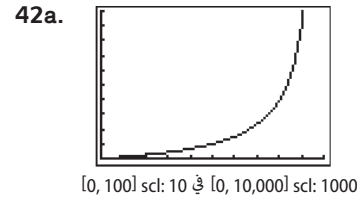
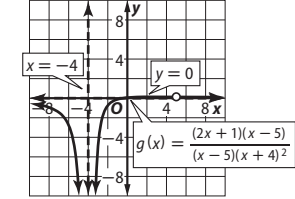
54 أحيانًا؛ الإجابة النموذجية: إذا كان $a = d$ ، فسوف تشتمل الدالة على مستقيم المقاربة أفقي عند $y = 1$. إذا كان $a \neq d$ ، فلن تشتمل الدالة على مستقيم المقاربة أفقي عند $y = 1$.

59 الإجابة النموذجية: تستخدم فترات الاختبار لتحديد موقع النقاط على التمثيل البياني. ولأن الكثير من الدوال النسبية، غير متصلة، قد تشتمل الفترة الواحدة على قيم y التي تختلف كثيرًا عن الفترة التالية. لذلك، يجب توفر نقطة واحدة على الأقل ويفضل أكثر من نقطة، لكل فترة لتمثيل رسم بياني دقيق للدالة بشكل مقبول.

خطوط المقاربة:
 $x = -3$; $y = 1$
الفجوة: $(\frac{5}{4}, 1)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : -4
نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : $\frac{4}{3}$
 $D = \{x | x \neq -3, 1, x \in \mathbb{R}\}$



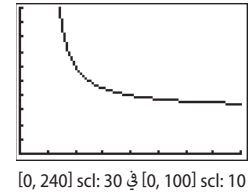
29. خطوط المقاربة:
 $x = -4$, $y = 0$
الفجوة: $(\frac{11}{81}, 5)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : $-\frac{1}{2}$
نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : $\frac{1}{16}$
 $D = \{x | x \neq -4, 5, x \in \mathbb{R}\}$



88.9% تقريبًا

42c لا؛ الإجابة النموذجية: تكون الدالة غير معرفة إذا كانت $x = 100$. يشير ذلك إلى أنه من غير الممكن ماديًا إزالة 100% من الأملاح في المصنع.

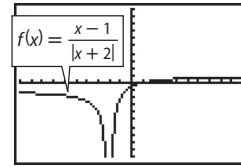
يوجد مستقيم المقاربة رأسي عند $r_1 = 30$ وخط المقاربة أفقي عند $r_2 = 30$.



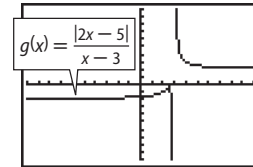
45c لا؛ الإجابة النموذجية: إذا كانت $r_1 < 30$ ، إذا ستكون r_2 سالبة. تكون المقاومة السالبة غير ممكنة.

52a الإجابة النموذجية: تركيز المحلول الإجمالي هو مجموع كمية حمض الخليك في اللترات الـ 10 الأصلية والكمية في a لترات من المحلول الذي تبلغ نسبته 60%، مقسومة على إجمالي كمية المحلول أو $\frac{0.60a + 0.20(10)}{a + 10}$ ينتج عن ضرب كل من البسط والمقام في 5 $\frac{3a + 10}{5(a + 10)}$ أو $\frac{3a + 10}{5a + 50}$

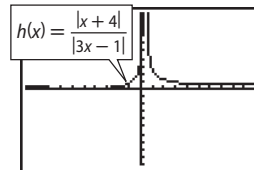
62b.



$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1



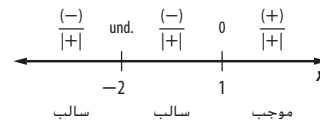
$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1



$[-10, 10]$ scl: 1 في $[-10, 10]$ scl: 1

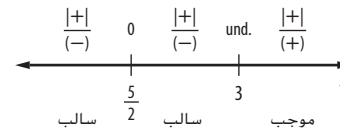
62c. i.

$$f(x) = \frac{x-1}{|x+2|}$$



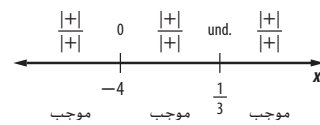
ii.

$$g(x) = \frac{|2x-5|}{x-3}$$



iii.

$$h(x) = \frac{|x+4|}{|3x-1|}$$



62d. i. $f(x) < 0$ عند $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$

ii. $g(x) \geq 0$ عند $\left\{\frac{2}{5}\right\} \cup (3, \infty)$

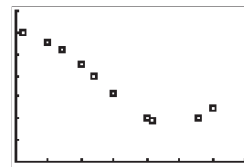
iii. $h(x) > 0$ عند $(-\infty, -4) \cup (-4, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

70. $D = \{x \mid x \neq -4, x \in \mathbb{R}\}; x = -4; y = 2$

71. $D = \{x \mid x \neq -6, x \in \mathbb{R}\}; x = -6$

72. $D = \left\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, 5, x \in \mathbb{R}\right\}; x = -\frac{1}{2}, x = 5, y = 0$

78a.



$[0, 35]$ scl: 5 في $[0, 35]$ scl: 5

$$78b. f(x) = 0.003x^3 - 0.111x^2 + 0.019x + 30.259$$

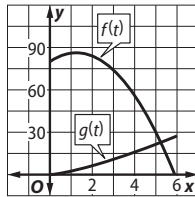
78c. تقريباً 8.42 AED

82a. $f(t)$ عبارة عن دالة كثيرة الحدود تربيعية. $g(t)$ عبارة عن دالة قوة أو دالة جذرية.

82b. الإجابة النموذجية: لأن الوقت وكمية الماء لا يمكن أن يكونا سالبين، فإن المجالات المناسبة لـ $f(t)$ و $g(t)$ تقتصر على القيم السالبة لـ t التي ينتج عنها قيم غير سالبة لـ $f(t)$ و $g(t)$ بالنسبة إلى $D = [0, 5.89]$ و $R = [0, 86.25]$. بالنسبة إلى $R = [0, \infty)$ و $D = [0, \infty)$ و $g(t)$.

82c. $\lim_{t \rightarrow 5.89} f(t) = 0; \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 80; \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$
 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$

82d.



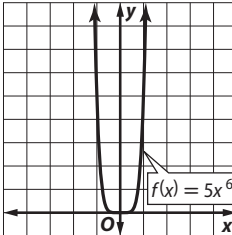
82e. الإجابة النموذجية: $f(x)$ عبارة عن دالة كثيرة الحدود. ولذلك فهي متصلة أيضًا وتطبق نظرية القيمة المتوسطة. لذلك، نظرًا لأن $f(3) = 74$ و $f(5) = 30$ فإنه يترتب على ذلك أن هناك عددًا c ، بحيث أن $3 < c < 5$ و $f(c) = 50$.

82f. 5.89 تقريبًا: الإجابة النموذجية: يعني هذا أن احتياطات الماء ستنفد من المدينة بعد 5.89 أعوام تقريبًا.

82g. 5.23 أعوام تقريبًا

الصفحة 149، دليل الدراسة والمراجعة

11.



$$D = (-\infty, \infty), R = [0, \infty)$$

نقطة التقاطع:

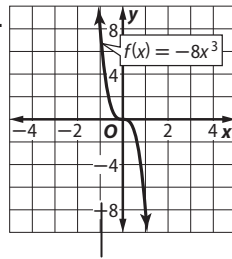
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ متصلة}$$

لجميع الأعداد الحقيقية:

التناقص: $(-\infty, 0)$; التزايد: $(0, \infty)$

12.



$$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$$

نقطة التقاطع:

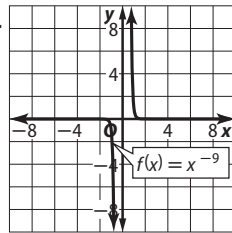
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{ متصلة}$$

لجميع الأعداد الحقيقية:

التناقص: $(-\infty, \infty)$

13.



$$D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), R = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

لا توجد نقاط تقاطع

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0;$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ انفصال}$$

لا نهائي عند $x = 0$ التناقص: $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

2

مخطط الوحدة

التقويم التشخيصي		التقويم التكويني	
الدرس 2-1		الدرس 2-2	
وتيرة التقدم: 1.5 يوم		وتيرة التقدم: نصف يوم	
الدوال الأسية		الدوال اللوغاريتمية	
الأهداف		المفردات الأساسية	
<ul style="list-style-type: none"> تقييم الدوال الأسية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا. حل المسائل التي تتضمن نموًا وتضائلًا أسّيًا. 		<ul style="list-style-type: none"> تقييم التعابير التي تتضمن لوغاريتمات. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا وتحليلها. 	
الدالة الجبرية (algebraic function) الدالة المتسامية (transcendental function) الدالة الأسية (exponential function) الأساس الطبيعي (natural base) الفائدة المركبة المستمرة (continuous compound interest)		الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b (logarithmic function with base b) اللوغاريتم (logarithm) اللوغاريتم المشترك (common logarithm) اللوغاريتم الطبيعي (natural logarithm)	
الصفحتان 163, 169		الصفحتان 175, 180	
خيارات الواجب المنزلي المتميز		اختبار منتصف الوحدة، صفحة 189	

وتيرة التقدم المقترحة			
الفترة الزمنية	شرح الدروس	المراجعة والتقييم	الإجمالي
45 دقيقة	10 أيام	يومان	12 يومًا
90 دقيقة	5 أيام	يوم واحد	6 أيام

الدرس 2-3	وتيرة التقدم: يومان	الدرس 2-4	وتيرة التقدم: 1.5 يوم	التوسع 2-4	45 دقيقة: نصف يوم 90 دقيقة: نصف يوم	الدرس 2-5	وتيرة التقدم: يومان
خصائص اللوغاريتمات	<ul style="list-style-type: none"> تطبيق خصائص اللوغاريتمات. إجراء التعبير على الصيغة الأساسية. 	المعادلات الأسية واللوغاريتمية <ul style="list-style-type: none"> تطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية لحل المعادلات. تطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية لحل المعادلات. 	تجربة تقنية التمثيل البياني: حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية جبريًا وبيانيًا. <ul style="list-style-type: none"> حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية جبريًا وبيانيًا. 	التمثيل باستخدام الانحدار اللاخطي <ul style="list-style-type: none"> نمذجة البيانات باستخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوغستية. تمثيل البيانات خطيًا وتحليلها. 			
						دالة النمو اللوجستي التمثيل الخطي	
الصفحتان 188 .184		الصفحتان 199 .194				الصفحتان 210 .204	
التقييم الختامي دليل الدراسة والمراجعة. الصفحات 211-214 تمرين على الاختبار. صفحة 215							

التشخيص	سبل الحل
بداية الوحدة 2	
الاستعداد للوحدة 2 كتاب الطالب. صفحة 157	الاستجابة للتدخل التقويمي كتاب المعلم. صفحة 157
بداية كل درس	
السابق. الحالي. لماذا؟ كتاب الطالب	الوحدة 0 كتاب الطالب. من صفحة P1-P38
أثناء/بعد كل درس	
<p>تمرين موجه كتاب الطالب. كل مثال</p> <p>مهارات التفكير العليا. كتاب الطالب</p> <p>مراجعة شاملة كتاب الطالب</p> <p>أمثلة إضافية كتاب المعلم</p> <p>انتبه! كتاب المعلم</p> <p>الخطوة 4. التقويم كتاب المعلم</p>	خيارات الواجب المنزلي المتمايز كتاب المعلم
نصف الوحدة	
	خيارات الواجب المنزلي المتمايز كتاب المعلم
اختبار قبل الوحدة	
<p>دليل الدراسة والمراجعة كتاب الطالب. الصفحات 211-214</p> <p>تمرين على الاختبار. كتاب الطالب. صفحة 215</p> <p>تمرين على الاختبار المعياري كتاب الطالب</p>	خيارات الواجب المنزلي المتمايز كتاب المعلم

التقويم التشخيصي

التقويم التكويني

التقويم الختامي

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اطلب من الطلاب تحليل أمثلة من من الحياة اليومية لبيانات يمكن تمثيلها بواسطة كل نوع من الدالات. واطلب منهم عمل تمثيلات بيانية لتوضيح كل نوع من الدالات التالية.

- الدالة الأسية
- الدالة اللوغاريتمية
- الدالة اللوجستية
- دالة القوة
- الدالة التربيعية
- الدالة التكعيبية
- الدالة من الدرجة الرابعة
- الدالة الخطية

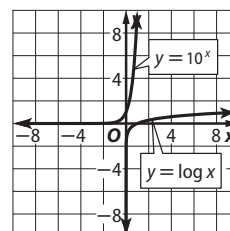
الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة

المتعلمون أصحاب النمط الطبيعي اطلب من الطلاب تخصيص دفتر يدونون فيه أحداثاً من الحياة اليومية يمكن تمثيلها باستخدام الدوال المختلفة الواردة في الفصل. وعليهم رسم صورة للحدث بجانب كلٍّ من هذه المدخلات.

المتعلمون أصحاب النمط السعي/الموسيتي اطلب من الطلاب تأليف أنشودة أو قصيدة توضح الخصائص والصيغ الخاصة باللوغاريتمات.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اطلب من الطلاب تمثيل الدالة $y = \log x$ والدالة الأسية $y = 10^x$ بيانياً على مجموعة المحاور نفسها. ثم اطلب منهم ملاحظة أوجه التشابه والاختلاف بين التمثيلين البيانيين.



الدوال الأسية واللوغاريتمية

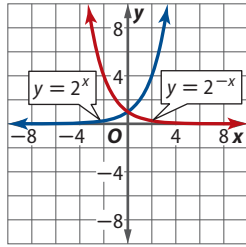
التركيز على محتوى الرياضيات

مراجعة درس بدرس

التخطيط الرأسي

2-1 الدوال الأسية

الدوال الأسية هي الدوال التي تضم أساسًا مرفوعًا إلى قوة، وفيها يكون الأساس ثابتًا والأس متغيرًا. تتزايد هذه الدوال أو تتناقص بمعدل مستمر، ويأخذ التمثيل البياني لها شكل أحد المنحنيات الموضحة أدناه.



للدالات الأسية الكثير من التطبيقات في الحياة اليومية، ومنها حساب الفائدة المركبة والنمو والتضائل الأسيان والتحليل الإشعاعي.

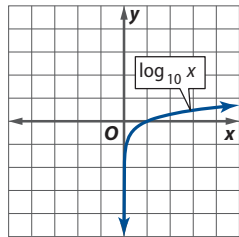
2-2 الدوال اللوغاريتمية

ترتبط الدوال الأسية واللوغاريتمية من خلال العلاقة التالية.

إذا كان $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$ ، فإن x يكون

$$\log_b x = y \\ = x b^y$$

النوعان الأكثر تكرارًا للوغاريتمات هما اللوغاريتمات الاعتيادية واللوغاريتمات الطبيعية. يكون للوغاريتمات الاعتيادية الأساس 10. بينما يكون للوغاريتمات الطبيعية الأساس e .



قبل الوحدة 2

موضوعات ذات صلة

- التعرف على العديد من الدوال الأصلية وتمثيلها بيانيًا وتوضيحها.
- استخدام البيانات لتحديد العلاقات الدالية بين الكميات.
- تحديد مجال الدوال الخطية ومداها.
- حل المعادلات الجبرية.
- استخدام خصائص الأسس.

الوحدة 2

- تحديد المجال والمدى والسلوك الطرفي للدوال الأسية واللوغاريتمية.
- استخدام خصائص الأسس واللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.
- جمع البيانات وتنظيمها، تمثيل مخططات التشتت وتفسيرها، ومواءمة البيانات الخاصة بالدالة ضمن رسم بياني، ثم تفسير النتائج.
- استخدام نماذج الدوال للتوقع واتخاذ القرارات والأحكام الهامة.
- استخدام الانحدار اللاخطي.

بعد الوحدة 2

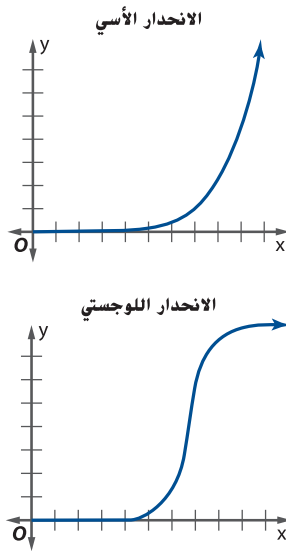
التحضير لحساب التفاضل والتكامل

- وصف الدالة الأصلية رمزيًا وبيانيًا.
- تحديد مجال الدوال ومداها باستخدام التمثيلات البيانية والجداول والرموز.
- استخدام الانحدار لتحديد ملاءمة النموذج الأسّي أو اللوغاريتمي أو اللوجستي أو التكعيبي أو التربيعي أو النموذج من الدرجة الرابعة.

2-5 التمثيل باستخدام الانحدار اللاخطي

يمكن استخدام دالة الانحدار في الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل البيانات التي تبدي نموًا أو تضاعفًا أسّيًا أو لوغاريتميًا. ويساعد معامل التصحيح على تحديد نوع الانحدار الذي ينبغي استخدامه لتمثيل الحالة المعطاة.

إن دوال النمو اللوجستي محدودةً بخطين متقاربتين أفقيين. يبدأ التمثيل البياني لهذه الدوال مائلًا للرسم البياني للدالة الأسية، ولكنه لا يلبث أن يستقرّ عند اقترابه من النهاية العليا.



التقريب الخطي هو العملية التي تستخدمها الحاسبة لتحويل البيانات بحيث تبدو أنها تتجمع حول خط محدّد. ويمكن تقريب البيانات خطيًا من خلال استخدام التحويلات الخاصة بالدوال المختلفة.

2-3 خصائص اللوغاريتمات

ثمة ثلاث خصائص للأسس، تقابلها خصائص مماثلة للوغاريتمات.

خاصية ناتج الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

خاصية الاشتقاق: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

خاصية لوغاريتم القوة: $\log_b x^p = p \log_b x$

ونظرًا إلى أن الآلات الحاسبة لا تستطيع سوى حساب اللوغاريتمات ذات الأسس 10 أو e ، فإن صيغة تغيير الأساس تتيح إجراء الحسابات على لوغاريتمات ذات أساساتٍ مغايرةٍ للأساسين المذكورين. وتُعطى صيغة تغيير الأساس من خلال:

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

2-4 المعادلات الأسية واللوغاريتمية

يمكن استخدام خاصية واحد لواحد للدوال الأسية واللوغاريتمية لحلّ بعض المعادلات الأسية واللوغاريتمية البسيطة. وتُعطي هذه الخاصية لكلٍ من هذين النوعين من الدوال من خلال التالي:

الدالة الأسية: عندما يكون $b > 0$ و $b \neq 1$ ، يكون $b^x = b^y$ إذا - وإذا فقط - كان $x = y$.

الدالة اللوغاريتمية: عندما يكون $b > 0$ و $b \neq 1$ ، يكون $\log_b x = \log_b y$ فقط - وإذا فقط - كان $x = y$.

الدوال الأسية واللوغاريتمية



مشروع الوحدة

أنواع الكائنات المهددة بالانقراض

يستخدم الطلاب ما قد تعلموه عن الدوال الأسية لتمثيل نمو أو تراجع أعداد أنواع الكائنات المهددة بالانقراض.

■ اطلب من الصفّ البحث في موضوع الذئب الرمادي الأمريكي الشمالي من أجل تمثيل نموّ أعداد هذا النوع من الحيوانات أو تراجعها. ما هي الحالة الراهنة لهذا النوع؟

■ اطلب من الطلاب إجراء بحثٍ حول ثلاثة أنواع مختلفةٍ من الكائنات المدرجة ضمن قائمة الأنواع المهددة بالانقراض منذ عشر سنواتٍ على الأقل.

■ اطلب من الطلاب تشكيل مجموعاتٍ من اثنين أو ثلاثةٍ بغية تحديد نوع الدالة الذي يساعد على نمذجة نمو أو تراجع عدد كلٍ من الأنواع المهددة بالانقراض.

■ اطلب منهم أن يقوموا بعمل تمثيل بياني للبيانات ووضّع نماذج لكل دالةٍ للبيانات التي قاموا باختيارها.

■ بناءً على نماذج الطلاب، اطلب منهم توقع الوقت الذي ست انقرض فيه الأنواع أو استخراج من قائمة الأنواع المهددة بالانقراض.

المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة باستخدام الروتين التالي.

عرّف: الدوال الأسية هي الدوال التي تضم أساساً مرفوعاً إلى قوة، وفيها يكون الأساس ثابتاً والأس متغيّراً.

مثال: الدالة $f(x) = 3^x$ هي دالةٌ أسيةٌ.

اسأل: هل الدالة $g(x) = 4x^3$ دالةٌ أسيةٌ؟ لا. لأن أساسها متغيّرٌ وأسسها ثابت. فهي دالةٌ قوة.

لماذا؟ ▲

● الأنواع المهددة بالانقراض تُستخدم الدوال الأسية كثيراً لوضع نماذج لتزايد وتراجع أعداد الأنواع المهددة بالانقراض. على سبيل المثال، يمكن استخدام الدالة الأسية لتمثيل أعداد المجتمع الإحصائي لسلاحفة الغالاغوس الخضراء، حيث أصبحت من الأنواع المهددة بالانقراض.

● **قراءة مسبقة** استخدم مربعات المفاهيم الموجزة في الوحدة لأخذ فكرة عن تنظيم فقرات الوحدة 2.

راجع عمل الطلاب.

الحالي

● في الوحدة 2، ستقوم بما يلي:

- تقييم وتحليل للدوال الأسية واللوغاريتمية وتمثيلها بيانياً.

- تطبيق خصائص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

- وضع نماذج بيانات باستخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوجستية.

السابق

● في الوحدة السابقة، قمتَ بتمثيل دوال القوة والدوال التنسية وكثيرة الحدود بيانياً. كما قمتَ بتحليلها.

قراءة مسبقة شجّع الطلاب على بدء دراستهم للوحدة بقراءة كل درس مسبقاً. وينبغي أن يفكروا في خلفيتهم المعرفية ويضعوا توقعات عن المحتوى. امنح المجموعات وقتاً لمناقشة ما قرؤوه وطرح الأسئلة. وركز على ملامح النص مثل عناوين الأقسام ومربعات المفاهيم الموجزة والمفاهيم الرئيسية.

الاستعداد للوحدة

مفردات جديدة

تحديد مدى الاستعداد لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

أ. خيار الكتاب المدرسي

خيار الكتاب المدرسي أجب على أسئلة التدريب السريع التالية.

تدریب سریع

حوّل كلاً مما يلي إلى أبسط صورة. (الدرس 0-4)

- $(3x^2)^4 \times 2x^3$ **$162x^{11}$**
- $(3b^3)(2b^4)$ **$6b^7$**
- $\frac{y^7}{y^4}$ **y^3**
- $\left(\frac{1}{2a}\right)^3$ **$\frac{1}{8a^3}$**
- $\frac{c^4d}{cd}$ **c^3**
- $\frac{(2n^2)^4}{4n}$ **$4n^7$**

7. **السجادة** يمكن تمثيل طول سجادة غرفة نوم بـ $2a^2$ قدم وعرضها بـ $5a^3$ أقدام. احسب مساحة السجادة. $10a^5 \text{ ft}^2$

استخدم حاسبة التمثيل البياني لرسم كل دالة. حدد ما إذا كان معكوس الدالة يمثل دالة. (الدرس 1-7) 8-13 انظر ملحق إحاثات الوحدة 2.

8. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 9. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

10. $f(x) = \frac{8 - x}{x}$ 11. $g(x) = \frac{x - 3}{x}$

12. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x}}$ 13. $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x + 7}}$

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

14. **الطوابيع** يمكن استخدام الدالة $v(t) = 200(1.6)^t$ لتوقع قيمة v لطابع نادر بعد t من الأعوام. مثل الدالة بيانًا، وحدد ما إذا كان معكوس الدالة يمثل دالة.

15-18 انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

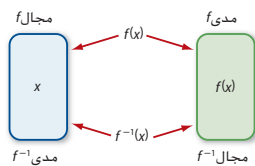
مثل كل دالة بيانياً وحلها. وضح المجال والهدى والتقاطعات والسلوك
الطرفي والاتصال، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 2-1)

15. $f(x) = 2x^2$ 16. $g(x) = 4x^3$
17. $h(x) = -3x^3$ 18. $f(x) = -x^5$

مراجعة المفردات

66 ص **لواحد لواحد** هي دالة تجتاز اختبار المستقيم الأفقي، ولا توجد قيمة y تتوافق مع أكثر من قيمة x واحدة

الدوال العكسية ص 65 تكون الدالتان f و f^{-1} عكسيتين فقط إذا كانت

$$f^{-1}[f(x)] = x, \quad f[f^{-1}(x)] = x$$


السلوك الطرفي ص 159 يصف سلوك $f(x)$ حيث x تزيد أو تنقص بلا حدود؛ فتصبح أكبر وأكبر أو سلسلة أكثر وأكثر

الدالة المتصلة ص 159 دالة يمكن تمثيلها بيانياً بدون فواصل أو فجوات أو فراغات

الأسئلة الأساسية

- كيف تتخذ قراراتٍ صائبة؟ الإجابة النموذجية: حدّد الخيارات المتاحة، وقارن بين منافع ومساوئ كلّ خيار، وحلّل النتائج التي تتمخض عنها ثم اتق الخيار الأمثل.
- ما العوامل التي من شأنها أن تفضي إلى اتخاذ القرار الصائب؟ الإجابة النموذجية: مقدار الزمن المتاح، الطريقة المستخدمة، البيئة، الأشخاص المشاركون، الخيارات المتاحة.

الدوال الأسية

لماذا؟

الحالي

السابق

- عرّفت مجموعة من الدوال الأم ومثلتها بيانيًا ووصفتها. (الدرس 1-5)
- عرّفت مجموعة من الدوال الأسية وتحتها وتمثلها بيانيًا. ستقوم بحل مسائل تتضمن نموًا وتضائلًا أسّيًا.
- لقد زاد استهلاك الماء في العالم بشكل سريع على مدار عدة عقود ماضية، ويذهب معظم استهلاك الماء في العالم إلى الزراعة، وقد تسبب تزايد السكان في زيادة الطلب على الإنتاج الزراعي. ويمكن وضع نموذج للزيادة في استهلاك الماء باستخدام دالة أسية.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-1 تعريف العديد من الدوال الأصلية وتمثيلها بيانيًا ووصفها.

الدرس 2-1 إيجاد قيمة الدوال الأسية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.

حل مسائل تتضمن النمو والتضائل الأسّي.

بعد الدرس 2-1 استيعاب العلاقة بين الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

مفردات جديدة

- الدالة الجبرية (algebraic function)
- الدالة المتسامية (transcendental function)
- الدالة الأسية (exponential function)
- الأساس الطبيعي (natural base)
- نسبة المربحة المركبة المستمرة (continuous compound interest)

1 الدوال الأسية درست في الوحدة 1 دوال القوة والدوال الجذرية والدوال كثيرة الحدود والدوال النسبية. وهذه أمثلة على **الدوال الجبرية**. وهي دوال تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع الثوابت والمتغير المستقل أو طرحها أو ضربها أو قسمتها أو رفع المتغير المستقل إلى قوة نسبية. وسوف نتعرف في هذه الوحدة على الدوال الأسية واللوغاريتمية. وهي تُعتبر من **الدوال المتسامية** لأنها لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية. فهي فعلًا تتسامى على الجبر. فلنأخذ في الاعتبار الدالة $g(x) = 3^x$ و $f(x) = x^3$ كلتاها تتضمنان أساسًا مرفوعًا إلى أس أو قوة جبرية؛ إلا أنه في دالة القوة $f(x)$ يكون الأساس متغيرًا والأس ثابتًا. وفي الدالة $g(x)$ الأساس ثابت والأس متغير. وتُسمى الدوال التي لها صيغة تشبه $g(x)$ **الدوال الأسية**.

المفهوم الأساسي الدالة الأسية

الدالة الأسية ذات الأساس b لها الصيغة $f(x) = ab^x$ ، حيث تمثل x أي عدد حقيقي و b و a قيمتا عدد حقيقي ثابتتان بحيث $a \neq 0$ ، و b موجبة و $b \neq 1$.

أمثلة خارجة عن التعريف

$$f(x) = 2x^{-3}, f(x) = 5^x, f(x) = 1^x$$

أمثلة

$$f(x) = 4^x, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, f(x) = 7^{-x}$$

وعندما تكون المدخلات أعدادًا نسبية، يمكن تقييم الدوال الأسية باستخدام خصائص الأسس. مثلاً، إذا كانت $f(x) = 4^x$ ، فعندها

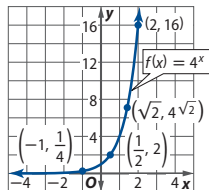
$$f(2) = 4^2 = 16$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f(-3) = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

بما أنه يتم تعريف الدوال الأسية لكل الأعداد الحقيقية، يجب أن تتمكن أيضًا من تقييم الدالة الأسية بالنسبة إلى القيم غير النسبية لـ x ، مثل $\sqrt{2}$. ولكن ما الذي يعنيه التعبير $4^{\sqrt{2}}$ ؟

يمكن تقريب قيمة هذا التعبير باستخدام عمليات تقريب نسبية متوالية القرب من $\sqrt{2}$ كما يظهر أدناه.



x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	...
$f(x) = 4^x$	4	7.0	7.06	7.101	7.1029	7.10296	...

من الجدول السابق يمكننا أن نستنتج أن $4^{\sqrt{2}}$ عدد حقيقي يساوي تقريبًا 7.10 وبما أن $f(x) = 4^x$ تحتوي على قيم عددية حقيقية لكل قيمة x في مجالها، تكون هذه الدالة متصلة ويمكن تمثيلها بيانيًا على شكل منحنى سلس على النحو الموضح.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

- هل زيادة استهلاك الماء تعكس زيادة عدد السكان؟ اشرح. **الإجابة النموذجية:** نعم، يتناسب استهلاك الماء طرديًا مع عدد السكان.
- لمّ قد يكون التمثيل البياني للبيانات مفيدًا في تحليلها؟ **الإجابة النموذجية:** لأنه يقدم تمثيلًا مرئيًا للبيانات.

يمكن اتباع نفس الأساليب التي استخدمتها لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الجبرية على التمثيلات البيانية للدوال الأسية.

مثال 2 التمثيل البياني لتحويلات الدوال الأسية

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم ارسم الدوال بيانيًا.

a. $g(x) = 2^{x+1}$

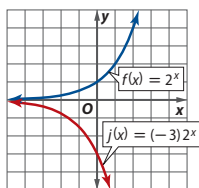
تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = f(x+1)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $g(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ بعد إزاحته إلى اليسار وحدة واحدة (الشكل 2.1.1).

b. $h(x) = 2^{-x}$

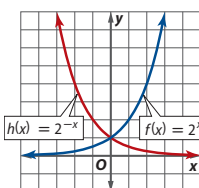
تأخذ هذه الدالة الصيغة $h(x) = f(-x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $h(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ معكوسًا حول المحور الأفقي y (الشكل 2.1.2).

c. $j(x) = -3(2^x)$

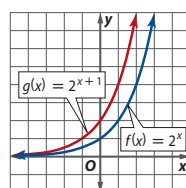
تأخذ هذه الدالة الصيغة $j(x) = -3f(x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $j(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ معكوسًا حول المحور الأفقي x وممتدًا رأسياً بمعامل قدره 3 (الشكل 2.1.3).



الشكل 2.1.3



الشكل 2.1.2



الشكل 2.1.1

نصيحة دراسية

تحليل التمثيلات البيانية لاحظ أن تحويلات $f(x)$ الناتجة عن $g(x)$ و $h(x)$ لا تؤثر على موقع الخط المتطابق الأفقي. أي المحور الأفقي x . إلا أن التحويلات الناتجة عن $g(x)$ و $h(x)$ تؤثر على التقاطع مع المحور الرأسي y في التمثيل البياني.

تمرين موجه

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = 4^x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم مثل الدوال بيانيًا. **2A-C. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

2A. $k(x) = 4^{x-2}$

2B. $m(x) = -4^{x+2}$

2C. $p(x) = 2(4^{-x})$

قد يكون من المثير للدهشة أن تعلم أنه في معظم استخدامات الحياة اليومية التي تتضمن دوالاً أسية، لا يتمثل الأساس الأكثر شيوعاً في 2 أو 10. وإنما عدد غير نسبي e يسمى **الأساس الطبيعي**. حيث

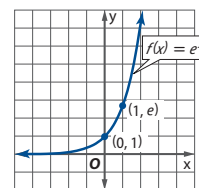
$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

بحساب قيمة $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ للقيم الأكبر والأكثر من x . يمكننا تقدير أن قيمة هذا التعبير تقترب من عدد قريب من 2.7183. وفي واقع الأمر، فإنه باستخدام حساب التفاضل والتكامل، يتضح أن هذه القيمة تقترب من العدد غير النسبي e المسمى باسم عالم الرياضيات السويسري ليونهارد يوليوس الذي حسب قيمة e حتى 23 منزلة عشرية.

$$e = 2.718281828...$$

يمكن أيضاً تعريف الرقم e بأنه $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ، وبما أن قيم x الكسرية أقرب أكثر وأكثر من 0. فإن $e = 2.718281828...$ $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

الدالة التي تأخذ الصيغة $f(x) = e^x$ تسمى الدالة الأسية طبيعية الأساس (الشكل 2.1.4) ولها نفس خصائص الدوال الأسية الأخرى.



الشكل 2.1.4

78 | الدرس 2-1 | الدوال الأسية

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال الأسية وتمثيلاتها البيانية إن الدوال الأسية هي دوال تكتب بالصورة $y = a^x$. حيث a أكبر من الصفر ولكن لا يساوي 1. وبالتالي، إما أن يكون a أكبر من الصفر وأصغر من 1 أو أكبر من 1. فإذا كان $0 < a < 1$ ، فحينها تزايد x وتتناقص y . وكلما صغرت قيمة a ، تناقصت الدالة بصورة أسرع. وإذا كان $a > 1$ ، فحينها تتناقص x وتزايد y . وكلما كبرت قيمة a ، تزايدت الدالة بصورة أسرع.

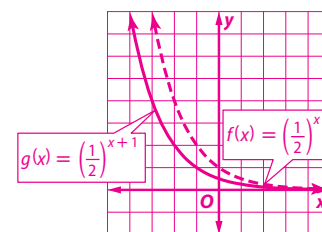
مثال إضافي

2 استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ لوصف التحول الذي تنتج عنه كل دالة. ثم مثل هذه الدوال بيانيًا.

a. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ هو

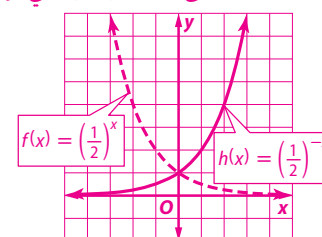
التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مزاخاً

بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار.



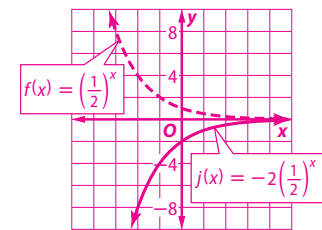
b. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ هو

التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكساً على المحور الرأسي y .



c. $j(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ هو

التمثيل البياني للدالة $f(x)$ معكوساً بالنسبة للمحور الأفقي x وممتدًا بالاتجاه الرأسي بمقدار وحدتين.



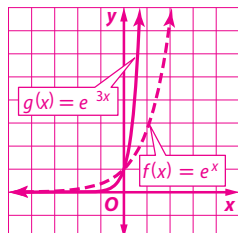
التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة اطلب من الطلاب كتابة شرح لخصائص دالة النمو والتضاؤل الأسّي في مدونة الوحدة.

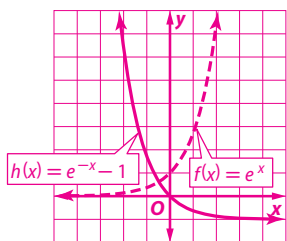
مثال إضافی

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^x$ لوصف التحويل الذي ينتج عنه التمثيل البياني لكل دالة. ثم مثل الدوال بيانيًا.

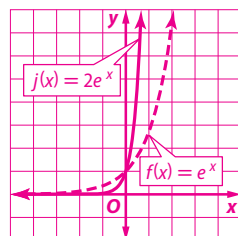
$g(x) = e^{3x}$.a هو التمثيل
البياني للدالة $f(x)$ مضغوطاً
أفقياً بمعامل مقداره 3.



b. $h(x) = e^{-x} - 1$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكسًا على المحور الرأسي y ومنسحبًا بمقدار وحدة لأسفل.



c. $j(x) = 2e^x$ هو التمثيل
البياني للدالة $f(x)$ متسعا
بالاتجاه الرأسي بمعامل مقداره
2.



2 دالة النمو والتضائل الأسى

يبين المثالان 4 و 5 تطبيقات عملية
للدالة الأسية تشتمل على الفائدة المركبة
والفائدة المركبة المستمرة.

ويبين المثالان 6 و 7 العديد من
التطبيقات التي تتضمن نموًا وتضائلًا
أسّيًا.

مثال 3 التمثيل البياني للدوال الأسية طبيعية الأساس

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ لتصف التحول الذي ينتج في التمثيل البياني لكل دالة. ثم مثل الدوال بيانياً.

a. $a(x) = e^{4x}$

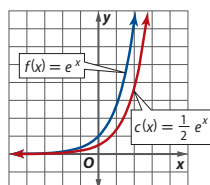
تأخذ هذه الدالة الصيغة $a(x) = f(4x)$. لذلك فإن التمثيل البياني لـ $a(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ المضغوط أفقيًا بمعامل قدره 4 (الشكل 2.15)

b. $b(x) = e^{-x} + 3$

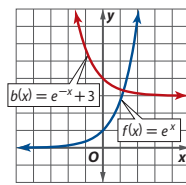
تأخذ هذه الدالة الصيغة $b(x) = f(-x) + 3$ لذلك فإن التمثيل البياني لـ $b(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ معكوسًا حول المحور الرأسى y ومزاحًا للأعلى بمقدار 3 وحدات (الشكل 2.1.6).

c. $c(x) = \frac{1}{2}e^x$

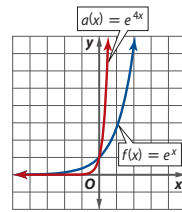
تأخذ هذه الدالة الصيغة $c(x) = \frac{1}{2} f(x)$ لذلك فإن التمثيل البياني لـ $c(x)$ يساوي التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ مضغوطاً رأسياً بمعامل قدره $\frac{1}{2}$ (الشكل 2.17)



الشكل 2.1.7



الشكا، 2.1.6



الشكل 2.1.5

تهرين موجه 3A-C. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

3A. $q(x) = e^{-x}$

3B. $r(x) = e^x - 5$

3C. $t(x) = 3e^x$

النمو والتضاؤل الأسيان

2 النمو والتضائل الأسيان

العام	رصيد الحساب بعد كل إضافة مركبة	
0	$A_0 = P$	الاستثمار أو رأس المال الأصلي P
1	$A_1 = A_0 + A_0 r$ $= A_0(1 + r)$ $= P(1 + r)$	<p>تم إضافة نسبة المربحة من العام 0، وهي $A_0 r$.</p> <p>خاصية التوزيع</p> <p>$A_0 = P$</p>
2	$A_2 = A_1(1 + r)$ $= P(1 + r)(1 + r)$ $= P(1 + r)^2$	<p>تم إضافة نسبة المربحة من العام 1.</p> <p>$A_1 = P(1 + r)$</p> <p>حَوَّلَ لأبسط صورة.</p>
3	$A_3 = A_2(1 + r)$ $= P(1 + r)^2(1 + r)$ $= P(1 + r)^3$	<p>تم إضافة نسبة المربحة من العام 2.</p> <p>$A_2 = P(1 + r)^2$</p> <p>حَوَّلَ لأبسط صورة.</p>
4	$A_4 = A_3(1 + r)$ $= P(1 + r)^3(1 + r)$ $= P(1 + r)^4$	<p>تم إضافة نسبة المربحة من العام 3.</p> <p>$A_3 = P(1 + r)^3$</p> <p>حَوَّلَ لأبسط صورة.</p>

يؤدي النمط الذي ينشأ إلى الدالة الأسية التالية بالأساس $(1 + r)$.

$$A(t) = P(1 + r)^t$$

رصيد الحساب بعد t من الأعوام

مثال إضافي

4

المعرفة المالية

قامت السيدة شمسة باستثمار مبلغ 2000 AED ضمن حساب التوفير المخصص لتعليم صغيرتها حينما كانت طفلة رضيعة. ويساوي معدل الفائدة لهذا الحساب 5%. فإن لم تقم السيدة شمسة بإيداع أي مبالغ أو سحبها من الحساب، فكم سيبلغ رصيد الحساب بعد مضي 18 عامًا إذا كانت الفائدة مركبة:

- a. ربعيًا؟ 4891.84 AED
b. شهريًا؟ 4910.02 AED
c. يوميًا؟ 4918.90 AED

نصائح للمعلمين الجدد

تركيب الفائدة في المثال 4. اطلب من الطلاب مناقشة الفرق بين التركيب الشهري واليومي. وعليهم أن يشرحوا السبب في أن التركيب اليومي يحقق رصيدًا أكبر من التركيب الشهري.

نصيحة دراسية

إضافة الفائدة المركبة يوميًا في هذا النص، سنفترض أن العام يتألف من 365 يومًا في المسائل التي تتضمن إضافة الفائدة المركبة يوميًا.

للسماح بإضافات نسبة المراجعة المركبة كل ربع عام أو شهريًا أو حتى يوميًا. فلنكن n عدد مرات إضافة نسبة المراجعة المركبة كل عام. فإن

• يمثل معدل كل إضافة لنسبة المراجعة المركبة $\frac{r}{n}$ نسبة من المعدل السنوي r .

• عدد مرات إضافة نسبة المراجعة المركبة بعد t من الأعوام هو nt .

إذا استبدلنا r بـ $\frac{r}{n}$ و t بـ nt في الصيغة $A(t) = P(1 + r)^t$ ، نحصل على قاعدة عامة لنسبة المراجعة المركبة.

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المراجعة المركبة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة فائدة سنوية r مركبة (بصيغة عشرية) تتم إضافتها n مرات في العام، يكون الرصيد A في الحساب بعد t من السنوات كالتالي

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

مثال 4 استخدام نسبة المراجعة المركبة

المعرفة المالية تستثمر مريم 300 AED في حساب بنسبة مراجعة تبلغ 6% بدون إجراء أي إيداعات أو سحبوات أخرى. ماذا سيكون رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا إذا كانت نسبة المراجعة مركبة:

a. كل نصف عام؟

لإضافة نسبة المراجعة المركبة كل نصف عام، $n = 2$.

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{قاعدة نسبة المراجعة المركبة} \\ &= 300\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{2(20)} && P = 300, r = 0.06, n = 2, t = 20 \\ &\approx 978.61 && \text{حوّل إلى أبسط صورة.} \end{aligned}$$

عند إضافة نسبة المراجعة المركبة كل نصف عام، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا 978.61 AED.

b. شهريًا؟

لإضافة نسبة المراجعة المركبة شهريًا، $n = 12$. بما أن هناك 12 شهرًا في العام.

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{قاعدة نسبة المراجعة المركبة} \\ &= 300\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(20)} && P = 300, r = 0.06, n = 12, t = 20 \\ &\approx 993.06 && \text{حوّل إلى أبسط صورة.} \end{aligned}$$

مع إضافة نسبة المراجعة المركبة شهريًا، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا 993.06 AED.

c. يوميًا؟

لإضافة نسبة المراجعة المركبة يوميًا، $n = 365$.

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{قاعدة نسبة المراجعة المركبة} \\ &= 300\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365(20)} && P = 300, r = 0.06, t = 20, n = 365 \\ &\approx 995.94 && \text{حوّل إلى أبسط صورة.} \end{aligned}$$

عند إضافة نسبة المراجعة المركبة يوميًا، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا 995.94 AED.

تقريبين موجه

4. **المعرفة المالية** إذا تم استثمار 1000 AED في حساب ادخاري عبر الإنترنت يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحبوات أخرى وكانت الفائدة مركبة:

- a. كل نصف عام؟ 2191.12 AED b. كل ربع عام؟ 2208.04 AED c. يوميًا؟ 2225.35 AED

لاحظ أنه مع زيادة عدد مرات إضافة نسبة المراجعة المركبة في المثال 4، يزيد رصيد الحساب أيضًا. إلا أن الزيادة صغيرة نسبيًا. حيث تبلغ فقط $2.88 \text{ AED} = 993.06 \text{ AED} - 995.94 \text{ AED}$.

يوضح الجدول أدناه مقدار A محسوباً لعدة قيم من n . لاحظ أنه بينما يزيد رصيد الحساب، يقل مقدار الزيادة مع زيادة n . وفي الواقع، يبدو أن المبلغ يميل إلى أن يكون قيمة قريبة من 996.03 AED.

مركبة	n	$A = 300\left(1 + \frac{0.06}{n}\right)^{20n}$
سنوياً	1	962.14 AED
كل نصف عام	2	978.61 AED
كل ربع عام	4	987.20 AED
شهرياً	12	993.06 AED
يوميًا	365	995.94 AED
كل ساعة	8760	996.03 AED

افترض أن الفائدة كانت مركبة باستمرار بحيث لا تكون هناك فترة انتظار بين مدفوعات الفائدة. يمكننا استنتاج قاعدة **النسبة المربحة المركبة المستمرة** عن طريق استخدام الجبر أولاً لتعديل قاعدة الفائدة المركبة العادية. $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$$= P\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{xrt} \quad \text{قاعدة نسبة المربحة المركبة حيث } \frac{n}{r} \text{ مكتوبة بالشكل}$$

$$= P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{rt} \quad \text{نفترض بأن } n = rx \text{ و } x = \frac{n}{r}$$

خاصية الأس الثابت في الأسس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{حيث تذكر من الصفحة 160 أن } e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{x \rightarrow \infty} P\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{rt} = P e^{rt} \quad \text{بما أن } r \text{ قيمة ثابتة و } x \rightarrow \infty$$

يقودنا هذا إلى قاعدة حساب نسبة المربحة المركبة المستمرة الموضحة أدناه.

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المربحة المركبة المستمرة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة نسبة المربحة سنوية r مركبة (بصفة عشرية) تتم إضافتها باستمرار، فحينها يتم احتساب الرصيد A في الحساب بعد t من الأعوام كالتالي

$$A = Pe^{rt}$$

مثال 5 استخدام نسبة المربحة المركبة المستمرة

المعرفة المالية افترض أن مريم وجدت حساباً سيسمح لها باستثمار مبلغ 300 AED الخاص بها بنسبة نسبة المربحة نسبة المربحة تبلغ 6% تتم إضافتها باستمرار. وإذا لم تكن هناك إيداعات أو سحبوات أخرى، فكم سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا؟

$$A = Pe^{rt} \quad \text{قاعدة نسبة المربحة المركبة المستمرة}$$

$$= 300e^{(0.06)(20)} \quad P = 300 = r = 0.06, t = 20$$

$$\approx 996.04 \quad \text{حوّل إلى أبسط صورة.}$$

عند إضافة نسبة المربحة المركبة باستمرار، سيبلغ رصيد حساب مريم بعد 20 عامًا 996.04 AED.

تمرين موجه

5. **المعاملات البنكية عبر الإنترنت** إذا تم استثمار 1000 AED في حساب ادخاري يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام تتم إضافته كفائدة مركبة باستمرار، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحبوات أخرى؟ **2225.54 AED**

الربط بالحياة اليومية

النسبة الأولية هي نسبة الفائدة التي تفرضها البنوك على المقترضين الأكثر استحقاقًا للائتمان. يمكن أن تؤثر الفترات في هذه النسبة على نسب أخرى. بما في ذلك نسب فائدة الرهن العقاري.

المصدر: Federal Reserve System

مثال إضافي

5 **المعرفة المالية** وجدت السيدة شمسة حساباً سوف يدرّ عليها معدل 5% من الفائدة المركبة المستمرة على حساب التوفير التعليمي لها البالغ 2000 AED. كم سيبلغ رصيد حسابها بعد 18 عامًا؟ **4919.21 AED**

نصائح للمعلمين الجدد

النسبة المئوية للعائد السنوي (APY). معدل النسبة المئوية السنوية (APR) هو معدل الفائدة السنوي الذي لا يأخذ في الحسبان تركيب الفائدة ضمن تلك السنة. وعلى العكس من ذلك، تتضمن النسبة المئوية للعائد السنوي (APY) تأثيرات التركيب خلال تلك السنة، ما يؤدي إلى معدل فائدة أعلى بصورة طفيفة. إن الميزة من استخدام النسبة المئوية للعائد السنوي (APY) هي أنها تتيح مقارنة المعدلات المركبة لفترات مختلفة، وهو ما يمنح المستهلك إيجاد أفضل خيار له.

الصيغة الخاصة بمعدل النسبة المئوية السنوية APR هي (معدل الفائدة الدوري) \times (عدد الفترات في السنة الواحدة). النسبة المئوية للعائد السنوي APY هي $APY = (1 + \text{معدل الفائدة الدوري})^{\text{عدد الفترات في السنة}} - 1$.

OL خيارات الواجب المنزلي المتميز

المتعلمون عن طريق التواصل نظّم الطلبة في مجموعاتٍ من ثلاثة. وقدم لهم السيناريو التالي: لديك 10000 AED مخصصة للاستثمار. وقد طرحت عليك ثلاثة خيارات مختلفة من الحسابات. يدرّ الحساب الأول عليك فائدةً مركبةً مستمرة بنسبة 6%. ويدرّ الحساب الثاني عليك فائدةً مركبةً شهرية بنسبة 8%. ويدرّ الحساب الثالث عليك فائدةً مركبةً نصف سنوية بنسبة 10%. وينبغي استثمار ذلك المبلغ لمدة 10 أعوام دون سحب أو إيداع أي مبالغ إضافية في الحساب. ينبغي على كل مجموعةٍ تقدير أيّ حساب هو الأفضل. ثم اطلب من الطلاب اختيار نوع واحدٍ من الحسابات لتحديد قيمة الرصيد بعد 10 أعوام. ينبغي على المجموعات تقديم نتائجهم إلى الصف.

مثال إضافي

6

تعداد السكان يتناقص تعداد

السكان في إحدى الدول بمعدل 2.6% سنوياً. تضم هذه الدولة في الوقت الحالي تعداداً سكانياً يبلغ 11 مليون نسمة تقريباً. فإذا استمر التعداد السكاني بالتراجع وفقاً لهذا المعدل، توقع التعداد السكاني في الدولة بعد 15 و 30 عاماً.

a. 2.6% سنوياً 4,990,699؛

7,409,298

b. 2.6% بصورة

مستمرة 7,447,626؛

5,042,466

بالإضافة إلى الاستثمارات. يمكن أيضاً أن يتغير عدد السكان والحيوانات والبكتيريا ومقادير المواد الإشعاعية بمعدل أسي. تسري نماذج النمو والتضائل الأسيين على أي وضع يتناسب فيه النمو مع الحجم الأولي للكمية المعنية.

المفهوم الأساسي المعادلات الأسية للنمو أو التضائل

إذا علمت أن المبلغ الأولي N_0 ينمو أو يتضائل بمعدل أسي r أو k (في صورة كسر عشري)، فحينها يمكن تمثيل المبلغ النهائي N بعد مدة t بالمعادلات التالية.

نمو أو تضائل أسي

$$N = N_0(1 + r)^t$$

إذا كان r يمثل معدل نمو، فعندها $r > 0$.

إذا كان r يمثل معدل تضائل، فعندها $r < 0$.

نمو أو تضائل أسي مستمر

$$N = N_0 e^{kt}$$

إذا كان k يمثل معدل نمو مستمر، فعندها $k > 0$.

إذا كان k يمثل معدل تضائل مستمر، فعندها $k < 0$.

يتشابه النمو والتضائل المستمران مع الفائدة المركبة المستمرة. تتم إضافة النمو أو التضائل المركبين باستمرار وليس سنوياً أو شهرياً أو كل ساعة أو وفق فترة زمنية معينة أخرى. يمكن وضع نماذج لنمو السكان أسياً وباستمرار ووفق نماذج أخرى.

مثال 6 من الحياة اليومية التمثيل باستخدام النمو أو التضائل الأسي

السكان يبلغ عدد سكان المكسيك 110 ملايين نسمة تقريباً. إذا استمر التعداد السكاني في المكسيك بالنمو بالمعدل المذكور، فتوقع التعداد السكاني في المكسيك بعد 10 أعوام و20 عاماً.

a. 1.42% سنوياً

استخدم قاعدة النمو الأسي لكتابة معادلة تضع نموذجاً لهذا الموقف.

قاعدة النمو الأسي

$$N = N_0(1 + r)^t, \quad r = 0.0142$$

حوّل لأبسط صورة.

$$\begin{aligned} N &= N_0(1 + r)^t \\ &= 110,000,000(1 + 0.0142)^t \\ &= 110,000,000(1.0142)^t \end{aligned}$$

استخدم هذه المعادلة لإيجاد قيمة N عندما تكون $t = 10$ و $t = 20$.

صيغة المعادلة

$$N = 110,000,000(1.0142)^t$$

حوّل لأبسط صورة.

$$\begin{aligned} N &= 110,000,000(1.0142)^t \\ &= 110,000,000(1.0142)^{10} \\ &\approx 126,656,869 \end{aligned}$$

إذا استمر عدد سكان المكسيك في النمو بمعدل سنوي يبلغ 1.42%، فسيبلغ عدد السكان خلال 10 أعوام نحو 126,656,869 تقريباً وسيبلغ عددهم 145,836,022 تقريباً خلال 20 عاماً.

b. 1.42% باستمرار

استخدم قاعدة النمو الأسي المستمر لكتابة معادلة نموذج.

صيغة النمو الأسي المستمر

$$N = N_0 e^{kt}, \quad k = 0.0142$$

استخدم هذه المعادلة لإيجاد قيمة N عندما تكون $t = 10$ و $t = 20$.

صيغة المعادلة

$$N = 110,000,000 e^{0.0142t}$$

حوّل لأبسط صورة.

$$\begin{aligned} N &= 110,000,000 e^{0.0142t} \\ &= 110,000,000 e^{0.0142(10)} \\ &\approx 126,783,431 \end{aligned}$$

إذا استمر عدد سكان المكسيك في النمو بمعدل مستمر يبلغ 1.42%، فسيبلغ عدد السكان خلال 10 أعوام 126,783,431 تقريباً وسيبلغ عددهم 146,127,622 تقريباً خلال 20 عاماً.

تمرين موجه

6. **السكان** ينخفض عدد سكان إحدى المدن بمعدل 6%. فإذا كان عدد السكان حالياً يبلغ 12,426 نسمة، فتوقع عدد السكان خلال 5 و10 أعوام باستخدام كل نموذج.

A. سنوياً حوالي 9119 نسمة؛ حوالي 6693 نسمة B. باستمرار حوالي 9205 نسمة؛ حوالي 6820 نسمة

انتبه!

استخدام معدلات التضائل تذكر أن تكتب معدلات التضائل بقيم سالبة.

بعد العثور على نموذج لموقف ما، يمكنك استخدام التمثيل البياني للنموذج في حل المسائل.

مثال 7 من الحياة اليومية التمثيل باستخدام النمو أو التضائل الأسّي

المرض يوضح الجدول عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها للإصابة بمرض الجدري في الولايات المتحدة عام 1980 و 2005.

حالات الإصابة بالجدري التي تم الإبلاغ عنها في الولايات المتحدة	العام
190.9	1980
32.2	2005

المصدر: المراكز الأمريكية لمكافحة الأمراض والوقاية منها

a. إذا كان عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها للإصابة بمرض الجدري ينخفض بمعدل أسّي، فحدد معدل الانخفاض واكتب معادلة أسية لنموذج هذه الحالة.

إذا افترضنا أن $N(t)$ يمثل عدد الحالات على مدار t من الأعوام بعد 1980 وافترضنا حدوث تضائل أسّي. فإن العدد الأولي للحالات $N_0 = 190.9$ وفي الوقت $t = 2005 - 1980 = 25$ ، عدد الحالات التي تم الإبلاغ عنها $N(25) = 32.2$. استخدم هذه المعلومات لإيجاد معدل التضائل r .

$$N(t) = N_0(1 + r)^t$$

قاعدة النمو الأسّي

$$32.2 = 190.9(1 + r)^{25} \quad N(25) = 32.2, N_0 = 190.9, t = 25$$

$$\frac{32.2}{190.9} = (1 + r)^{25}$$

اقسم كل طرف على 9.091

$$\sqrt[25]{\frac{32.2}{190.9}} = 1 + r$$

خذ الجذر الموجب الخامس والعشرين لكل طرف.

$$\sqrt[25]{\frac{32.2}{190.9}} - 1 = r$$

اطرح 1 من كل طرف.

$$-0.069 \approx r$$

حوّل لأبسط صورة.

يقل عدد الحالات التي يتم الإبلاغ عنها بمعدل يبلغ 6.9% تقريبًا كل عام. ولذلك، فالمعادلة التي تمثل هذه الحالة هي $N(t) = 190.9[1 + (-0.069)]^t$ أو $N(t) = 190.9(0.931)^t$

b. استخدم نموذجك لتوقع وقت انخفاض عدد الحالات إلى أقل من 20,000.

إيجاد الوقت الذي سيحدث فيه انخفاض في عدد الحالات إلى أقل من 20,000، ابحث عن تقاطع التمثيل البياني لـ $N(t) = 190.9(0.931)^t$ والخط $N(t) = 20$. توضح حاسبة التمثيلات البيانية أن قيمة t حيث $190.9(0.931)^t = 20$ تبلغ تقريبًا 32.

وبما أن t هو عدد الأعوام بعد عام 1980، يشير هذا النموذج إلى أنه بعد عام 32 + 1980 أو عام 2012، سينخفض عدد الحالات إلى أقل من 20,000 إذا استمر الانخفاض بهذا المعدل.

تكوين موجّه

7. السكان استخدم البيانات الموجودة في الجدول وافترض أن عدد سكان مقاطعة ديد في ميامي ينمو أسّيًا.

عدد السكان التقديري لمقاطعة ديد في مدينة ميامي في ولاية فلوريدا	العام
1.94	1990
2.25	2000

المصدر: مكتب إحصاءات السكان في الولايات المتحدة

A. حدد معدل النمو واكتب معادلة أسية لتضع نموذجًا لهذا النمو.

B. استخدم نموذجك لتوقع العام الذي سيتجاوز فيه عدد سكان مقاطعة ديد في ميامي 2.7 مليون نسمة.

في عام 2012

$$N = 1.94(1.015)^t$$

مثال إضافي

7. **الطباء** بيّن الجدول نمو أعداد الأطباء في إحدى الغابات بين عامي 2000 و 2010.

عدد الأطباء	العام
125	2000
264	2010

a. إذا كان عدد الأطباء يتزايد بمعدل أسّي، فحدد معدل الزيادة واكتب معادلة أسية تمثل هذه الحالة. 7.8%
 $N(t) = 125(1.078)^t$

b. استخدم نموذجك لتوقع عدد الأعوام التي سيستغرقها بلوغ عدد الأطباء 500. 18.5 عامًا تقريبًا

نصائح للمعلمين الجدد

الحاسبات البيانية إذا كان الطلبة يعانون من مشكلة عدم ظهور التمثيل البياني على آلاتهم الحاسبة، فعليهم التحقق من إعدادات WINDOW (النافذة) للتأكد من الضبط الصحيح لمعاملات الدالة.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-35 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يواجه الطلبة في التمرين 33 صعوبة في الإجابة على السؤال لأن العدد المبدئي للنمل الأبيض غير معطى. وبما أن السؤال قائم على النسب المئوية، فليكن العدد المبدئي للنمل الأبيض 100 نملة. وبالتالي تمثل النسبة 1% من النمل الأبيض نملة واحدة.

إجابات إضافية

27.

t	5	10	15	20	50
N	12,774	10,308	8317	6711	1853

28.

t	5	10	15	20	50
N	24,051	25,029	26,046	27,105	34,424

29.

t	5	10	15	20	50
N	19,572	21,652	23,953	26,499	48,575

30.

t	5	10	15	20	50
N	8053	6693	5562	4623	1523

31b. حوالي 1351.89 مليون أو

1.35 مليار جالون؛ حوالي 6212.13

مليون أو 6.21 مليار جالون

33. لا؛ يجب على شركة إكستريم

الرش 5 مّرات لضمان القضاء على

مستعمرة النمل الأبيض بكاملها

باستثناء 1%.

$$34a. r = 0.04079; N(t) = 28.6(1.04079)^t$$

34b. حوالي 279.3؛ سوف يتجاوز مؤشر

أسعار المستهلك (CPI) القيمة 350

خلال العامين 2020 و2021.

التمارين

مثل كل دالة بيانيًا وحلها. وضج المجال والمدي والتقاطعات والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة. (المثال 1)

1-10. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

- $f(x) = 2^{-x}$
- $r(x) = 5^x$
- $h(x) = 0.2^x + 2$
- $k(x) = 6^x$
- $m(x) = -(0.25)^x$
- $p(x) = 0.1^x$
- $q(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- $c(x) = 2^x - 3$
- $d(x) = 5^{-x} + 2$

استخدم التمثيل البياني لـ $f(x)$ لوصف التحويل الذي يؤدي إلى رسم $g(x)$. ثم ارسم تمثيلي $f(x)$ و $g(x)$ البيانيين. (المثالان 2 و3)

11-20. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

- $f(x) = 4^x; g(x) = 4^{x+2}$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$
- $f(x) = 3^x; g(x) = -2(3^x)$
- $f(x) = 2^x; g(x) = 2^{x-2} + 5$
- $f(x) = 10^x; g(x) = 10^{-x} + 3$
- $f(x) = e^x; g(x) = e^{2x}$
- $f(x) = e^x; g(x) = e^{x+2} - 1$
- $f(x) = e^x; g(x) = e^{-x} + 1$
- $f(x) = e^x; g(x) = 3e^x$
- $f(x) = e^x; g(x) = -(e^x) + 4$

21-24. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

المعرفة المالية انسخ الجدول أدناه وأكمله لإيجاد قيمة الاستثمار A لرأس المال P والمعدل r والزمن t إذا تمت إضافة الفائدة المركبة n مرات سنويًا. (المثالان 4 و5)

n	1	4	12	365	مستمرة
A					

- أعوام 5، $t = 5$ ، $r = 3\%$ ، $P = 500$ AED
- أعوام 10، $t = 10$ ، $r = 4.5\%$ ، $P = 1000$ AED
- عامًا 20، $t = 20$ ، $r = 5\%$ ، $P = 1000$ AED
- عامًا 30، $t = 30$ ، $r = 6\%$ ، $P = 5000$ AED

25. المعرفة المالية حصل أحمد على ميراث بقيمة 20000 AED في عمر 8 أعوام. لكنه لن يتمكن من إجراء المعاملات عليه قبل أن يبلغ 18 عامًا. (المثالان 4 و5)

35.36513 AED a. إذا تم وضع ميراثه في حساب ادخاري يحقق 4.6% كفاائدة مركبة شهريًا، فكم ستبلغ قيمة ميراث أحمد في يوم عيد ميلاده الثامن عشر؟

b. كم ستبلغ قيمة ميراث أحمد إذا تم وضعه في حساب يحقق فائدة مركبة بنسبة 4.2% باستمرار؟ 30439.23 AED

26. المعرفة المالية تستثمر إيمان مبلغ 1200 AED في شهادة إيداع. يوضح الجدول معدلات الفائدة التي يقدمها البنك على شهادات الإيداع لمدة 3 و5 أعوام. (المثالان 4 و5)

الأعوام	3	5
الفائدة	3.45%	4.75%
مركبة	مستمرة	شهريًا

- a. كم ستبلغ قيمة استثمارها مع كل خيار؟
شهادة إيداع لمدة 3 أعوام: 1330.85 AED
شهادة إيداع لمدة 5 أعوام: 1520.98 AED
- b. كم ستبلغ قيمة استثمارها إذا تمت إضافة الفائدة المركبة باستمرار لشهادة الإيداع لمدة 5 أعوام؟ 1521.69 AED

التعداد انسخ الجدول وأكمله لإيجاد العدد N لنوع مهدد بالانقراض بعد المدة t إذا كان تعداده المبدئي N_0 ومعدل السنوي r أو معدله المستمر k في الزيادة أو الانخفاض. (المثال 6)

27-30. انظر الحاشية.

t	5	10	15	20	50
N					

- $N_0 = 15831$ ، $r = -4.2\%$
- $N_0 = 23112$ ، $r = 0.8\%$
- $N_0 = 17692$ ، $k = 2.02\%$
- $N_0 = 9689$ ، $k = -3.7\%$

31a-b. انظر الحاشية.

31. الماء كان استهلاك الماء على مستوى العالم حوالي 294.2 مليون جالون في عام 1950. إذا ارتفع استهلاك الماء بالمعدل المذكور، فضع تقديرًا لمقدار الماء المستخدم في عام 2000 وتوقع المقدار في عام 2050. (المثال 6)

a. 3% سنويًا b. 3.05% باستمرار

32a. حوالي 38,107 AED؛ حوالي 43,729 AED

32. الأجر تحصل ياسمين على زيادة تبلغ 3.5% في نهاية كل عام من جهة عملها تعويضًا لها عن التضخم. عندما بدأت العمل في الشركة عام 1994، كانت تحصل على مرتب يبلغ 31,000 AED. (المثال 6)

a. كم كان مرتب ياسمين في عامي 2000 و2004؟

b. إذا ظلت ياسمين تتلقى زيادة في نهاية كل عام، فما المبلغ

الذي ستحصل عليه في عامها الأخير إذا كانت تخطط

للتقاعد في عام 2024؟ حوالي 87,011 AED

33. مكافحة الحشرات فكر في ضمان منع النمل الأبيض الذي تقدمه

شركة إكستريم في إعلانها بالأسفل.

إكستريم
ملوثة ومدمرة سكين

مكافحة الحشرات والنمل الأبيض
منذ 1995

كشف مجاني عن النمل الأبيض

ضمان القضاء على النمل الأبيض؛ تتم إزالة 60% من مستعمرات النمل الأبيض عند كل معالجة. يتم القضاء عليه كله باستثناء 1% بعد 3 معالجات فقط!

التمويل متوفر
555-3267

إذا كانت العبارة الأولى في هذا الزعم صحيحة، فضع تقييمًا لمصادقية العبارة الثانية. اشرح استدلالك. (المثال 6) انظر الحاشية.

84 | الدرس 1-2 | الدوال الأسية

خيارات الواجب المنزلي المتمايز

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1-35, 59-63, 65-79	34- 2 زوجية، 59- 63, 65- 75
OL ضمن المستوى	35- 1 فردية، 45- 36، 75- 47 فردية، 63- 58، 79- 65	36-63, 65-75
BL أعلى من المستوى	36-79	

34. **التضخم** مؤشر أسعار المستهلكين (CPI) هو رقم دلالي يقيس متوسط سعر السلع والخدمات للمستهلكين. يشير التغير في مؤشر أسعار المستهلكين إلى معدل النمو في التضخم. في عام 1958، كان مؤشر أسعار المستهلكين 28.6 وفي عام 2008 بلغ مؤشر أسعار المستهلكين 211.08. (المثال 7) **a-b. انظر الحاشية.**

- a. حدد معدل نمو التضخم بين عامي 1958 و2008. استخدم هذا المعدل في كتابة معادلة أسية لتمثيل هذا الموقف.
b. ماذا ستكون قراءة مؤشر أسعار المستهلكين في عام 2015؟ بهذا المعدل، متى سيتجاوز مؤشر أسعار المستهلكين 350؟

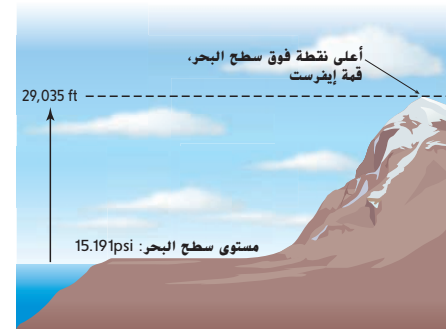
35. **البنزين** كتب محمد معادلة أسية لتمثيل تكلفة البنزين. وقد توصل إلى متوسط تكلفة جالون البنزين على مدار عامين واستخدم هذه البيانات في نموذج التمثيلي. (المثال 7) **a, d. انظر الحاشية.**

متوسط التكلفة لكل جالون من البنزين	
العام	التكلفة (AED)
1990	1.19
2011	3.91

- a. إذا كان متوسط تكلفة البنزين يتزايد بمعدل أسّي، فحدد معدل الزيادة. اكتب معادلة أسية لتمثيل هذا الموقف.
b. استخدم نموذجك التمثيلي في توقع تكلفة تكلفة جالون البنزين في عامي 2015 و 2017. **حوالي AED 4.94؛ حوالي AED 5.54**
c. متى سيتجاوز متوسط تكلفة جالون البنزين AED 7؟ **في وقت ما خلال عامي 2021-2022**
d. لماذا من المحتمل ألا يقدم النموذج الأسّي تمثيلاً صحيحاً لمتوسط أسعار البنزين؟

36. **الفيزياء** يبلغ الضغط الجوي عند مستوى البحر 15.191 رطلاً في البوصة المربعة (psi). وينخفض باستمرار بمعدل 0.004% مع زيادة الارتفاع بمقدار x قدم.

- a. اكتب دالة تمثيلية للتضائل الأسّي المستمر تمثل الضغط الجوي $a(x) = 15.191e^{-0.00004x}$
b. استخدم النموذج لإيجاد المعدل التقريبي للضغط الجوي عند قمة جبل إيفرست. **حوالي psi 4.76**



- c. إذا كانت طائرة إفتاح مروحية معينة لا تستطيع الطيران إلا في ضغط جوي يزيد عن 5.5 أرتال في البوصة المربعة، فما الارتفاع الذي تستطيع الطيران عنده فوق جبل إيفرست؟

37. **النشاط الإشعاعي** عمر النصف للمادة المشعة هو مقدار الوقت اللازم لكي يتحلل نصف عدد ذرات المادة. يُستخدم اليورانيوم-235 كوقود لمحطة توليد كهرباء تجارية. يبلغ عمره النصفي 704 مليون سنة.

- a. كم عدد جرامات اليورانيوم-235 التي ستبقى بعد مليون سنة إذا بدأت بمقدار 200 جرام؟ **حوالي g 199.8**
b. كم عدد جرامات اليورانيوم-235 التي ستبقى بعد 4540 مليون سنة إذا بدأت بمقدار 200 جرام؟ **حوالي g 2.29**

38. **علم النبات** في ظل ظروف النمو الملائمة، يتضاعف عدد نوع معين من النباتات خلال 12 سنة. افترض أن أحد المرامي يحتوي على 46 نباتاً من هذا النوع. كم عدد النباتات التي ستكون موجودة بعد 20 و65 و x يوم؟

حوالي؛ 1965؛ $N(x) = 46e^{0.05776277x}$

39. **النشاط الإشعاعي** تعتمد طريقة تحديد العمر بالكربون المشع على استخدام الكربون 14 في تقدير عمر المواد العضوية التي يشيع وجودها في المواقع الأثرية. يبلغ عمر النصف للكربون 14 نحو 5.73 آلاف سنة تقريباً.

- a. اكتب معادلة تمثيلية للتضائل الأسّي. **$N(t) = N_0e^{-0.1209681t}$**
b. كم عدد جرامات الكربون 14 التي ستبقى بعد 12.82 ألف سنة إذا بدأت بمقدار 7 جرامات؟ **حوالي g 1.48**

c. استخدم نموذجك في تقدير الوقت الذي سيتبقى فيه جرام واحد فقط من الكمية الأصلية التي تبلغ 7 جرامات من الكربون 14. **خلال حوالي 16.09 ألف سنة**

40. **الميكروبيولوجيا** يتسم نوع معين من البكتيريا يُستخدم في معالجة تسريبات النفط بزمّن تضاعف يبلغ 15 دقيقة. افترض أن مستعمرة بدأت بعدد من البكتيريا يبلغ 1.

- a. اكتب معادلة تمثيلية لهذا النمو الأسّي. **انظر الحاشية.**
b. كم عدد البكتيريا التي ستكون موجودة تقريباً بعد 55 دقيقة؟ **13**
c. عدد البكتيريا الذي يبلغ 8192 يكفي لتنظيف تسريب بسيط من النفط. استخدم نموذج في توقع الوقت الذي تستغرقه المستعمرة لتصل إلى هذا الحجم.

حوالي min = 3h 15 min 195

41. **الموسوعة** زاد عدد المقالات الذي يشكل محتوى مفتوحاً عبر الإنترنت أسياً خلال أعوامه القليلة الأولى. ويمكن تمثيل عدد المقالات، $A(t)$ بعد t عام من عام 2001 بالمعادلة $A(t) = 16198 \times 2.13^t$

- a. وفقاً لهذا النموذج، كم عدد المقالات التي كانت تشكل الموسوعة في عام 2001؟ ما معدل تزايد عدد المقالات؟ **16,198 مقالاً؛ 113%**
b. ما العام الذي وصلت فيه الموسوعة إلى مليون مقال؟ **2006**
c. توقع عدد المقالات التي ستكون موجودة في بداية عام 2018. **6,193,193,554 مقالاً**

42. **البخاطرة** يزايد احتمال وقوع حادث سيارة أسياً إذا تعاطى السائق نوعاً من الأدوية. يمكن تمثيل العلاقة بالمعادلة $A(c) = 6e^{12.8c}$ ، حيث A تمثل النسبة المئوية لاحتمال وقوع حادث و c هي تركيز الدواء في دم السائق.

- a. النسبة المقبولة لتركيز الدواء في الدم 0.08. ما هي النسبة المئوية لاحتمال وقوع حادث سيارة عند هذا التركيز؟ **16.7%**
b. ما تركيز الدواء في الدم الذي يحقق احتمالاً بنسبة 50% لوقوع حادث سيارة؟ **0.166**

إجابات إضافية

$$35a. 0.0586; N(t) = 1.19(1.0586)^t$$

35d. الإجابة النموذجية: لا تزيد تكلفة

البنزين أو تتناقص بمعدل ثابت

عادة. بل تتقلب نتيجةً للكثير من

العوامل كالظروف الاقتصادية

وتوفر النفط وغيرها.

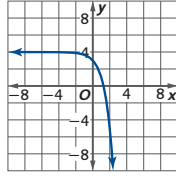
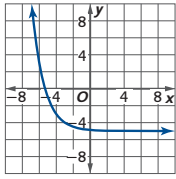
$$40a. N(t) = N_0e^{0.04620981t}$$



حدد التحولات في الدالة الأم المذكورة التي تؤدي إلى كل تمثيل بياني.
56-57. انظر الحاشية.

$$56. f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$57. f(x) = 3^{-x}$$



58. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تبحث في متوسط معدل التغير للدوال الأسية.

a-f. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. العرض البياني مثل $f(x) = b^x$ عندما تكون $b = 2, 3, 4, 5$.

b. العرض التحليلي أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة في الفترة $[0, 2]$.

c. العرض الكلامي ما الذي يمكن أن تتوصل إليه بخصوص متوسط معدل التغير في b^x عندما تتزايد b ؟ كيف يظهر هذا في التمثيلات البيانية في الجزء a؟

b. العرض البياني مثل $f(x) = b^{-x}$ عندما تكون $b = 2, 3, 4, 5$.

e. العرض التحليلي أوجد متوسط معدل التغير في كل دالة في الفترة $[0, 2]$.

f. العرض الكلامي ما الذي يمكن أن تتوصل إليه بخصوص متوسط معدل التغير في b^{-x} عندما تتزايد b ؟ كيف يظهر هذا في التمثيلات البيانية في الجزء d؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

تحليل الخطأ يحدد إبراهيم وإيمان قيمة استثمار بمبلغ 550 AED بعد 12 عامًا في حساب ادخاري يحقق فائدة بنسبة 3.5% مركبة شهريًا.

يعتقد إبراهيم أن قيمة الاستثمار تبلغ 83708 AED وتعتقد إيمان أن قيمته تبلغ 836.57 AED. فأيهما على صواب؟ اشرح. انظر الحاشية.

الاستنتاج اذكر ما إذا كانت كل عبارة صواب أم خطأ. اشرح استدلالك.

60. لا يمكن أن تكون للدوال الأسية قيود أبدًا على المجال.

61. للدوال الأسية قيود دائمًا على المدى.

62. للتمثيلات البيانية للدوال الأسية مستقيم مقارب دائمًا.

63. مسألة غير محددة الإجابة اكتب مثالاً على دالة أسية متزايدة يتقاطع سالب مع المحور الرأسي y . الإجابة النموذجية: $f(x) = 2^x - 4$.

64. التحدي تستثمر فريدة 1275 AED في حساب يضيف فائدة مركبة ربع سنوية تبلغ 8%. لكنها تسحب 100 في نهاية كل عام. كم تبلغ قيمة الحساب في نهاية العام الخامس؟ حوالي 1305.07 AED.

65. الاستنتاج الدالتان بالصيغة $f(x) = b^x$ يكون بينهما أحيانًا أو دائمًا أو لا يكون بينهما أبدًا زوج مرتب مشترك واحد على الأقل. انظر الحاشية.

66. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين المجال وال المدى والتقاطعات والتناظر والاتصال وسلوك التزايد/التناقص والسلوك الطرفي بين الدوال الأصلية الأسية ودوال القوة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

43. حاسبة التمثيل البياني يوضح الجدول عدد المدونات الموجودة بالمليون كل 6 أشهر. a-c. انظر الحاشية.

الأشهر	1	7	13	19	25	31
المدونات	0.7	2	4	8	16	31

a. باستخدام أداة الانحدار الأسّي في الحاسبة، توصل إلى دالة تمثل البيانات.

b. بعد كم شهر وصل عدد المدونات إلى 20 مليونًا؟

c. توقع عدد المدونات بعد 48 شهرًا.

44. اللغات علم مقارنة اللغة والتاريخ هو تخصص في اللغويات يدرس التغير في اللغات. تمثل المعادلة $c = e^{-Lr}$ هذا التغير. حيث c هي نسبة الكلمات التي تظل بدون تغيير و L هي الزمن الذي مر منذ تغيرت لغتان و r هو معدل الاستبدال.

a. إذا تغيرت لغتان منذ 5 أعوام ومعدل الاستبدال يبلغ 43.13%. فما نسبة الكلمات التي تظل بدون تغيير؟ 0.1157.

b. بعد كم عام ستظل نسبة 1% من الكلمات بدون تغيير؟ 10.68 أعوام.

45. المعرفة المالية رُزق زوجان للتو بطفل ويريدان بدء وضع وديعة لتعليمه الجامعي فورًا. استخدم المعلومات الواردة أدناه لتحديد مقدار المال الذي ينبغي أن يستثمراه. حوالي 11876.29 AED.



حاسبة التمثيل البياني أوجد قيمة x التي تؤدي إلى صحة كل معادلة أو متباينة أدناه. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

$$46. 2^x < 4 \quad x < 2 \quad 47. e^{2x} = 3 \quad x = 0.55$$

$$48. -e^x > -2 \quad x < 0.69 \quad 49. 2^{-4x} \leq 8 \quad x \geq -0.75$$

اذكر المجال والمدى والاتصال وسلوك التزايد/التناقص لدالة أسية بالتقاطع المذكور والسلوك الطرفي. ثم مثل الدالة بيانيًا. انظر الحاشية. 50-52.

$$50. f(0) = -1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$51. f(0) = 4, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

$$52. f(0) = 3, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

حدد معادلة كل دالة بعد التحول المذكور للدالة الأم. 53-55. انظر الحاشية.

$$53. f(x) = 5^x \text{ مزاخة بمقدار 3 وحدات نحو اليسار و 4 وحدات إلى الأسفل}$$

$$54. f(x) = 0.25^x \text{ مضغوطة رأسيًا بمعامل مقداره 3 ومزاخة 9 وحدات إلى اليسار و 12 وحدة لأعلى}$$

$$55. f(x) = 4^x \text{ مكموسة حول المحور الأفقي } x \text{ ومزاخة بمقدار وحدة إلى اليسار و 6 وحدات إلى أعلى}$$

86 | الدرس 1-2 | الدوال الأسية

56. انسحاب بمقدار 3 وحدات نحو اليسار و 5 وحدات إلى الأسفل

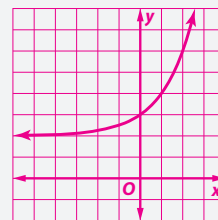
57. انعكاس على المحور الأفقي x و انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى

59. الإجابة النموذجية: إيمان؛ وقد استخدمت المعادلة

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 550 \times \left(1 + \frac{0.035}{12}\right)^{(12)(12)}$$

836.57 AED = حدد إبراهيم القيمة إذا كانت الفائدة مركبة

مستمرة. $AEDA = Pe^{rt} = 550 \times e^{(0.035)(12)} = 837.08$.



$$53. f(x) = 5^{x+3} - 4$$

$$54. f(x) = (3)^{0.25x+9} + 12$$

$$55. f(x) = -4^{x+1} + 6$$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين رقم 59.

ينبغي على الطلاب التعويض بالقيم

المعطاة في الصيغة الصحيحة

الخاصة بالفائدة المركبة شهريًا. $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

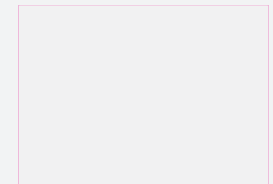
الصحيحة. إيمان على صواب.

استخدم إبراهيم الصيغة الخاصة

بالفائدة المركبة المستمرة.

إجابات إضافية

$$43a. f(x) = 0.7378 \times 1.131^x$$



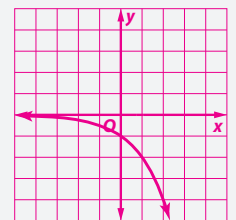
[0, 35] scl: 5 by [0, 35] scl: 5

43b. 26.8 شهرًا

43c. 271.7 مليون

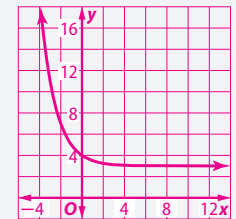
50. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, 0)$

دالة متصلة ومتناقصة ضمن المجال $(-\infty, \infty)$ ؛ الإجابة النموذجية:



51. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (3, \infty)$

دالة متصلة ومتناقصة ضمن المجال $(-\infty, \infty)$ ؛ الإجابة النموذجية:



52. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (2, \infty)$

متصلة ومتزايدة ضمن المجال $(-\infty, \infty)$ ؛ الإجابة النموذجية:

86 | الدرس 1-2 | الدوال الأسية ذات الأس المتغير

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

الطلاب قم بعمل عدة نسخ من بطاقات تضم ست معادلات للنمو والتضائل الأسّي. وأعط كل طالب معادلة واحدة. وأثناء مغادرة الطلاب الوحدة، يجب على كل طالب أن يخبرك إن كانت المعادلة المعطاة إليه تمثل نموًا أم تضائلًا مع التعليل.

إجابات إضافية

60. صواب، الإجابة النموذجية: تعرّف الدالة الأسية من خلال الصيغة التالية $f(x) = ab^x$ حيث يكون $b > 0$ $b \neq 1$ و $a \neq 0$. ويؤدي إدخال أي قيمة تقع في هذا المجال ضمن هذه الصيغة إلى إعطاء ناتج حقيقي للدالة.

61. صواب، الإجابة النموذجية: يقترب مدى الدالة الأسية على الدوام من قيمة لن يبلغها هذا المدى على الإطلاق، ولذلك هناك دائمًا حدّ لهذا المدى.

62. صواب، الإجابة النموذجية: بما أن الدالة الأسية تقترب على الدوام من قيمة محددة في المدى ولكنها لا تبلغها على الإطلاق، فسوف يكون لهذه الدالة خط تقارب دائمًا.

65. دائمًا، الإجابة النموذجية: تملك كافة الدوال ذات الصيغة $f(x) = b^x$ نقطة مشتركة إحداثياتها (1, 0) لأن أي رقم b مرفوعًا إلى الأس صفر يعطي العدد 1.

70. $D = \{x \mid x \neq 2\}$: خط التقارب: $y = 0$.

71. $D = \{x \mid x \neq -5\}$ أو $D = \{x \mid x \neq -5\}$: خط التقارب: $y = 0$. الفجوة: $x = 1$.

72. $D = \{x \mid x \neq 4\}$: الفجوة: $x = 4$.

75a. $\{13,264, 4184, 27,954, 4412, 21,484, 6366, 13,423, 4851, 16,849, 2415, 19,563, 5982, 17,284, 6949\}$

75b. $\{13,264, 16,849, 17,284, 19,563, 21,484, 13,423, 27,954, 4184, 4412, 4851, 5982, 6366, 6949\}$

75c. نعم؛ لا يقترن أي عنصر من المجال بأكثر من عنصر واحد من المدى.

75d. الإجابة النموذجية: لا؛ ليس من المنطقي إعداد معادلة تنبؤ لهذه الحالة. فلا يمكنك تحديد عدد الحضور في المدرسة بناءً على عدد الطلبات المستقبلية.

مراجعة شاملة

أوجد حل كل من المتباينات التالية. (الدرس 6-1)

67. $(x-3)(x+2) \leq 0$ $[-2, 3]$

68. $x^2 + 6x \leq -x - 4$

69. $3x^2 + 15 \geq x^2 + 15x$

$[-6.372281, -0.6277187]$

$(-\infty, 1.1882623] \cup [6.3117377, \infty)$

ابحث عن مجال كل دالة ومعادلات أي مستقيم مقارب رأسي أو أفقي، مع ملاحظة أية فجوات. (الدرس 1-5) **70-72. انظر الحاشية.**

70. $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x + 4}$

71. $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 4x - 5}$

72. $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$

73. درجة الحرارة قاعدة تحويل درجات الحرارة المئوية إلى فهرنهايت هي $F(x) = \frac{9}{5}x + 32$ (الدرس 7-1). أوجد الدالة العكسية $F^{-1}(x)$ وبرهن على أن $F^{-1}(F(x)) = x$ و $F(F^{-1}(x)) = x$. اشرح الفرض الذي تحقّقه $F^{-1}(x)$ يمكن استخدامها لتحويل درجات الحرارة الفهرنهايت إلى درجات مئوية.

74. التسوق تريد ليلي شراء حذاء تزلج معروض للبيع بخخص 30% من السعر الأصلي البالغ 149 AED. وكانت الضريبة على المبيعات 5.75%. (الدرس 1-6)

a. ممثّل لسعر حذاء التزلج بعد الخصم وسعر حذاء التزلج بعد ضريبة المبيعات باستخدام ترميز الدالة. افترض أن x يمثل سعر حذاء التزلج و $p(x)$ يمثل السعر بعد خصم 30% و $s(x)$ يمثل السعر بعد ضريبة المبيعات. $p(x) = 0.70x$; $s(x) = 1.0575x$

b. ما تركيبة الدوال التي تمثل سعر حذاء التزلج، $s[p(x)]$ أم $p[s(x)]$ ؟ اشرح استنتاجك. **بما أن $s[p(x)] = p[s(x)]$ ، فكلتا الدالتان تمثلان سعر حذاء التزلج.**

c. كم ستدفع ليلي مقابل حذاء التزلج؟ **110.30 AED**

75. التعلیم يوضح الجدول عدد المتقدمين حديثًا لجامعات محددة في عام معين وعدد المتضمنين حديثًا. (الدرس 1-1)

الجامعة	المتقدمون	المتضمنون
جامعة أوبيرن	13,264	4,184
جامعة كاليفورنيا ديفيز	2,7954	4,412
جامعة إلينوي إربانا تشامبين	21,484	6,366
جامعة ولاية فلوريدا	13,423	4,851
جامعة نيويورك ستوني بروك الحكومية	16,849	2,415
جامعة ولاية أوهايو	19,563	5,982
جامعة تكساس إيه آند إم	17,284	6,949

المصدر: How to Get Into College

a. اذكر العلاقة كمجموعة من الأزواج المرتبة.
b. حدد المجال والمدى للعلاقة.
c. حدد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة. اشرح.
d. بافتراض أن العلاقة تمثل دالة، فهل من المنطقي تحديد معادلة توقع لهذه الحالة؟ اشرح. **a-d. انظر الحاشية.**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

76. SAT/ACT مجموعة من أعداد n لها متوسط (حسابي) يبلغ $3k$ ومجموع يبلغ $12m$. حيث k و m موجبان. ما قيمة n بالصلة بكل من k و m ؟ **A**

A $\frac{4m}{k}$ C $\frac{4k}{m}$ E $\frac{k}{4m}$
B $36km$ D $\frac{m}{4k}$

77. كان عدد البكتيريا في مستعمرة ينمو أسّيًا. كم بلغ عدد البكتيريا التقريبي في الساعة 7 مساءً؟ **H**

الوقت	عدد البكتيريا
2 مساءً	100
4 مساءً	4000

F 15,700

G 159,540

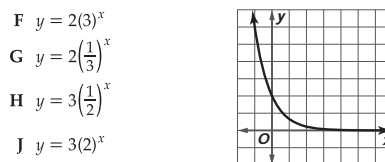
H 1,011,929

J 6,37,2392

78. مراجعة إذا كان $4x + 2 = 48$ ، فإن $4^x = ?$ **A**

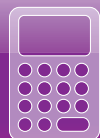
A 3.0 C 6.9
B 6.4 D 12.0

79. مراجعة ما معادلة الدالة؟ **G**



خيارات الواجب المنزلي المتميز

التوسع اطلب من الطلاب استخدام شبكة الإنترنت للبحث عن بيانات من الحياة اليومية يمكن تمثيلها باستخدام النمو أو التضائل الأسّي. وعليهم تحديد معادلة لتمثيل البيانات واستخدام المعادلة لإجراء توقع. واطلب منهم مشاركة نتائجهم مع الصف.



مختبر تقنية التمثيل البياني المعرفة المالية: الدوال الأسية

الهدف

- حساب القيم المستقبلية للمعاشات والمدفوعات الشهرية.

1 التركيز

الهدف حساب القيم المستقبلية للمعاشات والمدفوعات الشهرية.

نصيحة تدريسية

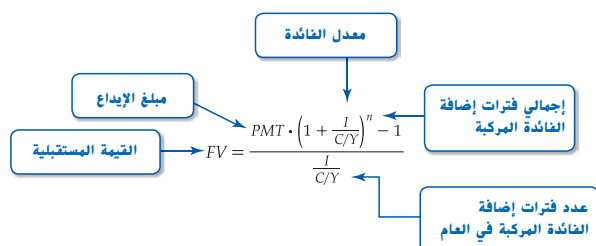
قبل الشروع في هذا التدريب العملي، عرّف الطلبة على برنامج التطبيقات المالية الموجود على آلاتهم الحاسبة. الخيار العلوي في القائمة، أداة إيجاد القيمة الزمنية للنقود (TVM)، هي الخانة التي يمكن للطلاب إدخال القيم التي تعطى إليهم فيها، أما القيم غير المعلومة فتترك قيمتها 0. بينما تستخدم باقي خيارات القائمة لتحديد المتغيرات غير المعلومة بناءً على القيم التي قاموا بإدخالها.

نصيحة دراسية

قاعدة القيمة المستقبلية يجب أن تكون الأقساط دورية وبقيمة متساوية لكي تكون القاعدة دقيقة.

في الدرس 2-1، استخدمت دوالاً أسية لحساب الفائدة المركبة. وفي قاعدة إضافة الفائدة المركبة، تفترض أن الإيداع المبدئي ثم وأن المستثمر لا يودع أو يسحب مطلقاً أي أموال. ولا تتبع أنواع أخرى من الاستثمارات هذه القاعدة البسيطة لإضافة الفائدة المركبة.

عندما يسحب المستثمر معاشاً، فإنه يودع مبالغ متماثلة في الحساب على فترات أو مدد زمنية منتظمة. ويتم احتساب الفائدة المركبة في وقت كل إيداع. ويمكننا تحديد القيمة المستقبلية لمعاش أو قيمته في نهاية فترة ما باستخدام القاعدة أدناه.



بما أن حل هذه المعادلة يدوياً قد يكون متعباً، فيمكنك استخدام التطبيق المالي في TI-84. يمكن استخدام أداة حل القيمة الزمنية للمال للتوصل إلى أية قيمة غير معروفة في هذه القاعدة. يتم إدخال كل المتغيرات المعروفة ويتم إدخال أصفار للمتغيرات غير المعروفة.

نشاط 1 التوصل إلى قيمة مستقبلية لمعاش سنوي

يدفع أحد المستثمرين AED 600 كل ربع سنة كمعاش. ويحقق هذا المعاش فائدة سنوية تبلغ 7.24%. ماذا ستكون قيمة المعاش بعد 15 عاماً؟

الخطوة 1 تحديد Finance في قائمة التطبيقات (APPS). ثم تحديد CALC, TVM Solver (أداة إيجاد القيمة الزمنية للنقود).



الخطوة 2 إدخال البيانات.

تم المدفوعات كل ربع عام على مدار 15 عاماً، ولذلك هناك 4 x 15 أو 60 دفعة. وتكون القيمة أو المبلغ الحالي في البداية AED 0. وتكون القيمة المستقبلية غير معروفة، لذا يتم استخدام 0 كقيمة رمزية. تتم إضافة الفائدة المركبة كل ربع عام، وبذلك تبلغ قيمة P/Y و C/Y ما مقداره 4 (P/Y و C/Y متماثلان). ويتم الدفع في نهاية كل شهر، ولذلك اختر END.

الخطوة 3 الحساب.

اخرج من الشاشة ثم عد إلى تطبيق Finance (موارد مالية). حدد tvn_FV لحساب القيمة المستقبلية، ثم اضغط على **ENTER**. وتكون النتيجة هي القيمة المستقبلية مخصومة من القيمة الحالية، ولذلك يتم تجاهل إشارة السالب.

وبعد 15 عاماً، ستبلغ قيمة المعاش السنوي حوالي AED 64,103.

N=60
I%=7.24
PV=0
PMT=600
FV=0
P/Y=4
C/Y=4
PMT: **BEGIN**

tvm_FV
-64102.91402

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب على مجموعاتٍ من اثنين أو ثلاثة ذوي قدراتٍ متنوعة. واطلب من كل مجموعة التعاون على إتمام النشاطين 1 و2.

- عند إدخال الطلاب عدداً خاصاً بـ 1، تأكد ألا يقوموا بتغيير العدد إلى الصيغة العشرية.
- بالنسبة للنشاط 2، شجّع الطلاب على تغيير معدل الفائدة أو عدد المدفوعات كي يروا كيف يغيّر ذلك المبلغ الإجمالي المسدّد طيلة مدة القرض.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين 1-12.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 1 و 7 لتقدير إذا كان بوسع الطلبة الاستفادة من التطبيقات المالية للحاسبة البيانية لإجراء الحسابات.

من العملي إلى النظري

يمثل التمرين 13 طريقة تأثير المتغيرات المختلفة على المتغيرات الأخرى ضمن المعادلة.

إجابات إضافية

7. 449,688.89 AED؛ 1249.14 AED
8. 255,482.31 AED؛ 1064.51 AED
9. 24,619.84 AED؛ 410.33 AED
- 13d. 323,735.12 AED؛ 830.09 AED (ملاحظة: نفترض هنا أن الدفعة 13 ليست دفعة أصل الدين فقط.)
- 13e. الإجابة النموذجية: أتت الدفعة الشهرية الأدنى نتيجةً لتخفيض معدل الفائدة. وهذا وقّر القدر الأكبر من المال.

عند سحب قرض لشراء شيء كبير مثل منزل أو سيارة، يهتم المستهلكون عادةً بالمبلغ الشهري الذي سيدفعونه. بينما يمكن استخدام الدالة الآسية أدناه لتحديد الدفعة الشهرية، والتي يمكن أيضًا احتسابها باستخدام تطبيق الموارد المالية في TI-84.

القيمة الحالية

$$PMT = \frac{PV \times \frac{I}{CY}}{1 - \left(1 + \frac{I}{CY}\right)^{-n}}$$

نصيحة دراسية

المبالغ المقدمة عندما يدفع المستهلك مبلغًا مقدّمًا، يتم خصم ذلك المبلغ من القيمة الحالية للقرض قبل حساب أي شيء آخر.

نشاط 2 حساب القسط الشهري

اقتترضت 170,000 AED من البنك لشراء منزل. ويبلغ معدل الفائدة لهذا القرض الذي مدته 30 عامًا 4.5%. احسب قسطك الشهري والمبلغ المدفوع بعد 30 عامًا.

الخطوة 1 اختيار Finance من قائمة التطبيقات (APPS). ثم اختيار CALC. TVM Solver.

الخطوة 2 إدخال البيانات.

يبلغ عدد الأقساط $N = 30 \times 12 = 360$.
معدل الفائدة I يبلغ 4.5%.
القيمة الحالية للقرض PV تبلغ 170,000 AED.
القسط الشهري والقيمة المستقبلية غير معروفين.
عدد المدفوعات في العام P/Y و C/Y يبلغ 12.
ويتم الدفع في نهاية الشهر، ولذلك اختر نهاية.

الخطوة 3 الحساب.

تحديد vm_Pmt لحساب القسط الشهري.
ثم اضغط على **ENTER**. اضرب القسط الشهري في 360.

سيبلغ قسطك الشهري 861.37 AED والمبلغ الإجمالي الذي سيتم رده 310,091.41 AED.

```
N=360
I%=4.5
PV=170000
PMT=0
FV=0
P/Y=12
C/Y=12
PMT:END BEGIN
```

```
tvm_Pmt
-861.3650267
Ans*360
-310091.4096
```

تمارين

احسب القيمة المستقبلية لكل معاش مما يلي.

1. 800 AED كل نصف عام، 12 عامًا، 4% 2. 24337.49 AED 3. 34029.37 AED 5.5% 6 أعوام، 5.5%
3. 200 AED شهريًا، 3 أعوام، 7% 4. 1000 سنويًا، 14 عامًا، 6.25% 5. 7986.02 AED
5. 450 AED كل ربع عام، 8 أعوام، 5.5% 6. 300 AED كل نصف شهر، 18 عامًا، 4.35% 7. 48904.33 AED 17936.50 AED

احسب المبلغ الشهري والمبلغ الإجمالي الذي سيتم رده عن كل قرض فيما يلي. 7-9. انظر الحاشية.

7. 220,000 AED 30 عامًا، 5.5% 8. 140,000 AED 20 عامًا، 6.75% 9. 20,000 AED 5 أعوام، 8.5%
10. 5,000 AED 5 أعوام، 4.25% 11. 45,000 AED 10 أعوام، 3.5% 12. 180,000 AED 30 عامًا، 6.5%
13. تغيير القيم قديؤثر تغيير قيمة أي من المتغيرات بشدة على أقساط القرض. ويبلغ القسط الشهري لقرض لمدة 30 عامًا بمبلغ 150,000 AED بفائدة 6% 899.33 AED إجمالي مبلغ دفع 323,757.28 AED. احسب المبلغ الشهري والمبلغ الإجمالي للقرض في كل سيناريو.

a. عند دفع 20,000 AED عند الشراء. 280,589.65 AED؛ 779.42 AED

b. عند دفع 4% كفائدة بدلًا من 6%. 257,804.26 AED؛ 716.12 AED

c. عند رد القرض خلال 20 عامًا بدلًا من 30. 257,915.18 AED؛ 1074.65 AED

d. دفع 13 قسطًا في العام. انظر الحاشية.

e. أيها أكثر توفيرًا في المال؟ أيها الأقل في القسط الشهري؟ انظر الحاشية.

السؤال الأساسي

لقد استخدم الطلاب الدوال الآسية لتمثيل الحالات التي تتضمن استثمارات مالية.

اسأل:

- كيف يمكن أن تساعد معرفتك المالية في اتخاذ قرارات جيدة؟ الإجابة النموذجية: إذا كان لديك معرفة مالية، فلا بد أن تستوعب المفردات المالية وتعرف طريقة تحليل البيانات والاتجاهات المالية. فمن شأن تطبيق هذه المهارات بنجاح

الدوال اللوغاريتمية

لماذا؟

الحالي

السابق

- يتم قياس مستوى كثافة الصوت بوحدة الديسيبل. ويبلغ قياس الهمسة 20 الديسيبل والمحادثة العادية 60 الديسيبل والمكنسة الكهربائية 80 الديسيبل. ويبلغ أقصى حد لصوت الموسيقى التي يتم تشغيلها من خلال ساعة 100 الديسيبل. ويعطي مقياس الديسيبل مثالاً على المقياس اللوغاريتمي.

- 1 وضع تقييمًا للتعبير التي تتضمن لوغاريتمات.
- 2 ارسم التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية وحللها.

- 1 تمثّل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا وحللها. (الدرس 1-2)

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-2 تمثيل الدوال الأسية بيانيًا وتحليلها.

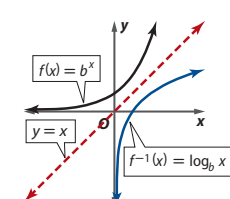
الدرس 2-2 إيجاد قيمة التعبيرات التي تنطوي على لوغاريتمات. تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا وتحليلها.

بعد الدرس 2-2 استخدام خصائص اللوغاريتمات لتبسيط التعبيرات التي تنطوي على لوغاريتمات.

مفردات جديدة

الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b (logarithmic function) (with base b)
اللوغاريتم (logarithm)
اللوغاريتم العادي (common logarithm)
اللوغاريتم الطبيعي (natural logarithm)

1 **الدوال والتعبير اللوغاريتمية** تذكر من الدرس 1-7 أن التمثيلات البيانية التي تمثل بيانيًا الدوال التي تنجح في اختبار الخط الأفقي من النوع "واحد لواحد" ولها معكوسات تعد دوالاً أيضاً. بالعودة إلى التمثيلات في الصفحة 159، يمكنك أن ترى أن الدوال الأسية بالصيغة $f(x) = b^x$ تنجح في اختبار الخط الأفقي ولهذا فهي "واحد لواحد" بمعكوسات تمثل دوالاً.



يطلق على معكوس $f(x) = b^x$ دالة لوغاريتمية بالأساس b . ويُرمز لها بـ $\log_b x$. ونقرأ أساس \log_b لـ x . هذا يعني أنه إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و $f(x) = b^x$ و $f^{-1}(x) = \log_b x$ ، كما يظهر في التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في السطر $y = x$.

يقدم تعريف المعكوس هذا ربطاً مفيداً بين المعادلات الأسية واللوغاريتمية.



المفهوم الأساسي الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسّي

إذا كان $b \neq 1$ و $b > 0$ و $x > 0$ ، إذا يكون

الشكل الأسّي
 $b^y = x$
أس
أساس

الشكل اللوغاريتمي
 $\log_b x = y$
أس
أساس

فقط في حالة أن

توضح العبارة الواردة أعلاه أن $\log_b x$ هو الأس الذي يجب رفع b إليه للحصول على x . ولهذا، فعند تقييم **اللوغاريتمات**، تذكر أن اللوغاريتم أس.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتمات

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log_3 81$

افترض أن $\log_3 81 = y$.

اكتب بصيغة أسية. $3^y = 81$

$3^y = 3^4$

خاصية المساواة في الأسس $y = 4$

ولهذا، فإن $\log_3 81 = 4$. لأن $3^4 = 81$

b. $\log_5 \sqrt{5}$

$\log_5 \sqrt{5} = y$

$5^y = \sqrt{5}$

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

لأن $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. ولهذا، فإن $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

افترض أن $\log_5 \sqrt{5} = y$.

اكتب بصيغة أسية.

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

خاصية المساواة في الأسس

لأن $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. ولهذا، فإن $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

اسأل:

- ما الوصف الآخر لمستوى شدة الصوت؟ **يمكن أن يُطلق على مستوى شدة الصوت اسم قوّة الصوت.**

8/20/2016 2:25:41 PM

يمكن تقييم اللوغاريتمات العادية باستخدام الخصائص الأساسية المذكورة بالأعلى. ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية لللوغاريتمات العادية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LOG في الحاسبة.

مثال 3 اللوغاريتمات العادية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\log 0.001$

$$\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \quad \text{استخدم حاسبة.} \quad 0.001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

b. $10 \log 5$

$$10 \log 5 = 5 \quad 10 \log x = x$$

c. $\log 26$

$$\log 26 \approx 1.42 \quad \text{استخدم حاسبة.}$$

d. $\log (-5)$

بما أن $x \log_b x = f(x)$ لا تكون محددة إلا عندما تكون $x > 0$ فإن $\log (-5)$ تكون غير محددة في مجموعة \log **تحقق** بها أن 26 تقع بين 10 و 100. تقع 26 بين $\log 10$ و $\log 100$. وبما أن $\log 10 = 1$ و $\log 100 = 2$ تتراوح قيمة $\log 26$ بين 1 و 2. ✓

نصيحة تقنية

رسالة خطأ إذا حاولت أن تستخدم اللوغاريتم العادي لعدد سالب، فإن حاسبتك ستعرض إما رسالة الخطأ ERR: NONREAL ANS أو عددا تخيليا.

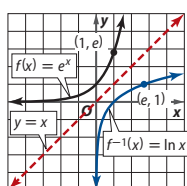
لا توجد حلول حقيقية حوالي -1.09

3A. $\log 10,000$ 4

3B. $\log 0.081$

3C. $\log -0$

3D. $10^{\log 3}$ 3



يسمى اللوغاريتم بالأساس e أو \log_e **لوغاريتم طبيعي** ويُشار إليه بالرمز \ln . دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ هي معكوس الدالة الأسية $y = e^x$. ولذلك،

$$y = \ln x$$

فقط في حالة

$$e^y = x, \quad x > 0.$$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضًا على اللوغاريتمات الطبيعية.

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية لللوغاريتمات الطبيعية

إذا كان x عددا حقيقيا، فحينها تكون العبارات التالية صحيحة.

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \ln e = 1 \\ \ln e^x = x \\ e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{خصائص المعكوس}$$

ويمكن تقييم اللوغاريتمات الطبيعية باستخدام الخصائص الأساسية المذكورة بالأعلى. ويمكن التوصل إلى قيم تقريبية لللوغاريتمات الطبيعية للأعداد الحقيقية الموجبة باستخدام LN في الحاسبة.

مثال 4 اللوغاريتمات الطبيعية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

a. $\ln e^{0.73}$

$$\ln e^{0.73} = 0.73 \quad \ln e^x = x$$

b. $\ln (-5)$

غير محددة $\ln (-5)$.

c. $e^{\ln 6}$

$$e^{\ln 6} = 6 \quad e^{\ln x} = x$$

d. $\ln 4$

$$\ln 4 \approx 1.39 \quad \text{استخدم حاسبة.}$$

3.47 حوالي

4A. $\ln 32$

4B. $e^{\ln 4}$ 4

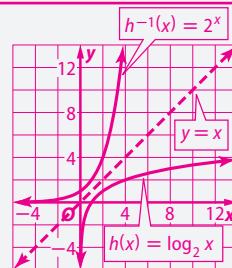
4C. $\ln \left(\frac{1}{e^3} \right) - 3$

4D. $-\ln 9$ حوالي -2.20

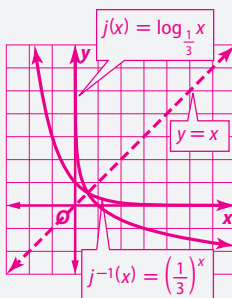
تمرين موجه

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A.



5B.



$$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$$

التقاطع مع المحور الأفقي $x: 1$ خط

التقارب: مع المحور الرأسي y .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = -\infty \quad \text{متناقصة ضمن المجال } (0, \infty)$$

$$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: 1$ خط

التقارب: مع المحور الرأسي y .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

متزايدة ضمن المجال $(0, \infty)$

2 التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

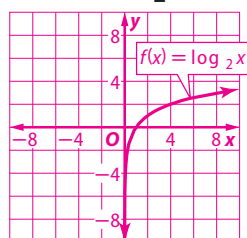
يبيّن المثالان 5 و6 طريقة تمثيل للدوال اللوغاريتمية وتحولاتها بيانياً وتحليلها. يبيّن المثال 7 طريقة استخدام اللوغاريتمات في التطبيقات العملية.

مثال إضافي

5 مثّل كل دالة بيانياً وحلّها. ووضح

المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، ومواقع تزايد أو تناقص الدالة.

a. $f(x) = \log_2 x$



$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

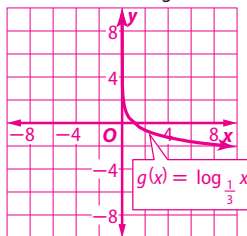
$x: 1$ خط التقارب:

مع المحور الرأسى y : السلوك

الطرفي: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$f(x) = -\infty$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة ضمن المجال: $(0, \infty)$

b. $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$x: 1$

خط التقارب:

مع المحور الرأسى y : السلوك الطرفي:

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

متناقصة ضمن المجال: $(0, \infty)$

يمكنك استخدام العلاقة المعكوسة بين الدالتين الأسية واللوغاريتمية للتمثيل البياني للدوال بصيغة $y = \log_b x$

مثال 5 التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

مثّل كل دالة بيانياً وحلّها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي، ومواقع تزايد أو تناقص الدالة.

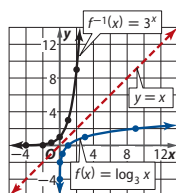
a. $f(x) = \log_3 x$

ضع جدولاً بالقيم ومثّل معكوس هذه الدالة اللوغاريتمية بيانياً، وهو الدالة الأسية $f^{-1}(x) = 3^x$

x	-4	-2	-1	0	1	2
$f^{-1}(x)$	0.01	0.11	0.33	1	3	9

بما أن $f^{-1}(x) = 3^x$ و $f(x) = \log_3 x$ معكوسان، فيمكنك الحصول على التمثيل البياني لـ $f(x)$ عن طريق تعيين مواقع التقاطع $(f^{-1}(x), x)$

$f^{-1}(x)$	0.01	0.11	0.33	1	3	9
x	-4	-2	-1	0	1	2



التمثيل البياني لـ $f(x) = \log_3 x$ يتمتع بالخصائص التالية.

المجال: $(0, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي $x: 1$ الخط المقارب: المحور الرأسى y

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

تزايد: $(0, \infty)$

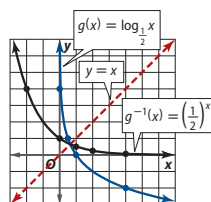
b. $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

ضع جدولاً بالقيم ومثّل بيانياً معكوس هذه الدالة اللوغاريتمية، وهي الدالة الأسية $g^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-4	-2	0	1	2	4
$g^{-1}(x)$	16	4	1	0.5	0.25	0.06

مثّل $g(x)$ بيانياً بتحديد مواقع النقاط

$g^{-1}(x)$	16	4	1	0.5	0.25	0.06
x	-4	-2	0	1	2	4



يتميز التمثيل البياني لـ $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ بالخصائص التالية.

المجال: $(0, \infty)$ المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطع مع المحور الأفقي $x: 1$ الخط المقارب: المحور الرأسى y

السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$

تناقص: $(0, \infty)$

تمرين موجه 5A-B. انظر الحاشية.

5A. $h(x) = \log_2 x$

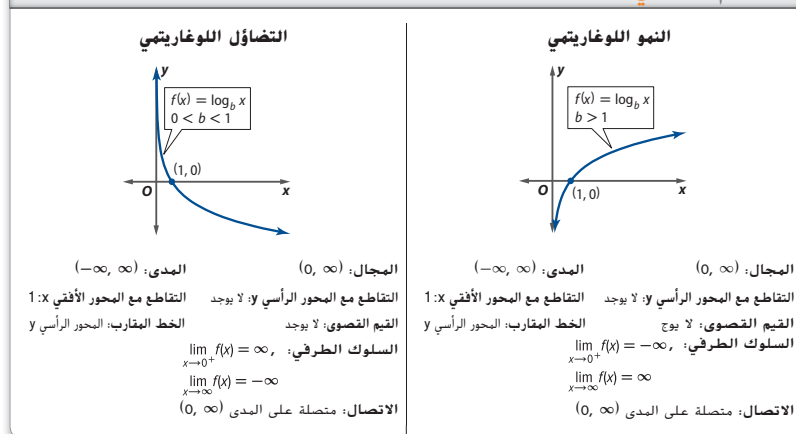
5B. $j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

AL خيارات الواجب المنزلي المتميز

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب إعداد ملصقات توضح عدة معادلات أسية ولوغاريتمية متكافئة. على سبيل المثال، المعادلتان $\log_4 16 = 2$ و $4^2 = 16$ معادلتان متكافئتان. اطلب من الطلاب استخدام ألوان مختلفة للأعداد 2 و4 و16 بحيث يمكنهم تصوّر مكان الأعداد في كل صورة للمعادلة.

يتم تناول خصائص النمو اللوغاريتمي المعتاد أو الدوال اللوغاريتمية المتزايدة والتضاؤل اللوغاريتمي أو الدوال اللوغاريتمية المتناقصة بإيجاز فيما يلي.

المفهوم الأساسي خصائص الدوال اللوغاريتمية



يمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدمة في تحويل التمثيلات البيانية للدوال الأسية على التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

مثال 6 التحولات البيانية للدوال اللوغاريتمية

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log x$ لوصف التحويل الذي ينتج عنه كل دالة. ثم مثل الدوال بيانياً.

a. $k(x) = \log(x + 4)$

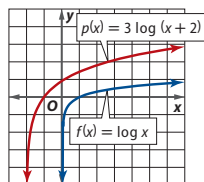
تأخذ هذه الدالة الصيغة $k(x) = f(x + 4)$ لهذا فإن التمثيل البياني لـ $k(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مع إزاحة بمقدار 4 وحدات إلى اليسار (الشكل 2.2.1).

b. $m(x) = -\log x - 5$

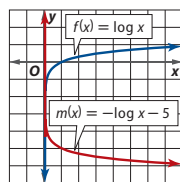
تأخذ الدالة الصيغة $m(x) = -f(x) - 5$ لهذا، فإن التمثيل البياني للدالة $m(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ معكوساً في المحور الأفقي x ومزاحاً بعد ذلك بمقدار 5 وحدات نحو الأسفل (الشكل 2.2.2).

c. $p(x) = 3 \log(x + 2)$

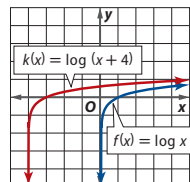
تأخذ الدالة الصيغة $p(x) = 3f(x + 2)$ لهذا، فإن التمثيل البياني للدالة $p(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ممتدداً رأسياً بمعامل قدره 3 ومزاحاً بعد ذلك بمقدار وحدتين إلى اليسار. (الشكل 2.2.3).



الشكل 2.2.3



الشكل 2.2.2



الشكل 2.2.1

تمرين موجه 6A-C. انظر الحاشية.

استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log x$ لتصف التحويل الذي ينتج عن كل دالة. ثم مثل الدوال بيانياً.

6A. $a(x) = (x - 6)$

6B. $b(x) = 0.5x - 2$

6C. $c(x) = (x + 4) + 3$

انتبه!

التحويلات تذكر أن الإزاحات الأفقية تعتمد على القيمة الثابتة داخل الأقواس والإزاحات الرأسية تعتمد على القيمة الثابتة خارج الأقواس.

مثال إضافي

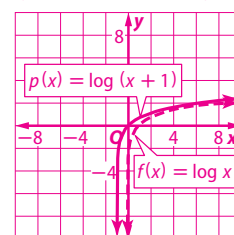
6 استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log x$ لوصف التحويل الذي يحدث في كل دالة. ثم مثل الدوال بيانياً.

a. $p(x) = \log(x + 1)$

البياني للدالة $p(x)$ هو التمثيل

البياني للدالة $f(x)$ منسحباً

بمقدار وحدة نحو اليسار.



b. $m(x) = -\log(x - 2)$

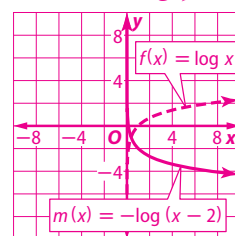
2) التمثيل البياني للدالة $m(x)$

هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$

منعكساً على المحور الأفقي

x ومنسحباً بعد ذلك بمقدار

وحدتين إلى الأسفل.



c. $n(x) = 5 \log(x - 3)$

3) التمثيل البياني للدالة $n(x)$

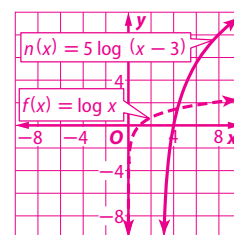
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$

موسعاً في الاتجاه الرأسي

بمعامل مقداره 5 ومنسحباً

بعد ذلك بمقدار 3 وحدات إلى

اليمين.



نصائح للمعلمين الجدد

الحاسبة البيانية. للتحقق من

التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

ذات الأساس المختلف عن 10 أو e

باستخدام الحاسبة البيانية. استخدم

قانون تغيير الأساس. وسيتم شرح ذلك

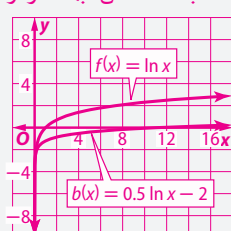
في الدرس 2-3.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

6B. التمثيل البياني للدالة $b(x)$ هو التمثيل البياني

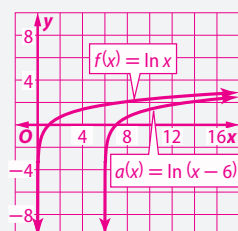
للدالة $f(x)$ مضغوطاً رأسياً بمعامل قدره 0.5

ومنسحباً للأسفل بمقدار وحدتين.



6A. التمثيل البياني للدالة $a(x)$ هو التمثيل البياني

للدالة $f(x)$ منسحباً لليمين بمقدار 6 وحدات.



مثال إضافي

7 الزلازل يقيس مقياس ريختر شدة الزلازل R . ويستخدم

مقياس ريختر الصيغة

$$R = \log \left(\frac{a}{T} \right) + B$$
 حيث a تمثل نطاق الحركة الرأسية لسطح الأرض (بالميكرون)، و T تمثل الفترة الزمنية للموجة الزلزالية بالثواني، و B هو معامل يشير إلى ضعف الموجات الزلزالية.

- a. أوجد شدة زلزال سعته 250 ميكرون، في فترة زمنية مقدارها 2.1 ثانية، عندما تكون قيمة المعامل $B = 5.4$. $B = 7.5$
- b. لا تشكل الزلازل التي تقل شدتها عن 3.5 قلقاً للمدينة. فعندما يحدث زلزال نطاقه 125 ميكرون، في فترة مقدارها 0.33 ثانية، عندما تكون قيمة المعامل $B = 1.2$.
- فما شدة الزلزال؟ هل ينبغي أن يشكل هذا الزلزال مصدر قلق للمدينة؟ **3.77؛ نعم**

- c. يمكن أن تسبب الزلازل التي شدتها 6.1 أو أشد أضراراً كبيرة لمن يعيشون ضمن مسافة 100 km من مركز الزلزال. حدّد نطاق زلزال شدته 6.1 وفترة 3.5 ثانية، عندما تكون قيمة المعامل $B = 3.7$. **879 ميكرون**

نصائح للمعلمين الجدد

حاسبة التمثيلات البيانية بالنسبة للقسم c من المثال 7، تحقق من وضع الطلاب قوسين حول 1×10^{-12} في حاسبة التمثيلات البيانية عند تمثيل الدالة

$$d(w) = 10 \log \frac{w}{1 \times 10^{-12}}$$

يمكن استخدام اللوغاريتمات في الحسابات العلمية، مثل مستويات الحموضة (الرقم الهيدروجيني) ومستوى كثافة الصوت.

مثال 7 من الحياة اليومية استخدام دوال لوغاريتمية

الصوت يمكن تمثيل مستوى كثافة الصوت، والذي يتم قياسه بوحدة الديسيبل، بالدالة $d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$ ، حيث w يمثل كثافة الصوت بالوات في المتر المربع و w_0 هو القيمة الثابتة 1.0×10^{-12} وات في المتر المربع.

- a. إذا كانت كثافة الصوت لشخص يتحدث بصوت مرتفع تبلغ 3.16×10^{-8} وات في المتر المربع، فما مستوى كثافة الصوت بوحدة الديسيبل؟

أوجد قيمة $d(w)$ عندما تكون $w = 3.16 \times 10^{-8}$

$$d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$$

الدالة الأصلية

$$= 10 \log \frac{3.16 \times 10^{-8}}{1.0 \times 10^{-12}}$$

$$w = 3.16 \times 10^{-8} \text{ و } w_0 = 1.0 \times 10^{-12}$$

$$\approx 45$$

استخدم حاسبة.

يبلغ مستوى كثافة الصوت 45 ديسيبلًا.

- b. إذا كانت عتبة السماع لشخص معين يعاني من إعاقة في السمع هي 5 ديسيبل، فهل الصوت الذي يبلغ مستوى كثافته 2.1×10^{-12} وات في المتر المربع سيكون مسمعًا لذلك الشخص؟

أوجد قيمة $d(w)$ عندما تكون $w = 2.1 \times 10^{-12}$

$$d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$$

الدالة الأصلية

$$= 10 \log \frac{2.1 \times 10^{-12}}{1.0 \times 10^{-12}}$$

$$w = 2.1 \times 10^{-12} \text{ و } w_0 = 1.0 \times 10^{-12}$$

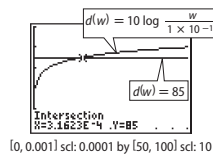
$$\approx 3.22$$

استخدم حاسبة.

بما أن الشخص يستطيع فقط سماع الأصوات التي تبلغ كثافتها 5 ديسيبل أو أعلى، فلن يتمكن من سماع صوت بمستوى كثافة يبلغ 3.22 ديسيبل.

- c. يمكن أن تؤدي الأصوات التي تزيد عن 85 ديسيبلًا إلى ضرر للسمع. حدد كثافة الصوت الذي يبلغ مستوى كثافته 85 ديسيبلًا.

استخدم حاسبة تمثيلات بيانية لتمثيل بيانيًا $d(w) = 10 \log \frac{w}{1 \times 10^{-12}}$ و $d(w) = 85$ على نفس الشاشة وتوصل إلى نقطة التقاطع.



عندما يبلغ مستوى كثافة الصوت 85 ديسيبل، تبلغ كثافة الصوت 3.1623×10^{-4} وات في المتر المربع.

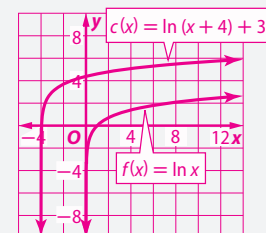
تمرين موجّه

7. **التقنية** يمكن تمثيل عدد الأجهزة المصابة بفيروس حاسب آلي معين من خلال d في $d = 6.8 + 20.1t$ ، حيث t هو عدد الأيام التي مرت منذ تعرض الجهاز الأول للإصابة.

- A. كم عدد الأجهزة المصابة تقريبًا في اليوم 57؟
 B. كم عدد الأجهزة الإضافية التي تعرضت للإصابة في اليوم 30 بالمقارنة باليوم 12؟
 C. في أي يوم تقريبًا سيبلغ عدد الأجهزة المصابة 75؟ **اليوم 30**

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

6C. المنحني البياني للدالة $c(x)$ هو المنحني البياني للدالة $f(x)$ مزاحًا إلى اليسار بمقدار 4 وحدات ولأعلى بمقدار 3 وحدات.





إجابات إضافية

74. خطأ؛ الإجابة النموذجية: لا يوجد
خط تقارب رأسي للتمثيل البياني
للدالة $y = \ln(x^2 + 1)$
75. خطأ؛ الإجابة النموذجية: إن المدى
الخاص بالدالة $y = \ln(x^2 + 1)$
هو $[0, \infty)$
76. خطأ؛ الإجابة النموذجية: لا يوجد أي
خطوط تقارب للتمثيل البياني للدالة
 $y = \ln(x^2 + 1)$

68. **البكتيريا** تمثل الدالة $t = \frac{\ln B - \ln A}{2}$ مقدار الزمن t بالساعات لنوع معين من البكتيريا للوصول إلى المقدار B من المقدار الأولي A .

- a. إذا كان العدد الأولي للبكتيريا الموجودة يبلغ 750، فكم عدد الساعات التي سيستغرقها عدد البكتيريا ليصل إلى 300,000؟ قُرب لأقرب ساعة. **3 ساعات**
- b. حدد متوسط معدل التغير في البكتيريا في الساعة للكيمات الموجودة في الجزء a. **99750 بكتيريا في الساعة**

69. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تقارن متوسط معدلات التغير لدالة أسية وثابتة الأس وجذرية. **a, c, d, f. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

- a. بيانيًا، مثل بيانيًا $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$ للدالة $0 \leq x \leq 8$.
- b. تحليليًا، ابحث عن متوسط معدل التغير لكل دالة في الجزء a في الفترة الزمنية $[4, 6]$. **$f(x) = 24$, $g(x) = 10$**
- c. لنظيًا، قارن معدلات نمو الدوال من الجزء a مع زيادة x .
- d. بيانيًا، مثل بيانيًا $f(x) = \ln x$ و $g(x) = \sqrt{x}$.
- e. تحليليًا، ابحث عن متوسط معدل التغير لكل دالة من الجزء d في الفترة $[4, 6]$.

f. لنظيًا، قارن معدلات نمو الدوال من الجزء d مع زيادة x .

e. $f(x) = 0.203$, $g(x) = 0.225$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

70. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين المجال والمدى والتقاطعات والتناظر والاتصال وسلوك التزايد/التناقص والسلوك الطرفي للدوال اللوغاريتمية حيث $a(x) = x^n$, $b(x) = x^{-1}$, $c(x) = a^x$, $d(x) = e^x$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

71. **الاستنتاج** اشرح السبب في أن قيمة b لا يمكن أن تكون سالبة في الدالة $f(x) = \log_b x$. **انظر الحاشية.**

72. **التحدي** بالنسبة للدالة $f(x) = \log_{10}(x - k)$ حيث k قيمة ثابتة، ما هي إحداثيات التقاطع مع المحور الأفقي x ؟ **$(1 + k, 0)$**

73. **الكتابة في الرياضيات** قارن السلوك كبير النطاق للدوال الأسية واللوغاريتمية ذات الأساس b للدالة $b = 2$ و $b = 6$ و $b = 10$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. **74-76. انظر الحاشية.**

74. سيظل هناك دائمًا قيد على الدوال اللوغاريتمية في المجال.

75. لن يكون هناك قيد أبدًا على الدوال اللوغاريتمية في المدى.

76. للتمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية مستقيم مقارب دائمًا.

77. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الكلمات والتمثيلات البيانية والجداول والمعادلات لمقارنة الدوال اللوغاريتمية والأسية. **راجع عمل الطلاب.**

55. **الحواشيب** تبنياً جوردون مور المشارك في تأسيس شركة إنتل في عام 1975 بما يُعرف الآن باسم قانون مور. لقد تنبأ بأن عدد وحدات الترانزستور على معالج كمبيوتر يسعر معين سيتضاعف كل عامين.

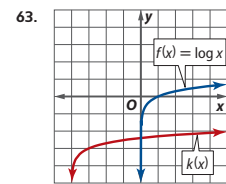
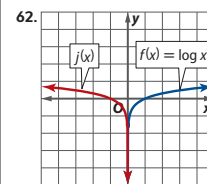
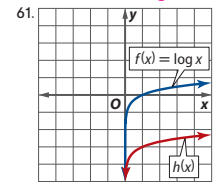
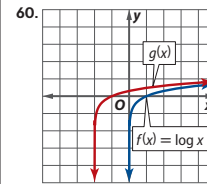
$$P = I \times 2^{\frac{1}{2}}$$

- a. اكتب قانون مور للعدد الذي يُتوقع من وحدات الترانزستور P باستخدام الزمن بالأعوام t والعدد المبدئي لوحدات الترانزستور.
- b. في شهر أكتوبر 1985، كان أحد المعالجات يحتوي على 275000 وحدة ترانزستور. كم عدد السنين التقريبي الذي تتوقع خلاله أن يحتوي معالج بنفس السعر على 4.4 مليون ترانزستور تقريباً؟ **8**

اذكر المجال والمدى والتناظر والاتصال وأسلوب التزايد/التناقص لكل دالة لوغاريتمية بالتقاطع المذكور والسلوك الطرفي. ثم مثل الدالة بيانيًا. **56-59. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

56. $f(1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
57. $g(-2) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$
58. $h(-1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$
59. $j(1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x) = -\infty$

60. **$g(x) = \log(x + 2)$**
استخدم التمثيل البياني الأصلي $f(x) = \log x$ للوصول إلى المعادلة الخاصة بكل دالة. **$h(x) = \log x - 3$**



$j(x) = \log(-x)$ **$k(x) = \log(x + 4) - 3$**
حاسبة التمثيلات البيانية أنشئ مخطط تشتت بيانيًا للقيم الظاهرة في الجدول. ثم استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة.

x	1	3	9	27
y	0	1	2	3

64. **y** هي دالة أسية لـ **x**. **خطأ**

65. **x** دالة أسية لـ **y**. **صواب**

66. **y** دالة لوغاريتمية لـ **x**. **صواب**

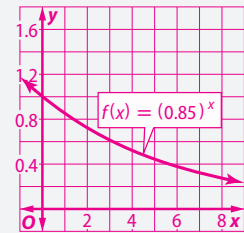
67. **y** تتناسب عكسياً مع **x**. **خطأ**

4 التقويم

عين المصطلح الرياضي ينبغي على كل طالب في هذا التمرين إيجاد قيمة $\log_6 216$ على بطاقات الفهرس. وعلى الطلاب أن يبينوا طريقة الحل خطوة خطوة مع كتابة تحليل لكل خطوة.

إجابة إضافية

78b



78. الطيران عند تنقية الكيروسين لصناعة وقود الطائرات. يتم التخلص من الملوثات عن طريق تمرير الكيروسين عبر مرشح طبني خاص. افترض أنه تم

تركيب مرشح في أنبوب لكي يتم التخلص من 15% من الملوثات في كل قدم يقطعه الكيروسين. (الدرس 1-2)

a. اكتب دالة أسية لتمثيل النسبة المئوية للملوث المتبقي بعد أن قطع الكيروسين x قدم. $f(x) = (0.85)^x$

b. مثل الدالة بيانياً. انظر الحاشية.

c. ما النسبة المئوية التقريبية للملوث المتبقي بعد أن يقطع الكيروسين 12 قدماً؟ 14%

d. هل سيتم التخلص من الملوثات بالكامل على الإطلاق؟ اشرح.

لا؛ فالتمثيل البياني يحتوي على مستقيم تقارب عند $y = 0$ ، لذلك فالنسبة المئوية للملوثات y لن تصل إلى 0 أبداً.

أوجد حل كل من المتباينات التالية. (الدرس 1-6)

$$79. x^2 - 3x - 2 > 8 \quad (-\infty, -2) \quad 80. 4 \geq -(x-2)^3 + 3 \quad [1, \infty) \quad 81. \frac{x}{2} + 3 > \frac{29}{x} \quad (-\infty, 0) = (9, \infty)$$

$$82. \frac{(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)^2} \leq 0 \quad (-\infty, 3] = [4, 5] \quad 83. \sqrt{2x+3} - 4 \leq 5 \quad \left[-\frac{3}{2}, 39\right] \quad 84. \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} \leq 4 \quad [5, 5.25]$$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (الدرس 1-5)

$$85. \frac{2a-5}{a-9} + \frac{a}{a+9} = \frac{-6}{a^2-81} \quad -\frac{13}{3}, 3 \quad 86. \frac{2q}{2q+3} - \frac{2q}{2q-3} = 1 \quad \frac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2} \quad 87. \frac{4}{z-2} - \frac{z+6}{z+1} = 1 \quad \frac{1 \pm \sqrt{145}}{4}$$

مثل كل دالة بيانياً وحلها. وضع المجال والمدي والتقاطعات والسلوك الطرفي والاتصال ومواضع تزايد الدالة أو تناقصها. (الدرس 1-5)

88-90. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

$$88. f(x) = -\frac{1}{2}x^7 \quad 89. g(x) = 3x^{-6} \quad 90. h(x) = 2x^{-\frac{3}{4}} \quad 91. \text{الميكروبيولوجيا} \text{ يتم التوصل إلى عدد البكتيريا } P \text{ في نموذج لعينة بعد } t \text{ أيام من خلال الدالة}$$

$$P(t) = 1000 - 19.75t + 20t^2 - \frac{1}{3}t^3 \quad (\text{الدرس 1-2})$$

a. ما نوع الدالة $P(t)$ ؟ كثيرة الحدود

b. متى يتزايد عدد البكتيريا؟ $0.5 < t < 39.5$

c. متى يقل؟ $0 < t < 0.5$ و $t > 39.5$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

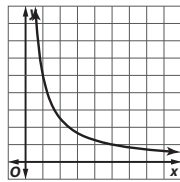
94. مراجعة يمثل المنحنى جزءاً من التمثيل البياني لأية دالة؟ D

A $y = 50 - x$

B $y = \log x$

C $y = e^{-x}$

D $y = \frac{5}{x}$



95. مراجعة يتحلل عنصر مشع مع مرور الزمن وفقاً لـ G

$$y = x \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{t}{200}}$$

حيث x = عدد الجرامات الموجودة من البداية
و t = الزمن بالأعوام. إذا كان هناك 500 جرام من البداية، فكم عدد الجرامات الذي سيتبقى بعد 400 عام؟

F 12.5 جراماً H 62.5 جراماً

G 31.25 جراماً J 125 جراماً

92. SAT/ACT يوضح الجدول أدناه العائد والتكلفة لكل وحدة من ثلاثة منتجات في مصنع معدات رياضية.

المنتج	العائد لكل وحدة (AED)	تكلفة الوحدة (AED)
كرة القدم	f	4
كرة البيسبول	b	3
كرة قدم أمريكية	6	y

إذا كان الربح يساوي العائد مطروحاً منه التكلفة، فما مقدار الربح الذي يحققونه إذا أنتجوا وباعوا وحدتين من كل عنصر؟ A

A $2f + 2b - 2y - 2$ D $b + 2f + y - 7$

B $2y - 2b - 2f - 2$ E $2f + 2b - 2y - 26$

C $f + b - y - 1$

93. ما قيمة n إذا كان $3^{4n-1} = 11$ ؟ F $\log_3 11$

F 3 H 6

G 4 J 12

BL خيارات الواجب المنزلي المتميز

التوسع اكتب اللوغاريتم $\log_3 16$ على اللوحة. أسأل الطلاب ما العددين الصحيحان المتتاليان اللذان تقع قيمتهما اللوغاريتم بينهما. اطلب منهم تحليل طريقة استدلالهم. بين العددين 2 و3 لأن العدد 16 يقع بين 3^2 و 3^3

خصائص اللوغاريتمات

لماذا؟

الحالي

السابق

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-3 إيجاد قيمة التعابير اللوغاريتمية ذات الأساسات المختلفة.

الدرس 2-3 تطبيق خصائص اللوغاريتمات. تطبيق قانون تغيير الأساس.

بعد الدرس 2-3 استخدام خصائص الدوال الأسية واللوغاريتمية في حل المعادلات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** بهذا الدرس.

أسأل:

■ كيف يدخل الكربون 14 إلى أجسام الكائنات الحية؟ تحصل النباتات عليه من خلال عملية البناء الضوئي. بينما يدخل إلى جسم الإنسان والحيوان مع الأطعمة التي يتناولها.

■ ما الذي يجب معرفته كي يكون التأريخ بالكربون 14 دقيقاً؟ الكمية الموجودة من الكربون 14 عند موت الكائن الحي

(يتبع في الصفحة التالية)



تمتص النباتات الكربون 14 عن طريق التمثيل الضوئي، وتستهلك الحيوانات والبشر الكربون 14 عن طريق هضم المادة النباتية. وعندما يموت كائن حي، يتوقف عن ابتلاع الكربون الجديد ويبدأ الكربون 14 الموجود في أجهزته بالفعل في التحلل. ويستطيع العلماء حساب عمر المواد العضوية باستخدام دالة لوغاريتمية تضع تقديرًا لتحلل الكربون 14. ويمكن استخدام خصائص اللوغاريتمات في تحليل هذه الدالة.

1 تطبيق خصائص اللوغاريتمات.
2 إجراء تغيير على قاعدة الأساس.

وضعت تعبيرًا للتعبيرات اللوغاريتمية ذات الأساسات المختلفة. (الدرس 2-2)

1 خصائص اللوغاريتمات تذكر الخصائص التالية للأسس. حيث x و y أعداد حقيقية موجبة.

خاصية ناتج الضرب	خاصية خارج القسمة	خاصية الأس الثابت
$b^x \times b^y = b^{x+y}$	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$(b^x)^y = b^{xy}$

بما أن العلاقة بين اللوغاريتمات والأسس علاقة عكسية، فإن هذه الخصائص للأسس تدل على هذه الخصائص المقابلة للوغاريتمات.

المفهوم الأساسي خصائص اللوغاريتمات

إذا كان x و y أعدادًا حقيقية موجبة، و $b \neq 1$ و p رقم حقيقي، فإن العبارات التالية حقيقية.

$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية ناتج الضرب
$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية ناتج القسمة
$\log_b x^p = p \log_b x$	خاصية الأس الثابت

وستثبت خاصيتي خارج القسمة والأس الثابت في التمرينين 113 و 114.

لتوضيح أن خاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات حقيقية، افترض أن $n = \log_b y$ و $m = \log_b x$ ثم باستخدام تعريف اللوغاريتم، فإن $b^n = y$ و $b^m = x$

$\log_b xy = \log_b b^m b^n$	$x = b^m$ و $y = b^n$
$= \log_b b^{m+n}$	خاصية ناتج الأسس
$= m + n$	خاصية العكس في اللوغاريتمات
$= \log_b x + \log_b y$	$m = \log_b x$ و $n = \log_b y$

يمكن استخدام هذه الخصائص للتعبير عن اللوغاريتمات من حيث الصلة بلوغاريتمات أخرى.

مثال 1 استخدام خصائص اللوغاريتمات

عبر عن كل لوغاريتم باستخدام $\ln 2$ و $\ln 3$.

a. $\ln 54$	b. $\ln \frac{9}{8}$
$\ln 54 = \ln (2 \times 3^3)$	$\ln \frac{9}{8} = \ln 9 - \ln 8$
$= \ln 2 + \ln 3^3$	$= \ln 3^2 - \ln 2^3$
$= \ln 2 + 3 \ln 3$	$= 2 \ln 3 - 3 \ln 2$
خاصية ناتج الضرب	خاصية خارج القسمة
خاصية الأس الثابت	خاصية الأس الثابت

تمرين موجه

عبر عن كل لوغاريتم باستخدام $\log 3$ و $\log 5$.

1A. $\log 75$	1B. $\log 5.4$
$\log 3 + 2 \log 5$	$3 \log 3 - \log 5$

يمكن أيضًا استخدام خصائص ناتج الضرب وخارج القسمة والأس الثابت في تحويل اللوغاريتمات إلى أبسط صورة.

مثال 2 تحويل اللوغاريتمات إلى أبسط صورة

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log_4 \sqrt[5]{64}$

بما أن أساس اللوغاريتم هو 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ كأس ثابت للحدد 4.

$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}} \quad \text{أعد الكتابة باستخدام أسس نسبية}$$

$$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}} \quad 4^3 = 64$$

$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}} \quad \text{خاصية الأس الثابت للأسس}$$

$$= \frac{3}{5} \log_4 4 \quad \text{خاصية الأس الثابت للوغاريتمات}$$

$$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5} \quad \log_x x = 1$$

b. $5 \ln e^2 - \ln e^3$

$$5 \ln e^2 - \ln e^3 = 5(2 \ln e) - 3 \ln e \quad \text{خاصية الأس الثابت للوغاريتمات}$$

$$= 10 \ln e - 3 \ln e \quad \text{ضرب}$$

$$= 10(1) - 3(1) = 7 \quad \ln e = 1$$

تمرين موجه

2A. $\log_6 \sqrt[3]{36}$ $\frac{2}{3}$

2B. $\ln e^9 + 4 \ln e^3$ 21

توفر خصائص اللوغاريتمات طريقة للتعبير عن التعابير اللوغاريتمية بصيغ تستخدم عمليات أبسط لتحويل الضرب إلى جمع والقسمة إلى طرح والأسس والجذور إلى ضرب.

مثال 3 توسيع التعابير اللوغاريتمية

قم بتوسيع كل تعبير.

a. $\log 12x^5y^{-2}$

التعبير هو لوغاريتم ناتج ضرب 12 و x^5 و y^{-2} .

$$\log 12x^5y^{-2} = \log 12 + \log x^5 + \log y^{-2} \quad \text{خاصية ناتج الضرب}$$

$$= \log 12 + 5 \log x - 2 \log y \quad \text{خاصية الأس الثابت}$$

b. $\ln \frac{x^2}{\sqrt{4x+1}}$

التعبير هو لوغاريتم خارج قسمة x^2 و $\sqrt{4x+1}$.

$$\ln \frac{x^2}{\sqrt{4x+1}} = \ln x^2 - \ln \sqrt{4x+1} \quad \text{خاصية خارج القسمة}$$

$$= \ln x^2 - \ln (4x+1)^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln (4x+1) \quad \text{خاصية الأس الثابت}$$

3A. $\log_{13} 6a^3bc^4$

3B. $\ln \frac{3y+2}{4\sqrt[3]{y}}$

$\log_{13} 6 + 3 \log_{13} a + \log_{13} b + 4 \log_{13} c$ $\ln(3y+2) - \ln 4 - \frac{1}{3} \ln y$

تمرين موجه

100 | الدرس 2-3 | خصائص اللوغاريتمات



الربط بتاريخ الرياضيات

جوست بورجي

(1550-1617) كان عالم الرياضيات السويسري بورجي صانع ساعات شهيرًا وابتكر أيضًا أدوات فلكية ووضع تصميمها. وظهرت أهم أعماله في الرياضيات عندما اكتشف اللوغاريتمات بشكل مستقل عن جون نابير.

■ لم يستطيع العلماء حساب أعمار المواد العضوية باستخدام الكربون 14؟ لأن معدل الانحلال يتبع نمطًا يمكن تمثيله بدالة لوغاريتمية.

1 خصائص اللوغاريتمات

تبين الأمثلة 1-4 طريقة استخدام خصائص الضرب والاشتقاق ولوغاريتم القوة من أجل عرض اللوغاريتم بالتفصيل واختزاله وإيجاد قيمته.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة $\log 2$ و $\log 3$.

a. $\log 96$ $5 \log 2 + \log 3$

b. $\log \frac{32}{9}$ $5 \log 2 - 2 \log 3$

2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي.

a. $\log 2 \sqrt[3]{32}$ $\frac{5}{3}$

b. $3 \ln e^4 - 2 \ln e^2$ 8

3 قم بتوسيع كل تعبير مما يلي.

a. $\ln 4m^3n^5$ $\ln 4 + 3 \ln m + 5 \ln n$

b. $\log \frac{2x-3}{3\sqrt[4]{x}}$ $\log (2x-3) - \log 3 - \frac{1}{4} \log x$

نصائح للمعلمين الجدد

التحليل إلى عوامل في المثال 1. من المفيد تحليل العدد المعطى إلى عوامل بحيث يشتمل ذلك على الحدود التي تحاول التعبير عنها بصورة لوغاريتمية. على سبيل المثال، يمكن تحليل العدد 54 بدلالة العددين 2 و 3 بالشكل 2×3^3 .

100 | الدرس 3-2 | خصائص اللوغاريتمات

b. $5 \ln (x + 1) + 6 \ln x$
 $\ln x^6(x + 1)^5$

يقدم المثالان 5 و 6 قانون تغيير الأساس، والذي يُستخدم لإيجاد قيم اللوغاريتمات التي تملك أساسًا مغايرًا للعدد 10.

a. $\log_6 4$ 0.77
b. $\log_{\frac{1}{3}} 8$ -1.89

اللوحة البيضاء **التفاعلية** اعرض نماذج
مثل \log_{10}

$\frac{\log_b \square}{\log_b \square}$. ثم اسحب القيم من اللوغاريتم الأصلي لتوضيح قانون تغيير الأساس.

يمكن تطبيق ذلك أيضًا لإثبات خصائص الضرب والاشتقاق ولوغاريتم القوة.

مثال 4 تبسيط التعابير اللوغاريتمية

قم بتبسيط كل تعبير مما يلي.

a. $4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6)$

$4 \log_3 x - \frac{1}{3} \log_3 (x + 6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x + 6)^{\frac{1}{3}}$

$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x + 6}$

$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x + 6}}$

$= \log_3 \frac{x^4 \sqrt[3]{(x + 6)^2}}{x + 6}$

اجعل المقام نسبيًا.

خاصية الأس الثابت

$(x + 6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x + 6}$

خاصية ناتج القسمة

b. $6 \ln(x-4) + 3 \ln x$

$$\begin{aligned} 6 \ln(x-4) + 3 \ln x &= \ln(x-4)^6 + \ln x^3 && \text{خاصية الأس الثابت} \\ &= \ln x^3(x-4)^6 && \text{خاصية ناتج الضرب} \end{aligned}$$

تھریں موجدہ

4A. $-5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x) \log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$ 4B. $\ln (3x+5) - 4 \ln x - \ln (x-1) \ln \frac{3x+5}{x^4(x-1)}$

2 تغيير صيغة الأساس قد نحتاج أحياناً إلى التعامل مع لوغاريتم له أساس غير مناسب. من أمثلة ذلك، يمثل تقييم 5 و \log تحدياً لأن الحاسبات ليس بها مفتاح لتقييم لوغاريتمات الأساس 3 . يوفر تغيير قاعدة الأساس طريقة لتغيير هذا التعبير إلى لوغاريتمات ناتج قسمة بأساس مختلف.

المفهوم الأساسي تغيير صيغة الأساس

بالنسبة لأي أعداد حقيقية موجبة $a, b \neq 1$, $x, a \neq 1, b \neq 1$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

استثبت قاعدة تغيير الأساس في التهرين 115.

تحتوي معظم الحاسبات على مفتاحين فقط للوغاريتمات، **LOG** للوغاريتمات الأساس 10 و**LN** للوغاريتمات الأساس e . ولهذا تستخدم في الغالب قاعدة تغيير الأساس بإحدى الصيغتين التاليتين، وسيعطى كلا الأسلوبين الإجابة الصحيحة.

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} \qquad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

مثال 5 استخدم تغيير قاعدة الأساس

قم بتقييم كل لوغاريتم مما يلي.

<p>a. $\log_3 5$</p> $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$ <p style="text-align: right; color: #007bff;">تغيير قاعدة الأساس</p> ≈ 1.47 <p style="text-align: right; color: #007bff;">استخدم حاسبة.</p>	<p>b. $\log_{\frac{1}{2}} 6$</p> $\log_{\frac{1}{2}} 6 = \frac{\log 6}{\log \frac{1}{2}}$ <p style="text-align: right; color: #007bff;">تغيير قاعدة الأساس</p> ≈ -2.58 <p style="text-align: right; color: #007bff;">استخدم حاسبة.</p>
--	---

تمرین موجه

5A. $\log_{78} 4212$ **1.916** 5B. $\log_{15} 33$ **1.291** 5C. $\log_{\frac{1}{3}} 10$ **-2.096**

اقتبه!

لوغاريتم مجموع
المجموع أو الفارق لا يساوي مجموع
اللوغاريتيمات أو فارقها. على سبيل
المثال، $\ln(x \pm 4) \neq \ln x \pm \ln 4$

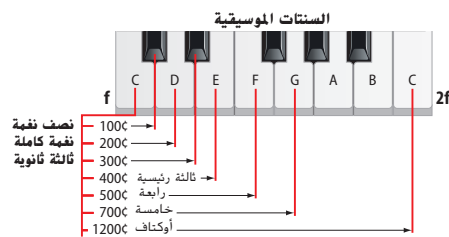
نصيحة دراسية

التحقق من مدى صحة الحل
يمكنك التحقق من إجابتك في المثال 5a عن طريق تقييم 1.47^3 . بما أن $5 \approx 1.47^3$ ، فإن الإجابة صحيحة.

يمكنك استخدام خصائص اللوغاريتمات لحل مسائل من الحياة اليومية. على سبيل المثال، يبلغ معدل ترددات صوت في جواب موسيقي ومعدل تردداته في الجواب الموسيقي التالي 2:1. ولهذا سوف تقع الأجوبة الموسيقية التالية بمعدل يبلغ $2^{1/2}$ ضعف معدل تردد ذلك الصوت. حيث n عدد صحيح. يمكن استخدام هذه العلاقة في التوصل إلى الاختلاف في النغمة بين أي صوتين.

مثال 6 استخدام تغيير قاعدة الأساس

الموسيقى السنت (C) الموسيقي هو وحدة النغمة النسبية. ويتألف جواب موسيقي واحد من 1200 سنت.



1 قاعدة تحديد الفارق في السنتات بين صوتين بالتردد المبدئي a والتردد النهائي b هي: $n = 1200 \left(\log_2 \frac{a}{b} \right)$. أوجد الفارق في النغمة بين كل من أزواج الأصوات التالية.

a. 493.9 هرتز، 293.7 هرتز

افترض أن $a = 493.9$ و $b = 293.7$. ضع قيمًا مكان a و b وأوجد حلًا للمسألة.

$$n = 1200 \left(\log_2 \frac{a}{b} \right) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 1200 \left(\log_2 \frac{493.9}{293.7} \right) \quad a = 493.9 \text{ و } b = 293.7$$

$$= 1200 \left(\frac{\log \frac{493.9}{293.7}}{\log 2} \right) \quad \text{غَيَّر صيغة الأساس}$$

$$\approx 899.85 \quad \text{حوَّل لأبسط صورة.}$$

يبلغ الاختلاف في النغمة بين الصوتين حوالي 899.85 سنًا.

b. 3135.9 هرتز، 2637 هرتز

افترض أن $a = 3135.9$ و $b = 2637$. ضع قيمًا مكان a و b وأوجد حلًا للمسألة.

$$n = 1200 \left(\log_2 \frac{a}{b} \right) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= 1200 \left(\log_2 \frac{3135.9}{2637} \right) \quad a = 3135.9 \text{ و } b = 2637$$

$$= 1200 \left(\frac{\log \frac{3135.9}{2637}}{\log 2} \right) \quad \text{غَيَّر صيغة الأساس}$$

$$\approx 299.98 \quad \text{حوَّل لأبسط صورة.}$$

يبلغ الاختلاف في النغمة بين الصوتين حوالي 299.98 سنًا.

تمرين موجه

6. **التصوير الفوتوغرافي** في التصوير الفوتوغرافي، يكون التعرض الضوئي هو مقدار الضوء المسموح له بالسقوط على فيلم. ويمكن تعديل التعرض الضوئي بعدد مرات التوقف المستخدمة لالتقاط صورة. التغير في عدد مرات التوقف n المطلوبة يرتبط بالتغير في التعرض الضوئي c في $n = \log_2 c$.
 - A. كم عدد مرات التوقف التي يستخدمها المصور لمضاعفة التعرض الضوئي؟ **1.58 توقفًا**
 - B. كم عدد مرات التوقف التي يستخدمها مصور للحصول على $\frac{1}{5}$ التعرض الضوئي؟ **-2.32 توقفًا**

الربط بالحياة اليومية

النغمة القياسية، وتسمى أيضًا نغمة الحفلة، هي النغمة التي يستخدمها أفراد الأوركسترا لضبط أدواتهم. ويبلغ تردد النغمة القياسية 440 هرتز، وهو ما يعادل الصوت A في الجواب الموسيقي الرابع. المصدر: Encyclopaedia Britannica

مثال إضافي

6 علم البيئة يتم تمثيل التنوع

في بيئة إيكولوجية معينة تضم نوعين مختلفين من الكائنات من خلال الدالة

$$D = - \left(\frac{N_1}{S} \log_2 \frac{N_1}{S} + \frac{N_2}{S} \log_2 \frac{N_2}{S} \right)$$

حيث يكون N_1 و N_2 عددي كل من هذين النوعين

الموجودين ضمن العينة

عن مقياس التنوع الذي

يعطي العدد التالي من

الأنواع المذكورة في

العينة.

a. 25 و 0.918

b. 10 و 0.592

التركيز على محتوى الرياضيات

خصائص اللوغاريتمات يمكن

استخدام خصائص الضرب والاشتقاق

ولوغاريتم القوة وقانون تغيير الأساس

لتبسيط اللوغاريتمات. ومن المفيد غالبًا

استخدام هذه الخصائص وقانون تغيير

الأساس لتغيير صورة اللوغاريتم إلى

صورة أكثر فائدة.

OL خيارات الواجب المنزلي المتميز

المتعلمون أصحاب النهط الطبيعي اطلب من الطلاب استخدام شبكة الإنترنت أو المراجع الموجودة في المكتبة للبحث عن ظواهر طبيعية في عالمنا تستخدم فيها اللوغاريتمات لقياس أو توصيف ما يحدث. واطلب من الطلاب كتابة النتائج التي يجدونها في دفتر اليومية. ويجب أن يذكروا فيه طريقة ارتباط اللوغاريتمات بالظاهرة إضافةً إلى الصيغ التي قاموا باستخدامها.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-60 للتحقق من فهم الطلاب.
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة إلى التمارين 39-48. ذكر الطلاب بأنه عند ضرب لوغاريتم في عدد أمامه، فالخطوة الأولى تتمثل في إدخال العدد الموجود في أس التعبير داخل اللوغاريتم.

خطأ شائع بالنسبة للتمارين 49-58. تحقق من معرفة الطلاب أن العدد لا يمكن أن يكون سالبا لأن لوغاريتمات الأعداد السالبة غير معرفة في نظام الأعداد الحقيقية.

إجابات إضافية

29. $\log_9 6 + 3 \log_9 x + 5 \log_9 y + \log_9 z$
30. $7 \ln x - \frac{1}{3} \ln(x+2)$
31. $2 \log_3 p + \log_3 q - \frac{1}{5} \log_3 (3q-1)$
32. $\ln 4 + \ln d + 5 \ln f - \frac{1}{8} \ln(1-3d)$
33. $\log_{11} a - 4 \log_{11} b + 12 \log_{11} c + 7 \log_{11} d$
34. $2 \log_7 h + 11 \log_7 j - 5 \log_7 k$
35. $\log_4 10 + 2 \log_4 t + \log_4 u - 3 \log_4 v$
36. $6 \log_5 a - 3 \log_5 b + 4 \log_5 c$
37. $\ln 3 + 4 \ln a + 7 \ln b + \ln c - \frac{1}{4} \ln(b-9)$
38. $\log_2 (3x+2) - \frac{1}{7} \log_2 (1-5x)$

39. $\log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}} = \log_5 \frac{x^3 \sqrt{6-x}}{6-x}$
40. $\log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}} = \log_7 \frac{32x^5 \sqrt[3]{5x+1}}{5x+1}$
42. $\ln \frac{(x+3)^4}{\sqrt[5]{4x+7}} = \ln \frac{(x+3)^4}{4x+7} - \frac{1}{5} \ln(4x+7)$
47. $\ln \frac{\sqrt[4]{2a-b}}{\sqrt[5]{3b+c}} = \ln \frac{\sqrt[4]{2a-b} \cdot \sqrt[5]{3b+c}}{3b+c}$

تبارين

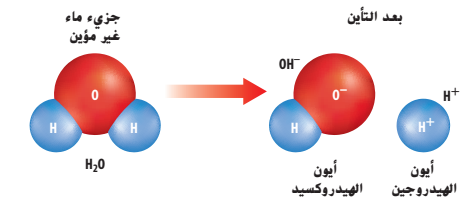
عبر عن كل لوغاريتم باستخدام $\ln 2$ و $\ln 5$. (مثال 1)

1. $\ln \frac{4}{5}$ **2** $\ln 2 - \ln 5$
2. $\ln 200$ **3** $\ln 2 + 2 \ln 5$
3. $\ln 80$ **4** $\ln 2 - \ln 5$
4. $\ln 12.5$ **5** $\ln 2 - \ln 2$
5. $\ln \frac{0.8}{2}$ **6** $\ln 2 - \ln 5$
6. $\ln \frac{2}{5}$ **7** $\ln 2 - \ln 5$
7. $\ln 2000$ **8** $\ln 2 + 2 \ln 5$
8. $\ln 1.6$ **9** $\ln 2 - \ln 5$

عبر عن كل لوغاريتم باستخدام $\ln 3$ و $\ln 7$. (مثال 1)

9. $\ln 63$ **2** $\ln 3 + \ln 7$
10. $\ln \frac{49}{81}$ **2** $\ln 7 - 4 \ln 3$
11. $\ln \frac{7}{9}$ **3** $\ln 7 - 2 \ln 3$
12. $\ln 147$ **3** $\ln 3 + 2 \ln 7$
13. $\ln 1323$ **3** $\ln 2 + 3 \ln 7$
14. $\ln \frac{343}{729}$ **3** $\ln 7 - 6 \ln 3$
15. $\ln \frac{2401}{81}$ **4** $\ln 7 - 4 \ln 3$
16. $\ln 1701$ **5** $\ln 3 + \ln 7$

17. **الكيمياء** القيمة الثابتة لتأين الماء في الماء K_w هي ناتج تركيزات أيونات الهيدروجين (H^+) والهيدروكسيد (OH^-).



$$a. \log K_w = \log [H^+] + \log [OH^-]$$

قاعدة القيمة الثابتة لتأين الماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$. حيث يشير الفوسان إلى التركيز بالمول في اللتر. (مثال 1)

a. عبر عن $\log K_w$ بدلالة $\log [H^+]$ و $\log [OH^-]$.

b. القيمة الثابتة K_w هي 1×10^{-14} . حوّل معادلتك لأبسط صورة من الجزء a لعكس القيمة الرقمية لـ K_w .

$$-14 = \log [H^+] + \log [OH^-]$$

c. إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة ماء يبلغ 1×10^{-9} مول في اللتر، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

$$-5 = \log [H^+] + \log [OH^-]$$

18. **الأعاصير** المسافة d بالأميال التي يقطعها إعصار تبلغ

$$w - \frac{65}{93}$$

الإعصار. (مثال 1)

a. عبر عن w بدلالة d . $\log d$

b. إذا كان الإعصار يقطع 100 ميل، فضع تقديراً لسرعة الرياح.

$$w = 93 \log_{10} d + 65$$

$$251 \text{ mph}$$

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي. (مثال 2)

19. $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **1**
20. $8 \ln e^2 - \ln e^{12}$ **4**
21. $9 \ln e^3 + 4 \ln e^5$ **47**
22. $\log_2 \sqrt[3]{32}$ **1**
23. $2 \log_3 \sqrt{27}$ **3**
24. $3 \log_7 \sqrt[3]{49}$ **1**
25. $4 \log_2 \sqrt{8}$ **6**
26. $50 \log_5 \sqrt{125}$ **75**
27. $\log_3 \sqrt[5]{243}$ **5**
28. $36 \ln e^{0.5} - 4 \ln e^5$ **-2**

قم بتوسيع كل تعبير. (مثال 3) 29-38. انظر الحاشية.

29. $\log_9 6x^3y^5z$
30. $\ln \frac{x^7}{\sqrt{x+2}}$
31. $\log_3 \frac{p^2q}{\sqrt[3]{3q-1}}$
32. $\ln \frac{4df^5}{\sqrt{1-3d}}$
33. $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$
34. $\log_7 h^{2/11}k^{-5}$
35. $\log_4 10t^2uv^{-3}$
36. $\log_5 a^6b^{-3}c^4$
37. $\ln \frac{3a^4b^7c}{\sqrt{b-9}}$
38. $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt{1-5x}}$

قم بتبسيط كل تعبير مما يلي. (مثال 4) 39-40. انظر الحاشية.

39. $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6-x)$
40. $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x+1)$
41. $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$ **$\log_3 \frac{a^7b}{64c^2}$**
42. $4 \ln (x+3) - \frac{1}{5} \ln (4x+7)$ **انظر الحاشية.**
43. $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$ **$\log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$**
44. $\ln 13 + 7 \ln a - 11 \ln b + \ln c$ **$\ln 13a^7b^{-11}c$**
45. $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$ **$\log_6 25a^2bc^7$**
46. $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$ **$\log_2 \frac{x}{yz^3}$**
47. $\frac{1}{4} \ln (2a-b) - \frac{1}{5} \ln (3b+c)$ **انظر الحاشية.**
48. $\log_3 4 - \frac{1}{2} \log_3 (6x-5)$ **$\log_3 \frac{4}{\sqrt{6x-5}} = \log_3 \frac{4\sqrt{6x-5}}{6x-5}$**

أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي. (مثال 5)

49. $\log_6 14$ **1.473**
50. $\log_3 10$ **2.096**
51. $\log_7 5$ **0.827**
52. $\log_{128} 2$ **0.143**
53. $\log_{12} 145$ **2.003**
54. $\log_{22} 400$ **1.938**
55. $\log_{100} 101$ **1.002**
56. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$ **1.585**
57. $\log_{-2} 8$ **لا يوجد حل حقيقي**
58. $\log_{13000} 13$ **0.271**

59. **الحواسيب** تتم كتابة برامج الحواسيب في مجموعات من

التعليقات تسمى لوغاريتمات. لتنفيذ مهمة في برنامج كمبيوتر،

يجب تحليل تشغيل اللوغاريتم (الخوارزم) في البرنامج. ويمكن

تمثيل وقت التشغيل بالوواني R المطلوب لتحليل اللوغاريتم من

n خطوات بالدالة $R = \log_2 n$. (مثال 6)

a. حدد وقت التشغيل اللازم لتحليل لوغاريتم من 240 خطوة.

7.9 ثواني

b. حتى الوصول إلى أقرب خطوة، كم عدد الخطوات في لوغاريتم

يوثت تشغيل يبلغ 8.45 ثواني؟ **350 خطوة**

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1- 60, 113- 116, 118- 138	2- 60 زوجية، 113- 116, 134- 118
OL ضمن المستوى	1- 97 فردية، 89- 111, 112- 116, 118- 138	61- 116, 118- 134
BL أعلى من المستوى	61- 138	

إجابات إضافية

69. $\frac{3}{5} \ln x + \frac{1}{5} \ln(x+3)$

70. $2 \log_5 x + 5 \log_5 y - \frac{1}{3} \log_5 (4x - y)$

71. $\log_{14} 11 - \frac{5}{4} \log_{14} x - \frac{1}{4} \log_{14} (8x - 1)$

72. $2 \ln 3 + 2 \ln x + \ln y + 3 \ln z - 4 \ln(y - 5)$

72. $2 \ln 3 + 2 \ln x + \ln y + 3 \ln z - 4 \ln(y - 5)$

60. **النقل** اشترت شركة نقل شاحنة نقل جديدة مقابل

AED 56000. افترض أن الدالة $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ تمثل الزمن t

بالسنوات التي مرت على الشراء، وحدد على أساس السعر المبدئي P ، القيمة الحالية V ، والمعدل السنوي للاستهلاك r . (مثال 6)

a. إذا كانت القيمة الحالية للشاحنة تبلغ AED 40000 وتم استهلاكها بمعدل 15% في العام، فما مقدار الوقت الذي مر منذ شرائها مع التقريب إلى أقرب عام؟ **عامان**

b. إذا كانت القيمة الحالية للشاحنة تبلغ AED 34000 وتم استهلاكها بمعدل 10% في العام، فما مقدار الوقت الذي مر منذ شرائها مع التقريب إلى أقرب عام؟ **5 أعوام**

قَدِّر كل لوغاريتم إلى أقرب عدد كلي.

61. $\log_4 5$ 1

62. $\log_2 13$ 4

63. $\log_3 10$ 2

64. $\log_7 400$ 3

65. $\log_5 \frac{1}{124}$ -3

66. $\log_{12} 177$ 2

67. $\log_3 \frac{1}{6}$ 1

68. $\log_4 \frac{1}{165}$ -4

قم بتوسيع كل تعبير مما يلي. 69-74. **انظر الحاشية.**

69. $\ln \sqrt[3]{x^3(x+3)}$

70. $\log_5 \frac{x^2 y^5}{\sqrt[3]{4x-y}}$

71. $\log_{14} \frac{11}{\sqrt{x^5(8x-1)}}$

72. $\ln \frac{9x^2 y z^3}{(y-5)^4}$

73. $\log_8 \sqrt{x^3 y^2 (z-1)}$

74. $\log_{12} \frac{5x}{\sqrt{x^7(x+13)}}$

75. **الزلازل** يقيس مقياس ريختر شدة الزلازل. يمكن حساب مقدار M

للطاقة الزلزالية بالجول E والناتجة عن زلزال باستخدام الدالة

a. $M = \frac{2}{3} (\log E - 4.4)$ $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$

مقياس ريختر

0-1.9 2-2.9 3-3.9 4-4.9 5-5.9



لا يكشف
الزلازل
يكتشف
الآثار
تقع بعض الأشياء
الصغيرة غير المثبتة
يشبه حدوث
اهتزازات على
متن شاحنة
قد تهتز
الأشياء المعلقة
إلا بجهاز قياس

a. استخدم خصائص اللوغاريتمات لتوسيع المعادلة.

b. ما مقدار الطاقة في زلزال يطلق 7.94×10^{11} جول؟ **5**

c. أطلق زلزال ألوم روك في عام 2007 في كاليفورنيا 4.47×10^{12} جول من الطاقة. وأطلق زلزال أنكوراج في عام 1964 في ألاسكا 1.58×10^{18} جول من الطاقة. فكم بلغ عدد أضعاف مقدار الطاقة لزلزال أنكوراج بالمقارنة بمقدار الطاقة لزلزال ألوم روك؟ **1.67**

d. لا يمكن الإحساس بالزلازل بشكل عام قبل أن تصل إلى مقدار طاقة يبلغ 3 على مقياس ريختر. كم عدد وحدات جول الطاقة التي يطلقها زلزال بهذا المقدار؟ **$8 \times 7.94 \times 10^{18}$ جول**

قم بتبسيط كل تعبير. 76-81. **انظر الحاشية.**

76. $\frac{3}{4} \ln x + \frac{7}{4} \ln y + \frac{5}{4} \ln z$

77. $\log_2 15 + 6 \log_2 x - \frac{4}{3} \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 (x+3)$

78. $\ln 14 - \frac{2}{3} \ln 3x - \frac{4}{3} \ln (4-3x)$

79. $3 \log_6 2x + 9 \log_6 y - \frac{4}{5} \log_6 x - \frac{8}{5} \log_6 y - \frac{1}{5} \log_6 z$

80. $\log_4 25 - \frac{5}{2} \log_4 x - \frac{7}{2} \log_4 y - \frac{3}{2} \log_4 (z+9)$

81. $\frac{5}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln (y+8) - 3 \ln y - \ln (10-x)$

استخدم خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة كل لوغاريتم أدناه بصيغة $a \ln 2 + b \ln 3$ ، حيث a و b قيمتان ثابتتان. ثم حدد بشكل تقريبي قيمة كل لوغاريتم بالنظر إلى أن $\ln 2 \approx 0.69$ و $\ln 3 \approx 1.10$.

82. $\ln 4$ **$2 \ln 2$; 1.38**

83. $\ln 48$ **$4 \ln 2 + \ln 3$; 3.86**

84. $\ln 162$ **$\ln 2 + 4 \ln 3$; 5.09**

85. $\ln 216$ **$2 \ln 2 - 2 \ln 3$; -0.82**

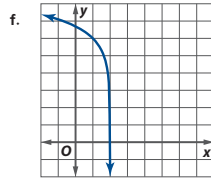
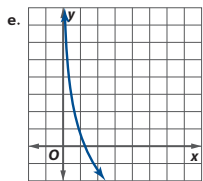
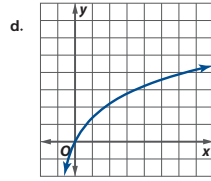
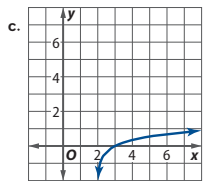
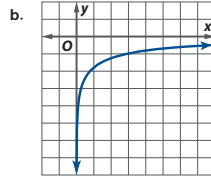
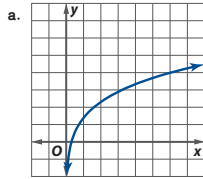
86. $\ln \frac{3}{2}$ **$\ln 3 - \ln 2$; 0.41**

87. $\ln \frac{4}{9}$ **$2 \ln 2 - 2 \ln 3$; -0.82**

88. $\ln \frac{4}{27}$ **$3 \ln 2 - 2 \ln 3$; -1.92**

89. $\ln \frac{32}{9}$ **$5 \ln 2 - 2 \ln 3$; 1.25**

حدد التمثيل البياني المقابل لكل معادلة.



90. $f(x) = \ln x + \ln(x+3)$ **a** 91. $f(x) = \ln x - \ln(x+5)$ **b**

92. $f(x) = 2 \ln(x+1)$ **d** 93. $f(x) = 0.5 \ln(x-2)$ **c**

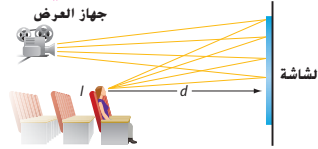
94. $f(x) = \ln(2-x) + 6$ **f** 95. $f(x) = \ln 2x - 4 \ln x$ **e**

حوّل كل تعبير مما يلي لأبسط صورة.

108. $(\log_3 6)(\log_6 13)$ **log 3 13** 109. $(\log_5 7)(\log_7 2)$ **log 5 7**
110. $(\log_4 9) \div (\log_4 2)$ **log 2 9** 111. $(\log_5 12) \div (\log_8 12)$ **log 5 8**

112. الأفلام التطبيقية عبارة عن سلسلة من الصور الثابتة التي إذا تم عرضها بالسرعة الكافية تغطي للمشاهد إحساساً بوجود حركة. إذا كان تردد الصور الثابتة المعروضة بطيئاً جداً، يلاحظ المشاهد اهتزازاً بين كل صورة. افترض أن الحد الأدنى للتردد f الذي يختفي عنده الاهتزاز لأول مرة يتحدد بالدالة $f = K \log I$ ، حيث I كثافة الضوء الذي يصل إلى المشاهد من الشاشة و K ثابت التناسب.

a. كثافة الضوء الذي يراه المشاهد الجالس على مسافة d من الشاشة يتحدد بالدالة $I = \frac{k}{d^2}$ ، حيث k ثابت التناسب. أوضّح أن $f = K(\log k - 2 \log d)$.



b. افترض أنك لاحظت الاهتزاز في عرض فيلم وانتقلت إلى ضعف المسافة من الشاشة. بدلالة K ، كيف تؤثر هذه الحركة على قيمة f ؟ اشرح استدلالك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الإثبات ضع تمثيلاً بيانياً لكل من الخصائص التالية للوغاريتمات ثم أثبتها.

113. خاصية ناتج الضميمة 114. خاصية الأس الثابت

115. الإثبات أثبت أن $\log_a \frac{ax}{b} = \frac{\log ax}{\log ab}$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

116. الاستنتاج كيف يمكن التوصل إلى التمثيل البياني للدالة $g(x) = \log_4 x$ باستخدام تحويل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \ln x$ ؟

117. التحدي إذا $x \in \mathbb{N}$ فما هي قيم x التي لا يمكن معها تبسيط $\ln x$ ؟

118. تحليل الخطأ قام عمر ومريم بتوسيع $\log_2 \left(\frac{xy}{z}\right)^4$ باستخدام خصائص اللوغاريتمات. هل كلاهما على صواب؟ اشرح. انظر الحاشية.

عمر: $4 \log_2 x + 4 \log_2 y - 4 \log_2 z$

مريم: $2 \log_4 x + 2 \log_4 y - 2 \log_4 z$

119. الإثبات استخدم الخصائص اللوغاريتمية لإثبات

$\log_5 (nt)^2 = \frac{2 \log n \log 4 + 2 \log t \log 4}{\log_4 \frac{1}{t}}$

120-119. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

120. الكتابة في الرياضيات التمثيل البياني للدالة $g(x) = \log b$ يمثل في الواقع تحولاً للدالة $f(x) = \log x$ استخدم التغير في قاعدة الأساس للتوصل إلى التحول الذي يربط هذين التمثيلين البيانيين. ثم اشرح أثر قيم b المختلفة على التمثيل البياني للوغاريتم العادي.

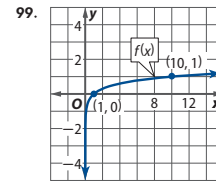
اكتب كل مجموعة من التعبيرات اللوغاريتمية بترتيب تصاعدي.

96. $\log_3 \frac{12}{4}, \log_3 \frac{36}{3} + \log_3 4, \log_3 12 - 2 \log_3 4$ **انظر الحاشية.**

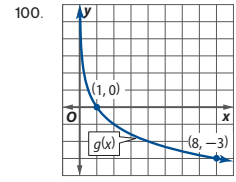
97. $\log_5 55, \log_5 \sqrt{100}, 3 \log_5 \sqrt[3]{75}$ **log 5 55, 3 log 5 3, log 5 100**

98. البيولوجيا مدة التكاثر للبكتيريا هي الزمن الذي تستغرقه البكتيريا لتضاعف عددها. يمكن التوصل إلى مدة التكاثر G باستخدام $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$ ، حيث t هي المدة الزمنية و b هي عدد البكتيريا في بداية التجربة و f هو عدد البكتيريا في نهاية التجربة. تبلغ مدة تكاثر بكتيريا المتفطرة السلية 16 ساعة. ما الوقت الذي يستغرقه 4 من البكتيريا للتكاثر إلى 1024 بكتيريا؟ **264 ساعة**

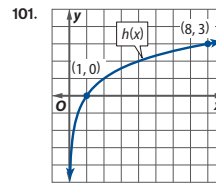
اكتب معادلة لكل تمثيل بياني.



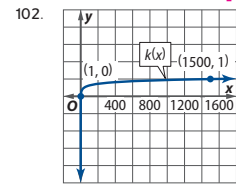
$f(x) = \log_{10} x$



$g(x) = \log_2 x$



$h(x) = \log_2 x$



$k(x) = \log_{1500} x$

103. الكيمياء pK_a هي القيمة اللوغاريتمية الثابتة لتحلل الحمض

HF ، والذي يتألف من أيونات H^+ و F^- . يمكن حساب pK_a بالدالة

$pK_a = -\log \frac{[H^+][F^-]}{[HF]}$ ، حيث $[H^+]$ هو تركيز H^+ الأيونات و $[F^-]$

هو تركيز F^- الأيونات و $[HF]$ هو تركيز المحلول الحمضي. يتم قياس

كل التركيزات بالمول في اللتر.

a. استخدم خصائص \log لتوسيع معادلة pK_a .

$pK_a = -(\log [H^+] + \log [F^-] - \log [HF])$

b. ما هو pK_a لتفاعل يكون فيه $[H^+] = 0.01$ مول في اللتر.

$[F^-] = 0.01$ مول في اللتر و $[HF] = 2$ مول في اللتر؟ **4.30**

c. يمكن حساب القيمة الثابتة لتحلل الحمض K_a في مادة

بإستخدام $K_a = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]}$ ، إذا كان في المادة $pK_a = 25$ ، فما هو

K_a فيها؟ **1×10^{-25}**

d. الأدهايد عبارة عن مجموعة وظيفية مشتركة في الجزيئات

العضوية. يبلغ pK_a في الأدهايد حوالي 17. ما هو K_a المقابل لهذا؟

1×10^{-17}

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

104. $\ln[\ln(e^{e^6})]$ **6**

105. $10^{\log 4}$ **4**

106. $4 \log_{17} 17^{\log_{10} 100}$ **8**

107. $e^{\log_4 4^{12}}$ **2**

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 118.

ينبغي على الطلبة رؤية أن أحمد

قام بتبديل أساس اللوغاريتم وأسه.

وينبغي على الطلبة التحقق من

حل عمر للتأكد من صحته.

إجابات إضافية

85. $3 \ln 2 + 3 \ln 3$; 5.37

96. $\log_3 12 - 2 \log_3 4, \log_3 \frac{12}{4},$
 $\log_3 \frac{36}{3} + \log_3 4$

112a. $f = K \log I$
 $= K \log \left(\frac{k}{d^2}\right)$
 $= K(\log k - \log d^2)$

$= K(\log k - 2 \log d)$

112b. لنفرض أن f هي التردد الأدنى الذي

يختفي عنده الوميض أول مرة أثناء

جلوسك على مقعدك الأصلي على

مسافة d من الشاشة. ولنفرض أن f

هي التردد الأدنى عندما أصبحت المسافة

التي تفصلك عن الشاشة $2d$. إذا

$f_1 = K(\log k - 2 \log d)$

$f_2 = K(\log k - 2 \log 2d)$

$= K[\log k - 2(\log 2 + \log d)]$

$= K(\log k - 2 \log 2 - 2 \log d)$

$= K(\log k - \log 2^2 - 2 \log d)$

$= K(\log k - \log 4 - 2 \log d)$

وبالتالي، فإن التأثير هو f_2

$f_2 - f_1$

$f_2 - f_1 = K(\log k - \log 4 -$

$2 \log d) - K(\log k -$

$2 \log d)$

$= K \log k - K \log 4 -$

$2K \log d - K \log k +$

$2K \log d$

$= -K \log 4$

$\approx -0.602K$

تم اختزال التردد الأدنى الذي

اختفى عنده الوميض أول

مرة بمقدار 0.602K.

الإجابة النموذجية: وضّح

بالتفصيل الدالة $f(x) =$

$\ln x$ من خلال معامِل

اللوغاريتم $\frac{\log e}{\log 4}$

عمر: قامت مريم بنقل الأس

والأساس بطريقة خاطئة.

73. $\frac{3}{7} \log_8 x + \frac{2}{7} \log_8 y + \frac{1}{7} \log_8 (z - 1)$

74. $\log_{12} 5 + \log_{12} x - \frac{7}{6} \log_{12} x -$

$\frac{1}{6} \log_{12} (x + 13)$

76. $\ln \sqrt[4]{x^3 y^7 z^5}$

77. $\log_2 \frac{15x^5}{\sqrt[3]{x(x+3)}} \text{ or } \log_2 \frac{15x^5 \sqrt{(x^2+3x)^2}}{x^2+3x}$

78. $\ln \frac{14}{\sqrt[3]{9x^2(4-3x)^4}} \text{ or } \ln \frac{14 \sqrt[3]{(9x^2(4-3x)^4)^2}}{9x^2(4-3x)^4}$

79. $\log_6 \frac{8x^3 y^8}{\sqrt[5]{x^4 y^3 z}} \text{ or } \log_6 \frac{8x^2 y^7 \sqrt[5]{xy^2 z^4}}{z}$

80. $\log_4 \frac{25}{\sqrt{x^5 y^7 (z+9)^3}} \text{ or } \frac{25 \sqrt{xy(z+9)}}{x^3 y^4 (z+9)^2}$

81. $\ln \frac{\sqrt{x^5(y+8)}}{y^3(10-x)}$

مراجعة شاملة

ارسم كل دالة وحلها. وضع المجال والبدى والتقاطعات والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي ومواضع تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 2-2) 121-123. انظر الحاشية.

$$121. f(x) = \log_6 x$$

$$122. g(x) = \log_3 x$$

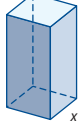
$$123. h(x) = \log_5 x - 2$$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لوصف التحول الذي يؤدي إلى تمثيل $g(x)$ البياني. ثم ارسم تمثيلي $f(x)$ و $g(x)$ 124-126. انظر ملحق إجابات الوحدة 2. البيانيين. (الدرس 1-2)

$$124. f(x) = 2^x; g(x) = -2^x$$

$$125. f(x) = 5^x; g(x) = 5^{x+3}$$

$$126. f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x; g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$$



127. علم الهندسة يكون حجم المنشور الزجاجي المستطيل بقاعدة مربعة ثابتًا عند 120 قدمًا مكعبًا. (الدرس 5-1)

a. اكتب مساحة سطح المنشور الزجاجي كدالة $A(x)$ من طول ضلع المربع x .

b. ارسم دالة مساحة السطح بيانيًا. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

c. ما الذي يحدث لمساحة سطح المنشور الزجاجي مع اقتراب طول ضلع المربع من 0؟

مساحة السطح تقترب من اللانهاية.

القسم باستخدام القسمة التركيبية. (الدرس 1-3)

$$128. (x^2 - x + 4) \div (x - 2)$$

$$129. (x^3 + x^2 - 17x + 15) \div (x + 5)$$

$$130. (x^3 - x^2 + 2) \div (x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 2$$

أوضح أن f و g دالتان عكسيتان. c. ثم مثل بيانيًا كلتا الدالتين على نفس شاشة حاسبة التمثيلات البيانية. (الدرس 1-7)

131-133. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

$$131. f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$$

$$132. f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$133. f(x) = (x-3)^3 + 4$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x-4} + 3$$

المادة	الحرارة النوعية (ج/و)
الألمنيوم	0.902
الذهب	0.129
الزئبق	0.140
الحديد	0.45
الثلج	2.03
الماء	4.179
الهواء	1.01

134. العلوم الحرارة النوعية هي مقدار الطاقة المطلوبة لكل وحدة من الكتلة لرفع درجة حرارة مادة ما بمقدار درجة واحدة مئوية. يعرض الجدول الحرارة النوعية بالجدول في الجرام لمواد معينة. يتحدد مقدار الطاقة المنقول على أساس $Q = cmT$. حيث Q هي الحرارة النوعية للمادة و m كتلتها و T التغير في درجة الحرارة. (الدرس 1-5)

a. توصل إلى دالة التغير في درجة الحرارة.

b. ما التمثيل البياني الأصلي لهذه الدالة؟

c. ما المجال الملائم لهذه الدالة؟ $D = \{m \mid m > 0\}$

$T = \frac{Q}{cm}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

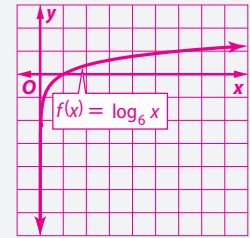
$D = \{m \mid m > 0\}$

$D = \{m \mid m > 0\}$

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب أن يكتبوا أفكارهم بشأن علاقة خصائص اللوغاريتمات بالدرس القادم الذي يتمحور حول حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

إجابات إضافية



121.

$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$

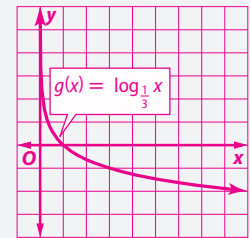
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$x: 1$ خط التقارب مع المحور

الرأسي $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = y$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة

ضمن المجال $(0, \infty)$



122.

$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$

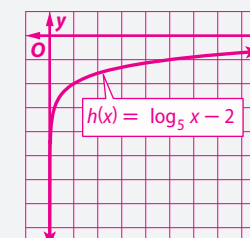
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$x: 1$ خط التقارب مع المحور

الرأسي $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = y$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متناقصة

ضمن المجال $(0, \infty)$



123.

$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الأفقي

$x: 25$ خط التقارب مع المحور

الرأسي $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = y$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة

ضمن المجال $(0, \infty)$

106 | الدرس 2-3 | خصائص اللوغاريتمات

خيارات الواجب المنزلي المتميز

التوسع ليس من الضروري استخدام قانون تغيير الأساس على الدوام لإيجاد قيمة لوغاريتم أساسه مغاير للعدد 10 أو e. اطلب من الطلاب كتابة ثلاثة أمثلة ينطبق عليها ذلك. على كل طالب أن يتبادل أمثله مع زميله وإيجاد قيمة لوغاريتمات زميله.

106 | الدرس 3-2 | خواص اللوغاريتمات

اختبار منتصف الوحدة

الدروس 2-1 إلى 2-3

الدروس من 2-1 إلى 2-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقييم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بشكل غير صحيح، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في أقواس.

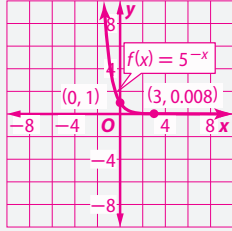
إجابات إضافية

1. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y :

1: الخط المتقارب: $x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; تناقص

ضمن المجال. عند النقطة $(-\infty, \infty)$

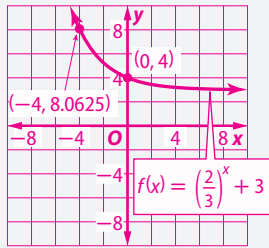


2. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (3, \infty)$

التقاطع مع المحور الرأسي y : 4.

الخط المتقارب: $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$; تناقص عند $(-\infty, \infty)$



أوجد قيمة كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-2)

10. $\log_2 64$ **6**
11. $\log_5 \frac{1}{125}$ **-3**
12. $\ln e^{23}$ **23**
13. $\log 0.001$ **-3**

14. **مرض** يمكن تمثيل عدد الأطفال المصابين بفيروس من خلال $c(d) = 4.9 + 11.2 \ln d$ حيث يمثل d عدد الأيام التي مرت منذ إصابة أول طفل. كم عدد الأطفال المصابين تقريباً في اليوم الثامن؟ (الدرس 2-2) **29**

أوجد قيمة كل دالة للقيمة المعطاة. (الدرس 2-2)

15. $\pi(x) = 2 \ln(x + 3)$; $x = 18$ **6.09**
16. $H(a) = 4 \log \frac{2a}{5} - 8$; $a = 25$ **-4**

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة $\ln 3$ و $\ln 4$. (الدرس 2-3)

17. $\ln 48$ **$\ln 3 + 2 \ln 4$**
18. $\ln 2.25$ **$2 \ln 3 - \ln 4$**
19. $\ln \frac{64}{27}$ **$3 \ln 4 - 3 \ln 3$**
20. $\ln \frac{9}{16}$ **$2 \ln 3 - 2 \ln 4$**

21. **كيمياء** عمر النصف لنظير مشع هو 7 أعوام. (الدرس 2-3)

- a. إذا كان هناك في البداية 75 جراماً من المادة، فما الكمية المتبقية بعد 14 عاماً؟ **18.75 g**
- b. بعد كم عام سيتبقى $\frac{1}{16}$ من الكمية الأصلية؟ **28 yr**
- c. يمكن تمثيل الوقت المستغرق لانحلال مادة من N_0 إلى N بواسطة $t = 7 \log_{0.5} \frac{N}{N_0}$ كم تقريباً عدد السنوات التي يستغرقها انحلال أي كمية من المادة المشعة إلى $\frac{1}{3}$ من الكمية الأصلية؟ **11.1 yr**

قم بتوسيع كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-3)

22. $\log_3 \sqrt[4]{x^2 y^3 z^5}$
23. $\log_9 \frac{3x^3}{y}$
24. $5 \log_4 a + 6 \log_4 b - \frac{1}{3} \log_4 7c$
25. $\log \frac{x+1}{x-1}$
26. $\log_4 \frac{a^5 b^6}{\sqrt[3]{7c}}$

قم بتبسيط كل تعبير مما يلي. (الدرس 2-3)

27. $\log_3 x + \frac{3}{4} \log_3 y + \frac{5}{4} \log_3 z$
28. $\frac{1}{2} \log_9 x - \log_9 y$

مثل كل دالة بيانياً وحلها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة. (الدرس 2-1) **1-2. انظر الحاشية.**

1. $f(x) = 5^{-x}$
2. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم ارسم التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و $g(x)$. (الدرس 2-1)

3. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$
4. $f(x) = 3^x$; $g(x) = 2 \times 3^{x-2}$
5. $f(x) = e^x$; $g(x) = -e^x - 6$
6. $f(x) = 10^x$; $g(x) = 10^{2x}$

3-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

7. **الاختبار من متعدد** في قاعدة الفائدة المركبة

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ أي المتغيرات "لا" يؤثر على الوقت المستغرق لمضاعفة استثمار؟ (الدرس 2-1) **A**

- | | | | |
|---|---|---|---|
| A | P | C | n |
| B | r | D | t |

8. **المعرفة المالية** ادخرت هند 1200 AED من عملها بالوظائف

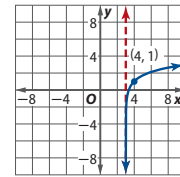
الصغيرة وتريد استثمار المبلغ ليكون لديها بعض المال الإضافي عند التخرج من الجامعة بعد 5 سنوات. (الدرس 2-1)

a. كم سيتوفر لدى هند إذا استثمرت المال بمعدل فائدة سنوي 7.2% مركب شهرياً؟ **1718.15 AED**

b. كم سيتوفر لدى هند إذا استثمرت المال بمعدل فائدة سنوي 7.2% مركب بصفة مستمرة؟ **1720.00 AED**

9. **الاختبار من متعدد** الدالة الأصلية للتمثيل البياني الموضح هي

$f(x) = \log_2 x$ **J**



يحتوي التمثيل البياني على النقطة المعلومة والخط المقارب الرأسي الموضح. أي مما يلي هي الدالة التمثيل البياني؟ (الدرس 3-2)

- F $f(x) = \log_2(x + 3) + 1$
- G $f(x) = \log_2(x - 4) + 1$
- H $f(x) = -\log_2(x - 3) + 1$
- J $f(x) = \log_2(x - 3) + 1$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

2-4

لماذا؟

الحالي

السابق



يمكن حساب شدة زلزال باستخدام $R = \log \frac{a}{T} + B$ حيث يمثل R الرقم على مقياس ريختر، و a سعة حركة الأرض الرأسية، و T مدة الموجة الزلزالية بالنواني. و B عامل إضعاف الموجات الزلزالية.

1. قم بتطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية لحل المعادلات.

2. قم بتطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية لحل المعادلات.

• قمت بتطبيق الخصائص العكسية للأسس واللوغاريتمات لتبسيط التعابير: (الدرس 2-2)

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-4 تطبيق خصائص معكوس للأسس واللوغاريتمات لتبسيط التعابير.

الدرس 2-4 تطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية لحل المعادلات. قم بتطبيق خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية لحل المعادلات.

بعد الدرس 2-4 تمثيل البيانات باستخدام الدوال الأسية و اللوغاريتمية.

1. خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية في الدرس 2-2، تم إثبات خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية. تذكر من الدرس 1-7 أنه إذا كانت الدالة f تتمتع بخاصية "واحد لواحد"، فإن قيمة y لا تناظرها أكثر من قيمة x واحدة، بمعنى، $f(a) = f(b)$ فقط في حالة $a = b$ ، ويؤدي بنا هذا إلى خاصية "واحد لواحد" التالية للدوال الأسية.

المفهوم الأساسي خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية

الشرح تكون $b > 0$ و $b \neq 1$ ، $b^x = b^y$ فقط إذا كانت $x = y$.

الأمثلة بما أن $3^x = 3^5$ ، إذا $x = 5$ بما أن $10^{\log x} = 10^3$ ، إذا $x = 3$

ويطلق عليها أيضًا خاصية "التساوي" للدوال الأسية.

تتضمن الكلمات فقط إذا كان في هذه الخاصية عبارتين منفصلتين. يمكن استخدام إحدهما، $b^x = b^y$ إذا كانت $x = y$ لحل بعض المعادلات الأسية البسيطة من خلال التعبير عن طرفي المعادلة في ضوء أساس مشترك.

مثال 1 حل المعادلات الأسية باستخدام خاصية واحد لواحد

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

a. $36^{x+1} = 6^{x+6}$

$$36^{x+1} = 6^{x+6}$$

$$(6^2)^{x+1} = 6^{x+6}$$

$$6^{2x+2} = 6^{x+6}$$

$$2x + 2 = x + 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$x = 4$$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^c = 64^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^c = 64^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-c} = (2^6)^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{-c} = 2^3$$

$$-c = 3$$

$$c = -3$$

المعادلة الأصلية

$$6^2 = 36$$

قوة أسية

خاصية واحد لواحد

اطرح x من كل طرف.

اطرح 2 من كل طرف. تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^6 = 64$$

قوة أسية

خاصية واحد لواحد

حل c . تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.

تمرين موجه

1A. $16^{x+3} = 4^{4x+7} - \frac{1}{2}$

1B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3x}{4}} - 2$

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ بهذا الدرس.

اسأل:

- في المعادلة $R = \log \frac{a}{T} + B$ ، ما الذي يجب أن يتصف به كل من a و T ؟ يجب أن يكونا موجبين.

تترتب عبارة أخرى على خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية وهي، بما أن $x = y$ ، إذا $b^x = b^y$ ، ويمكن استخدامها لحل المعادلات اللوغاريتمية مثل $\log_2 x = 3$

$$\begin{array}{ll} \log_2 x = 3 & \text{المعادلة الأصلية} \\ 2^{\log_2 x} = 2^3 & \text{خاصية واحد لواحد} \\ x = 2^3 & \text{خاصية المعكوس} \end{array}$$

يُطلق على تطبيق خاصية "واحد لواحد" رفع أس كل طرف من المعادلة. لاحظ أن تأثير رفع أس كل طرف من المعادلة $\log_2 x = 3$ هو تحويل المعادلة من الشكل اللوغاريتمي إلى الشكل الأسّي.

مثال 2 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خاصية واحد لواحد

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

a. $\ln x = 6$	الطريقة 1 استخدم رفع الأس.	الطريقة 2 اكتب بالصورة الأسية.
$\ln x = 6$	المعادلة الأصلية	$\ln x = 6$
$e^{\ln x} = e^6$	ارفع أس كل طرف.	$x = e^6$
$x = e^6$	خاصية المعكوس	$x \approx 403.43$
$x \approx 403.43$	استخدم خاصية	

تحقق $\checkmark \ln 403.43 \approx 6$

b. $6 + 2 \log 5x = 18$	الطريقة 1 استخدم رفع الأس.	الطريقة 2 اكتب بالصورة الأسية.
$6 + 2 \log 5x = 18$	المعادلة الأصلية	$6 + 2 \log 5x = 18$
$2 \log 5x = 12$	اطرح 6 من كل طرف.	$2 \log 5x = 12$
$\log 5x = 6$	اقسم كل طرف على 2.	$\log 5x = 6$
$5x = 10^6$	اكتب بالصورة الأسية.	$5x = 10^6$
$x = \frac{10^6}{5}$	اقسم كل طرف على 5.	$x = \frac{10^6}{5}$
$x = 200000$	حوّل لأبسط صورة. تحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية.	

c. $\log_8 x^3 = 12$	الطريقة 1 استخدم رفع الأس.	الطريقة 2 اكتب بالصورة الأسية.
$\log_8 x^3 = 12$	المعادلة الأصلية	$\log_8 x^3 = 12$
$3 \log_8 x = 12$	خاصية الأس الثابت	$3 \log_8 x = 12$
$\log_8 x = 4$	اقسم كل طرف على 3.	$\log_8 x = 4$
$x = 8^4, 4096$	اكتب بالصورة الأسية وحوّل لأبسط صورة. تحقق من هذا الحل.	

تمرين موجه

2A. $-3 \ln x = -24$	$e^8 \approx 2981$	2B. $4 - 3 \log(5x) = 16$	$\pm \sqrt{82} \approx \pm 9.06$
		2C. $\log_3(x^2 - 1) = 4$	

2 خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية للدوال اللوغاريتمية كذلك بخاسية "واحد لواحد". وعليه، يمكننا إثبات خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية.

المفهوم الأساسي خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية

تكون $b > 0$ و $\log_b x = \log_b y$ و $b \neq 1$ فقط إذا كانت $x = y$

بما أن $\log_2 6 = \log_2 6$ ، إذا $x = 6$ بما أن $e^y = 2$ ، إذا $\ln e^y = \ln 2$

تتضمن هذه الخاصية عبارة $\log bx = \log by$ إذا كانت $x = y$ ويمكنك استخدام هذه العبارة لحل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة من خلال تبسيط كل طرف من المعادلة أولاً في صورة لوغاريتمات بالأساس ذاته.

نصيحة دراسية

حلول المعادلات اللوغاريتمية بينما يُفضل دائماً التحقق من حلول المعادلات، يصدق هذا بشكل خاص على المعادلات اللوغاريتمية لأن الدوال اللوغاريتمية يتم تعريفها فقط بمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

نصيحة دراسية

خاصية التساوي خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية يُطلق عليها أيضاً خاصية التساوي للدوال اللوغاريتمية.

■ لِم لا يمكن أن يكون كل من a و T سالبيين؟ لا يمكن أن يكون الزمن سالباً. ويجب أن يكون الحد $\frac{a}{T}$ موجباً ليكون اللوغاريتم معرفاً.

■ ما قيمة R إذا كان $a = 0.48$ ، $T = 0.006$ ، و $B = 4.2$ ؟ **6.1**

1 خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسية

يبين **المثال 1** طريقة استخدام خاصية واحد لواحد للدوال الأسية في حل المعادلات الأسية. يبين **المثال 2** طريقة استخدام خاصية واحد لواحد لحل الدوال اللوغاريتمية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حل كل من المعادلات التالية.

a. $4^x + 2 = 16^{x-3}$ **8**

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$ **$\frac{8}{3}$**

2 أوجد حل كل من المعادلات

اللوغاريتمية التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من مائة إذا لزم الأمر.

a. $2 \ln x = 18$ **8103.08**

b. $7 - 3 \log 10x = 13$ **$\frac{1}{1000}$**

c. $\log_5 x^4 = 20$ **3125**

نصائح للمعلمين الجدد

تجنب الأخطاء إذا كان العدد الموجود داخل اللوغاريتم يملك أساً، فيمكن إخراج الأس وضربه باللوغاريتم. يمكن أن ينظر الطلاب إلى اللوغاريتم باعتباره متغيراً ينبغي عزله لحل المعادلة.

2 خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية

يوضح **المثال 3** طريقة استخدام خاصية واحد لواحد للدوال اللوغاريتمية في حل المعادلات التي يضم طرفاها لوغاريتمات. يوضح **مثال 4** كيفية إيجاد حل اللوغاريتم في كل طرف من طرفي المعادلة لحل المعادلات الأسية التي يضم أحد طرفيها فقط تعبيرًا أسّيًا. وخصائص **الأمثلة 5-7** طريقة استخدام التغير الجبري وخصائص الدوال الأسية واللوغاريتمية في حل المعادلات. يوضح **المثال 8** كيفية وجود حلول دخيلة للمعادلات الأسية، وبالتالي يجب التحقق من الحلول في المعادلة الأصلية. يبين **المثال 9** الطريقة التي يمكن بها نمذجة نمو أسّي بمعادلة.

أمثلة إضافية

3 أوجد حل كل من المعادلات التالية.

- a. $\log_2 5 = \log_2 10 - \log_2 (x - 4)$ **6**
b. $\log_5 (x^2 + x) = \log_5 20$
-5, 4

4 أوجد حل كل من المعادلات التالية. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.

- a. $3^x = 7$ **1.77**
b. $e^{2x} + 1 = 8$ **0.54**

التركيز على محتوى الرياضيات

خاصية واحد لواحد للدوال الأسية واللوغاريتمية يمكن استخدام خاصية واحد لواحد للدوال الأسية واللوغاريتمية لحل المعادلات التي تضم دوال أسية ذات أساس مشترك في كلا الطرفين. كما يمكن استخدامها لحل المعادلات التي تضم لوغاريتم في أحد طرفيها من خلال تغيير $\log x = y$ إلى $x = b^y$ ثم حل المعادلة. يمكن استخدام خاصية واحد لواحد للدوال اللوغاريتمية في حل المعادلات التي تضم لوغاريتمات ذات أساس متناظر في طرفي المعادلة أو التي تضم دالة أسية في طرف واحد من المعادلة.

مثال 3 حل المعادلات اللوغاريتمية باستخدام خاصية واحد لواحد

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

a. $\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 (x - 2)$

$\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 (x - 2)$

$\log_4 x = \log_4 3(x - 2)$

$\log_4 x = \log_4 (3x - 6)$

$x = 3x - 6$

$-2x = -6$

$x = 3$

المعادلة الأصلية

خاصية ناتج الضرب

خاصية التوزيع

خاصية واحد لواحد

اطرح $3x$ من كل طرف.

اقسم كل طرف على -2 . تحقق من هذا الحل.

b. $\log_3 (x^2 + 3) = \log_3 52$

$\log_3 (x^2 + 3) = \log_3 52$

$x^2 + 3 = 52$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

المعادلة الأصلية

خاصية واحد لواحد

اطرح 3 من كل طرف.

خذ الجذر التربيعي لكل طرف. تحقق من هذا الحل.

تمرين موجه

3A. $\log_6 2x = \log_6 (x^2 - x + 2)$ **2 = 1**

3B. $\log_{12} (x + 3) = \log_{12} x + \log_{12} 4$ **1**

ترتب عبارة أخرى على خاصية "واحد لواحد" للدوال اللوغاريتمية وهي، بما أن $x = y$ ، إذا $\log_b x = \log_b y$ ، ويمكن استخدامها لحل المعادلات الأسية مثل $e^x = 3$

$e^x = 3$

$\ln e^x = \ln 3$

$x = \ln 3$

المعادلة الأصلية

خاصية واحد لواحد

خاصية المعكوس

يُطلق على تطبيق خاصية "واحد لواحد" أخذ لوغاريتم طرفي المعادلة. بينما اللوغاريتمات الطبيعية أسهل في الاستخدام عندما يكون أساس التعبير الأسّي هو e . يمكنك استخدام اللوغاريتمات على أي أساس للمساعدة في حل المعادلات الأسية.

مثال 4 حل المعادلات الأسية

أوجد حل كل من المعادلات التالية. قُرب إلى أقرب جزء من مئة.

a. $4^x = 13$

$4^x = 13$

$\log 4^x = \log 13$

$x \log 4 = \log 13$

$x = \frac{\log 13}{\log 4}$ تقريبًا $= 1.85$

المعادلة الأصلية

خذ اللوغاريتم العادي لكل طرف.

خاصية الأس الثابت

اقسم كل طرف على $\log 4$ واستخدم حاسبة.

b. $e^{4-3x} = 6$

$e^{4-3x} = 6$

$\ln e^{4-3x} = \ln 6$

$4 - 3x = \ln 6$

$x = \frac{\ln 6 - 4}{-3}$ تقريبًا $= 0.74$

المعادلة الأصلية

خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.

خاصية المعكوس

حل x واستخدم حاسبة.

تمرين موجه

4A. $8^y = 0.165$ **-0.87**

4B. $1.43^a + 3.1 = 8.48$ **4.70**

4C. $e^{2+5w} = 12$ **0.10**

110 | الدرس 2-4 | المعادلات الأسية واللوغاريتمية

نصيحة دراسية

حل بديل يمكن أيضًا حل مسألة المثال 4a من خلال أخذ \log_4 لكل طرف. ستكون النتيجة $x = \log_4 13$. لاحظ أنه عند تطبيق تغيير قاعدة الأساس، يكون هذا مكافئًا للحل $x = \frac{\log 13}{\log 4}$.

أمثلة إضافية

- 5 أوجد حل $3^{6x-3} = 2^{4-4x}$ إلى أقرب جزء من مئة. 0.65
- 6 أوجد حل $e^{2x} - e^x - 2 = 0$ 0.69

نصائح للمعلمين الجدد

الحلول الدخيلة ذكّر الطلاب أن الحلول الدخيلة هي قيم لا تحقق المعادلة الأصلية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

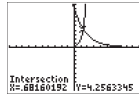
الموقع الإلكتروني للصف اطلب من أحد الطلاب التطوع لحل العديد من الأمثلة التي تستخدم مختلف خصائص اللوغاريتمات إضافةً إلى خاصية واحد لواحد. احفظ كل مثال كصفحة ملاحظات، مستخدمًا اسم الخاصية كعنوان للصفحة. انشر ملاحظاتك على الموقع الإلكتروني الخاص بالصف حتى يستطيع الطلاب استخدامها كمرجع إضافي خارج الفصل.

مثال 5 حل بصورة لوغاريتمية

حل $x - 1 = 3^{2-x}$ قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

أوجد الحل جبريًا

$$\begin{aligned} 4^{3x-1} &= 3^{2-x} \\ \ln 4^{3x-1} &= \ln 3^{2-x} \\ (3x-1) \ln 4 &= (2-x) \ln 3 \\ 3x \ln 4 - \ln 4 &= 2 \ln 3 - x \ln 3 \\ 3x \ln 4 + x \ln 3 &= 2 \ln 3 + \ln 4 \\ x(3 \ln 4 + \ln 3) &= 2 \ln 3 + \ln 4 \\ x(\ln 4^3 + \ln 3) &= \ln 3^2 + \ln 4 \\ x \ln [3(4^3)] &= \ln 36 \\ x \ln 192 &= \ln 36 \\ x &= \frac{\ln 36}{\ln 192} \text{ أو تقريبًا } 0.68 \end{aligned}$$



Intersection: (0.68, 1.192)
[-10, 10] scl: 1 by [-10, 10] scl: 1

المعادلة الأصلية
خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.
خاصية الأس الثابت
خاصية التوزيع
افصل المتغيرات بالطرف الأيسر من المعادلة.
خاصية التوزيع
خاصية الأس الثابت
خاصية ناتج الضرب
 $3(4^3) = 192$
اقسم كل طرف على $\ln 192$.

أثبت بيانيًا

ارسم $y = 3^{2-x}$ و $y = 4^{3x-1}$. نقطة تقاطع هذين التمثيلين الناتجين عن الحاسبة هي 0.68 تقريبًا. وتتوافق مع الحل الجبري.

تمرين موجه

أوجد حل كل من المعادلات التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

5A. $6^{2x+4} = 5^{-x+1}$ $\ln \frac{1296}{180} \approx -1.07$

5B. $4^{3x+2} = 6^{2x-1}$ $2 \ln \frac{96}{4} \approx -7.93$

يمكن حل المعادلات التي تتضمن تعابير أسية متعددة من خلال تطبيق الأساليب التربيعية مثل تحليل العوامل أو الصيغة التربيعية. تحقق أن الحلول ليست دخيلة.

مثال 6 حل المعادلات الأسية بالشكل التربيعي

حل $e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$

$$\begin{aligned} e^{2x} + 6e^x - 16 &= 0 && \text{المعادلة الأصلية} \\ u^2 + 6u - 16 &= 0 && \text{اكتب بالصورة التربيعية بفرض أن } u = e^x \\ (u+8)(u-2) &= 0 && \text{عامل.} \\ u = -8 &\text{ أو } u = 2 && \\ e^x = -8 &&& \text{استبدل } u \text{ بـ } e^x. \\ \ln e^x = \ln (-8) &&& \text{خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.} \\ x = \ln (-8) &&& \text{خاصية المعكوس} \end{aligned}$$

الحل الوحيد هو $x = \ln 2$ لأن $\ln (-8)$ حل دخيل. تحقق من هذا الحل.

$$\begin{aligned} e^{2x} + 6e^x - 16 &= 0 && \text{المعادلة الأصلية} \\ e^{2(\ln 2)} + 6e^{\ln 2} - 16 &\stackrel{?}{=} 0 && \text{استبدل } x \text{ بـ } \ln 2. \\ \ln 2^2 + 6e^{\ln 2} - 16 &\stackrel{?}{=} 0 && \text{خاصية الأس الثابت} \\ 2^2 + 6(2) - 16 &= 0 && \text{خاصية المعكوس} \end{aligned}$$

تمرين موجه

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

6A. $e^{2x} + 2e^x = 8$ $\ln 2 \approx 0.69$

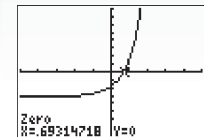
6B. $4e^{4x} + 8e^{2x} = 5$ -0.346

انتبه!

التحويل لأبسط صورة لاحظ أنه لا يمكن استخدام خاصية ناتج القسمة لتحويل $\ln 36$ لصورة أبسط.

نصيحة تقنية

إيجاد الأصناف يمكنك إثبات حل $e^{2x} + 6e^x - 16 = 0$ بيانيًا باستخدام حاسبة التمثيلات البيانية لإيجاد صفر $y = e^{2x} + 6e^x - 16$ البياني 0.69 تقريبًا متوافق مع الحل الجبري $\ln 2 \approx 0.69$.



[-5, 5] scl: 1 by
[-40, 40] scl: 5

يمكن حل المعادلات التي تحتوي على تعابير لوغاريتمية متعددة من خلال تبسيط التعابير أولاً باستخدام خصائص الأس الثابت (القوة) وناتج الضرب وخارج القسمة ثم تطبيق خاصية واحد لواحد.

مثال 7 حل المعادلات اللوغاريتمية

$$\ln(x+2) + \ln(3x-2) = 2 \ln 2x$$

$$\ln(x+2) + \ln(3x-2) = 2 \ln 2x$$

$$\ln(x+2)(3x-2) = \ln(2x)^2$$

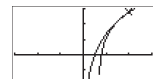
$$\ln(3x^2 + 4x - 4) = \ln 4x^2$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 4x^2$$

$$0 = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = (x-2)(x-2)$$

$$x = 2$$



Intersection
x=2.7725864
y=1.5899977
[-3, 3] scl: 1 by [-3, 3] scl: 1

المعادلة الأصلية

خاصية الأس الثابت وناتج الضرب

حوّل لأبسط صورة.

خاصية واحد لواحد

حوّل لأبسط صورة.

عامل.

خاصية ناتج الضرب الصفري

تحقق يمكنك التحقق من هذا الحل في المعادلة الأصلية، أو إثباته بيانياً من خلال إيجاد نقطة تقاطع التمثيل البياني لكل من $y = 2 \ln 2x$ و $y = \ln(x+2) + \ln(3x-2)$

تحقق من تقدمك

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

7A. $\ln(7x+3) - \ln(x+1) = \ln(2x)$ **3, $-\frac{1}{2}$**

7B. $\ln(2x+1) + \ln(2x-3) = 2 \ln(2x-2)$ **$\frac{7}{4}$**

قد لا يكون من الواضح أن حل معادلة لوغاريتمية ما دخیل حتى يتم التحقق منه في المعادلة الأصلية.

مثال 8 التحقق من أن الحلول ليست دخيلة

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$

$$\log_{12} 12x(x-1) = 2$$

$$\log_{12} (12x^2 - 12x) = 2$$

$$\log_{12} (12x^2 - 12x) = \log_{12} 12^2$$

$$\log_{12} (12x^2 - 12x) = \log_{12} 144$$

$$12x^2 - 12x = 144$$

$$12x^2 - 12x - 144 = 0$$

$$12(x-4)(x+3) = 0$$

$$x = 4 \text{ or } x = -3$$

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$

$$\log_{12} 12(4) + \log_{12}(4-1) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_{12} 48 + \log_{12} 3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_{12} 48 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_{12} 144 = 2 \quad \checkmark$$

المعادلة الأصلية

خاصية ناتج الضرب

خاصية التوزيع

خاصية المعكوس

$$12^2 = 144$$

خاصية واحد لواحد

اطرح 144 من كل طرف.

عامل.

خاصية ناتج الضرب الصفري

تحقق

$$\log_{12} 12x + \log_{12}(x-1) = 2$$

$$\log_{12} 12(-3) + \log_{12}(-3-1) \stackrel{?}{=} 2$$

$$\log_{12} (-36) + \log_{12} (-4) \stackrel{?}{=} 2$$

حيث لم يتم تعريف $\log_{12}(-36)$ ولا $\log_{12}(-4)$. إذاً $x = -3$ حل دخيل.

تمرين موجه

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

8A. $\ln(6y+2) - \ln(y+1) = \ln(2y-1)$ **3**

8B. $\log(x-12) = 2 + \log(x-2)$ **لا يوجد حل**

نصيحة دراسية

تحديد مجال معادلة بعد تحديد مجال المعادلة بطريقة أخرى للتحقق من أن الحلول ليست دخيلة. في المثال 8، يكون مجال $\log_{12} 12x$ هو $x > 0$ بينما مجال $\log_{12}(x-1)$ هو $x > 1$. وبالتالي، مجال المعادلة هو $x > 1$. بما أن $-3 < 1$ ، إذن -3 لا يمكن أن يكون حلاً للمعادلة.

OL خيارات الواجب المنزلي المتمايز

المتعلمون عن طريق التواصل بعد مناقشة المثالين 7 و 8 مع الصف، اطلب من كل طالب حلّ التمارين الموجهة الخاصة بالمثالين كل بمفرده. ثم نظم الطلاب في مجموعات ثنائية بحيث يشرح كل طالب طريقة حله إلى زميله. ثم اطلب من كل مجموعة الانضمام إلى مجموعة أخرى وتبادل الشرح والإجابات. وأخيراً، ناقش أيّ اختلافات أو أسئلة بين الطلاب مع الفصل بأكمله.

مثال 9 من الحياة اليومية نموذج النمو الأسي

الإنترنت يوضح الجدول عدد الزيارات لموقع إنترنت جديد بنهاية يناير ونهاية أبريل من العام ذاته.

a. إذا علمت أن عدد الزيارات يتزايد بمعدل أسي، فحدد معدل النمو المستمر. ثم اكتب معادلة أسية لتمثيل هذه الحالة.

الإقبال على موقع الإنترنت	
الشهر	عدد الزيارات
يناير	125
أبريل	2000

افترض أن $N(t)$ تمثل عدد الزيارات بنهاية t أشهر وافترض حدوث نمو أسي مستمر. بذلك يكون العدد الأولي N_0 هو 125 زيارة وعدد الزيارات N بعد مدة 3 أشهر. من يناير إلى أبريل، هو 2000. استخدم هذه المعلومات لإيجاد معدل النمو المستمر k .

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 e^{kt} && \text{صيغة النمو الأسي} \\ 2000 &= 125 e^{k(3)} && N(3) = 2000, N_0 = 125 \text{ و } t = 3 \\ 16 &= e^{3k} && \text{اقسم كل طرف على 125.} \\ \ln 16 &= \ln e^{3k} && \text{خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.} \\ \ln 16 &= 3k && \text{خاصية المعكوس} \\ \frac{\ln 16}{3} &= k && \text{اقسم كل طرف على 3.} \\ 0.924 &\approx k && \text{استخدم حاسبة.} \end{aligned}$$

يتزايد عدد الزيارات بمعدل مستمر يبلغ 92.4% تقريبًا كل شهر. ولذلك، فالمعادلة التي تمثل هذه الحالة هي $N(t) = 125e^{0.924t}$.

b. استخدم نموذجك لتوقع عدد الأشهر التي يستغرقها موقع الإنترنت للوصول إلى 2 مليون زيارة.

$$\begin{aligned} N(t) &= 125e^{0.924t} && \text{نموذج النمو الأسي} \\ 2,000,000 &= 125e^{0.924t} && N(t) = 2,000,000 \\ 16,000 &= e^{0.924t} && \text{اقسم كل طرف على 125.} \\ \ln 16,000 &= \ln e^{0.924t} && \text{خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف.} \\ \ln 16,000 &= 0.924t && \text{خاصية المعكوس} \\ \frac{\ln 16,000}{0.924} &= t && \text{اقسم كل طرف على 0.924.} \\ 10.48 &\approx t && \text{استخدم حاسبة.} \end{aligned}$$

وفقًا لهذا النموذج، سوف يصل موقع الإنترنت إلى 2 مليون زيارة في غضون 10.48 أشهر تقريبًا.

تعزيز موجه

9. التذكارات يوضح الجدول إيرادات بيع قمصان وغيرها من التذكارات التي باعها اثنان من المؤددين أثناء كأس العالم وبعده بأسبوع.

مبيعات تذكارات كأس العالم		
الأيام بعد الكأس	المؤد A المبيعات (AED)	المؤد B المبيعات (AED)
0	300,000	200,000
7	37,000	49,000

- A. إذا علمت أن المبيعات تنخفض بمعدل أسي، فحدد معدل الانخفاض المستمر لمبيعات كل مؤد. ثم اكتب معادلة أسية لتمثيل كل حالة.
- B. استخدم نماذجك لتوقع مبيعات كل مؤد من تذكارات كأس العالم بعد 4 أسابيع من انتهاء الفعاليات.
- C. هل ستتماثل مبيعات المؤددين يومًا؟ وإن حدث ذلك، فمتى؟

مثال إضافي

9 الهواتف الخلوية يبين الجدول التالي عدد الهواتف الخلوية التي باعها متجر جديد خلال شهري مارس وأغسطس في عام واحد.

الهواتف الخلوية	
الشهر	العدد المبيع
مارس	88
أغسطس	177

- a. إذا علمت أن عدد الهواتف المبيعة شهريًا يتزايد بمعدل أسي، فحدد معدل النمو المستمر. ثم اكتب المعادلة الأسية لتمثيل هذه الحالة.
- $N(t) = 88e^{0.1398t}$; 13.98%
- b. استخدم نموذجك لتوقع عدد الأشهر التي سيستغرقها المتجر لبيع 500 هاتف في شهر واحد. 12.4 شهرًا

نصائح للمعلمين الجدد

الحاسبة البيانية يمكن للطلاب التحقق من توقعاتهم الخاصة بالدوال الأسية عبر التمثيل البياني للمعادلة الأسية والعدد الذي يتوقعونه به على التمثيل البياني ذاته لتحديد نقطة التقاطع.



الربط بالحياة اليومية

تتم طباعة قبعات وقمصان البطولة للفريقين قبل المنافسات الرياضية الرئيسية مثل بطولة كرة القدم الأمريكية. وكثيرًا ما يتم التبرع بتذكارات الفريق الخاسر للمنظمات غير الربحية لتوزيعها على العائلات المحتاجة في دول أخرى. في 2007، تم التبرع بملابس رياضية تبلغ قيمتها التقديرية 2.5 مليون دولار أمريكي. المصدر: مجلة وورلد فيجن

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-81 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة للتمارين 22-24، من الضروري إدراك أنه لا يمكن إخراج الأس الموجود داخل اللوغاريتم وضربه باللوغاريتم لأن هذا الأس يخص x فقط. ولا ينطبق على التعبير داخل اللوغاريتم بكامله.

إجابات إضافية

10a. $A = 5000e^{0.03t}$; $A = 5200(1.03)^t$
10c. سيكون الحساب المركب السنوي خيارًا أفضل.

11. $e^4 \approx 54.60$

12. 100,000,000

13. لا يوجد حل حقيقي

14. $\frac{10}{3} \approx 3.33$

15. $\frac{e^2}{7} \approx 1.06$

16. 16

17. $e^{-3} \approx 0.05$

18. لا يوجد حل

19. 65,536

20. ± 256

39. $\frac{\ln \frac{27}{7}}{\ln \frac{49}{3}} \approx 0.48$

40. $\frac{\ln \frac{77}{7}}{\ln \frac{7}{11}} \approx -9.61$

41. $\frac{4 \ln 6}{\ln \frac{32}{9}} \approx 5.65$

42. $\frac{\ln \frac{3}{32}}{\ln 9} \approx -1.08$

43. $\frac{3 \ln \frac{4}{3}}{\ln 648} \approx 0.13$

44. $\frac{\ln 20}{\ln \frac{125}{4}} \approx 0.87$

تمارين

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 1)

- $4^x + 7 = 8^x + 3$ **5**
- $8^x + 4 = 32^{3x}$ **1**
- $49^x + 4 = 7^{18-x}$ **10**
- $32^{x-1} = 4^{x+5}$ **5**
- $\left(\frac{9}{16}\right)^{3x-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5x+4}$ **8**
- $12^{3x+11} = 144^{2x+7}$ **-3**
- $25^{\frac{x}{3}} = 5^{x-4}$ **12**
- $\left(\frac{5}{6}\right)^{4x} = \left(\frac{36}{25}\right)^{9-x}$ **-9**

9. **الإنترنت** يمكن تمثيل عدد الأشخاص P بالمليون والذين يستخدمون محركين للبحث في الإنترنت بعد t من الأسابيع على إنشاء محرك البحث بواسطة المعادلتين $P_1(t) = 1.5^t + 4$ و $P_2(t) = 2.25^t - 3.5$ خلال أي أسبوع تم استخدام كل محرك بواسطة نفس العدد من الأشخاص؟ (مثال 1) **11**

10. **المعرفة المالية** تخطط عائشة لاستثمار 5000 AED وتدرس فتح حسابين للمدخرات. الحساب الأول مركب بشكل مستمر ويقدم معدل فائدة 3%. والحساب الثاني مركب سنويًا ويقدم كذلك معدل فائدة 3%. لكن المصرف سوف يكافئ 4% من الاستثمار الأولي. (مثال 1)
a. اكتب معادلة لرصيد كل حساب مدخرات بعد t من الأعوام.
b. كم عدد الأعوام التي يستغرقها الحساب المركب بشكل مستمر للحاق بحساب المدخرات المركب سنويًا؟ **89 عامًا تقريبًا**
c. إذا خططت عائشة لإيداع المال في الحساب لمدة 30 عامًا، فما الحساب الذي ينبغي عليها اختياره؟ **انظر الحاشية.**

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 2) **11-20. انظر الحاشية.**

- $\ln a = 4$
- $-8 \log b = -64$
- $\ln(-2) = c$
- $2 + 3 \log 3d = 5$
- $14 + 20 \ln 7x = 54$
- $100 + 500 \log_4 g = 1100$
- $7000 \ln h = -21,000$
- $-18 \log_0 j = -126$
- $12,000 \log_2 k = 192,000$
- $\log_2 m^4 = 32$

21. **السيارات** إذا كانت جميع العوامل الأخرى متساوية، فكلما زادت الإزاحة D بالتر لمزيج الهواء والوقود في محرك ما، زادت القدرة الحصانية H التي ينتجها. يمكن تمثيل القدرة الحصانية لمحرك طبيعي النهوية بالمعادلة $H = \log_{1.003} \frac{D}{7.394}$. أوجد الإزاحة إذا علمت أن القدرة الحصانية 200. (مثال 2) **2.54 L**

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 3)

- $\log_6 (x^2 + 5) = \log_6 41$ **± 6**
- $\log_8 (x^2 + 11) = \log_8 92$ **± 9**
- $\log_9 (x^4 - 3) = \log_9 13$ **± 2**
- $\log_7 6x = \log_7 9 + \log_7 (x - 4)$ **12**
- $\log_5 x = \log_5 (x + 6) - \log_5 4$ **2**
- $\log_{11} 3x = \log_{11} (x + 5) - \log_{11} 2$ **1**

114 | الدرس 2-4 | المعادلات الأسية واللوغاريتمية

أوجد حل كل من المعادلات التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة. (مثال 4)

- $6^x = 28$ **1.86**
- $1.8^x = 9.6$ **3.85**
- $3e^{4x} = 45$ **0.68**
- $e^{3x+1} = 51$ **0.98**
- $8^x - 1 = 3.4$ **0.71**
- $2e^{7x} = 84$ **0.53**
- $8.3e^{9x} = 24.9$ **0.12**
- $e^{2x} + 5 = 16$ **1.20**
- $2.5e^{x+4} = 14$ **-2.28**
- $0.75e^{3.4x} - 0.3 = 80.1$ **1.37**

38. **علم الوراثة** تتفاعل البلمرة التسلسلي هو تقنية شائعة الاستخدام في مختبرات الطب الشرعي لتضخيم الحمض النووي. في تفاعل البلمرة التسلسلي، يتم استخدام إنزيم لاقتصاص متتالية نيوكليوتيدات محددة من الحمض النووي ثم إجراء تناسخ للمنتاتية. يمكن تمثيل عدد متتاليات النيوكليوتيدات المتماثلة N بعد t من الدقائق بالمعادلة $N(t) = 100 \times 1.17^t$. (مثال 4)

- ما الوقت اللازم لوجود 1×10^4 من المتتاليات؟ **29.33 min**
- ما الوقت اللازم لتضخيم الحمض النووي إلى مليون متتالية؟ **58.66 min**

أوجد حل كل من المعادلات التالية. قَرِّب إلى أقرب جزء من مئة.

- $72x + 1 = 3^{x+3}$
- $11^{x+1} = 7^{x-1}$
- $9^x + 2 = 2^{5x-4}$
- $4^x - 3 = 6^{2x-1}$
- $3^{4x+3} = 8^{-x+2}$
- $5^{3x-1} = 4^{x+1}$
- $6^x - 2 = 5^{2x+3}$
- $8^{-2x-1} = 5^{-x+2}$
- $2^{5x+6} = 4^{2x+1}$
- $6^{-x-2} = 9^{-x-1}$

49. **علم الفلك** يمكن مقارنة سطوع جسمين فضائيين كما نراه من الأرض من خلال تحديد التباين في السطوع بين الجسمين. ويمكن حساب التباين في السطوع بواسطة المعادلة $V = 2.512^{m_f - m_b}$. حيث تمثل m_f مقدار سطوع الجسم الأكثر خفوتًا و m_b مقدار سطوع الجسم الأكثر سطوعًا. (مثال 5)



- بالنسبة إلى الشمس، $m = -26.73$. وأما القمر المكمثل، $m = -12.6$. حدد التباين في السطوع بين الشمس والقمر المكمثل. **≈ 449032**
- التباين في السطوع بين عطارد والزهرة مقداره 5.25. ومقدار سطوع الزهرة 3.7. حدد مقدار سطوع عطارد. **≈ -1.9**
- مقدار سطوع نبتون 7.7. والتباين في السطوع بين نبتون والمشتري 15856. ما مقدار سطوع نبتون؟ **≈ -2.8**

خيارات الواجب المنزلي المتميزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL	قريب من المستوى	1-81, 113, 114, 116, 118-138
OL	ضمن المستوى	86, فردية, 1-85, 102, فردية, 87-101, 112-114, فردية, 103-111, 116, 118-138
BL	أعلى من المستوى	82-138

114 | الدرس 2-4 | المعادلات الأسية واللوغاريتمية



أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 6) 50-59. انظر الحاشية.

50. $e^{2x} + 3e^x - 130 = 0$ 51. $e^{2x} - 15e^x + 56 = 0$
 52. $e^{2x} + 3e^x = -2$ 53. $6e^{2x} - 5e^x = 6$
 54. $9e^{2x} - 3e^x = 6$ 55. $8e^{4x} - 15e^{2x} + 7 = 0$
 56. $2e^{8x} + e^{4x} - 1 = 0$ 57. $2e^{5x} - 7e^{2x} - 15e^{-x} = 0$
 58. $10e^x - 15 - 45e^{-x} = 0$ 59. $11e^x - 51 - 20e^{-x} = 0$

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 7)

60. $\ln x + \ln(x+2) = \ln 63$ 7
 61. $\ln x + \ln(x+7) = \ln 18$ 2
 62. $\ln(3x+1) + \ln(2x-3) = \ln 10$ $2.17 \approx \frac{13}{6}$
 63. $\ln(x-3) + \ln(2x+3) = \ln(-4x^2)$ لا يوجد حل
 64. $\log(5x^2+4) = 2 \log 3x^2 - \log(2x^2-1)$ $-1, 1$
 65. $\log(x+6) = \log(8x) - \log(3x+2)$ لا يوجد حل
 66. $\ln(4x^2-3x) = \ln(16x-12) - \ln x$ 2
 67. $\ln(3x^2-4) + \ln(x^2+1) = \ln(2-x^2)$ $\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.19$

68. الصوت إن فقد السمع بفعل الضوضاء (NIHL) مسؤول عن 25% من حالات فقد السمع في الولايات المتحدة. ويمكن أن يحدث فقد السمع بفعل الضوضاء نتيجة التعرض لأصوات تبلغ شدتها 85 ديسيبل أو أكثر لفترة طويلة. تذكر أنه يمكن حساب الديسيبلات (dB) الناتجة عن صوت شدته I بواسطة المعادلة $dB = 10 \log\left(\frac{I}{1 \times 10^{-12}}\right)$. (مثال 7)

الصوت	الشدة (W/m^2)
الألعاب النارية	316.227
الطائرة النفاثة	31623
سيارة الإسعاف	3.162
حفلة موسيقى الروك	0.316
سماعات الرأس	0.032
مجفف الشعر	0.003

المصدر: وحدات ديسيبل خطيرة

- a. أي الأصوات الواردة بالجدول تُنتج وحدات ديسيبل كافية للتسبب في فقد السمع بفعل الضوضاء؟
 b. حدد عدد مجففات الشعر التي يمكنها إنتاج نفس عدد وحدات ديسيبل الناتجة عن حفلة لموسيقى الروك. قَرِّبْ إلى أقرب عدد كلي.
 c. كم عدد الطائرات النفاثة اللازمة لإنتاج نفس عدد وحدات ديسيبل الناتجة عن عرض للألعاب النارية؟ قَرِّبْ إلى أقرب عدد كلي.

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 8)

69. $\log_2(2x-6) = 3 + \log_2 x$ لا يوجد حل
 70. $\log(3x+2) = 1 + \log 2x$ $\frac{2}{17} \approx 0.12$
 71. $\log x = 1 - \log(x-3)$ 5
 72. $\log 50x = 2 + \log(2x-3)$ 2
 73. $\log_9 9x - 2 = -\log_9 x$ 3
 74. $\log(x-10) = 3 + \log(x-3)$ لا يوجد حل

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية. (مثال 8)

75. $\log(29,995x + 40,225) = 4 + \log(3x+4)$ 45
 76. $\log_4\left(\frac{1}{4}x\right) = -\log_4(x+8) - \frac{5}{2}$ 8
 77. $\log x = 3 - \log(100x+900)$ 1
 78. $\log_5 \frac{x^2}{8} - 3 = \log_5 \frac{x}{40}$ 25
 79. $\log 2x + \log\left(4 - \frac{16}{x}\right) = 2 \log(x-2)$ 6

80. الأعمال قامت سلسلة متاجر تجزئة لأجهزة الحاسب الآلي بافتتاح متجرين في العام الأول من تشغيلها. بعد 8 أعوام من التشغيل.

أصبحت السلسلة تتكون من 206 متاجر. (مثال 9)

- a. اكتب معادلة أسية لتمثيل عدد المتاجر N كدالة لعام التشغيل t .
 قَرِّبْ k إلى أقرب جزء من مئة. $N = 2e^{0.66(t-1)}$
 b. استخدم النموذج الذي وضعته في الجزء a لتوقع عدد المتاجر في العام 12 من التشغيل. 2844 تقريباً

81. الأوراق المالية كان سعر السهم في الأوراق المالية لسلسلة معاو 0.93 AED في شهر ما خلال عامها الأول. وأصبح سعر السهم في الأوراق المالية 3.52 AED خلال الشهر ذاته من عامها الخامس. (مثال 9)

- a. اكتب معادلة أسية لتمثيل سعر الأوراق المالية P كدالة لعام التداول t . قَرِّبْ k إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. $P = 0.93e^{0.3328(t-1)}$
 b. استخدم النموذج الذي وضعته في الجزء a لتوقع سعر الأوراق المالية في العام التاسع من التداول. 13.33 AED تقريباً

أوجد حل كل من المعادلات اللوغاريتمية التالية.

82. $5 + 5 \log_{100} x = 20$ $1,000,000$
 83. $6 + 2 \log_2 x = 30$ $e^{24} \approx 2.65 \times 10^{10}$
 84. $5 - 4 \log_2 x = -19$ $\frac{1}{64}$
 85. $36 + 3 \log_3 x = 60$ $3^8 = 6561$

86. الحموضة يتم تحديد حموضة مادة بواسطة تركيز أيونات H^+ بها. ونظراً لأن تركيز H^+ يمكن أن يختلف بعدة قيم أسية، يتم استخدام مقياس الحموضة اللوغاريتمي للإشارة إلى الحموضة والتي يمكن حسابها بالمعادلة $pH = -\log[H^+]$ حيث تمثل $[H^+]$ تركيز أيونات H^+ بالمول لكل لتر.

العنصر	درجة الحموضة
غاز النشادر	11.0
صودا الخبز	8.3
دم الإنسان	7.4
الماء	7.0
اللين	6.6
التفاح	3.0
عصير الليمون	2.0

- a. حدد تركيز H^+ في صودا الخبز. $5.01 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$
 b. ما هي نسبة حموضة اللين إلى دم الإنسان؟ 6.31
 c. يك قيمة أسية يزيد تركيز $[H^+]$ في عصير الليمون عن تركيز $[H^+]$ في غاز النشادر؟ 9
 d. كم عدد مولات أيونات H^+ في 1500 لتر من دم الإنسان؟

تقريباً 5.97×10^{-5} مول

115

انتبه!

خطأ شائع عند البحث عن قياس H^+ في التمرين 86. اضرب المعادلة في -1 أولاً. إذاً، يكون $pH = 10$. H^+ يجب إيجاد قياس H^+ في المادة لمقارنة حموضة المواد.

ملاحظات لحل التمرين

الحلول البيانية في التمارين 87-90.

سيقوم الطلاب بتحديد معادلات تتضمن دالات ليس لها لوغاريتم ابتدائي للبحث عن حل (حلول). وفيما يتعلق بهذه المعادلات، سيطبق الطلاب بدلاً من ذلك الطرق البيانية لإيجاد الحل (الحلول) التقريبية.

إجابات إضافية

$$45. \frac{\ln 4500}{\ln \frac{6}{25}} \approx -5.89$$

$$46. \frac{\ln 200}{\ln \frac{5}{64}} \approx -2.08$$

$$47. \frac{\ln \frac{1}{16}}{\ln 2} = -4$$

$$48. \frac{2 \ln 2}{\ln \frac{3}{2}} \approx 3.42$$

$$50. \ln 10 \approx 2.30$$

$$51. \ln 8 \approx 2.08 \text{ و } \ln 7 \approx 1.95$$

52. لا يوجد حل حقيقي

$$53. \ln \frac{3}{2} \approx 0.41$$

$$54. \ln 1 = 0$$

$$55. 0, \frac{\ln \frac{7}{8}}{2} \approx -0.067$$

$$56. \frac{\ln 0.5}{4} \approx -0.17$$

$$57. \frac{\ln 5}{3} \approx 0.54$$

$$58. \ln 3 \approx 1.10$$

$$59. \ln 5 \approx 1.61$$

إجابات إضافية

91a. الفوسفور 32:

$$A = 14.282 \frac{\ln(R)}{-0.693}$$

الكبريت 35:

$$A = 87.51 \frac{\ln(R)}{-0.693}$$

$$92. 1 \leq x \leq 5$$

$$93. 2 < y < 3$$

$$94. -4 \leq p \leq -2$$

$$95. -3 < f \leq -1$$

$$96. 1 < d < 5$$

حاسبة التمثيلات البيانية أوجد حل كل من المعادلات التالية جبرياً، إن أمكن. وإن تعذر ذلك، فترّب الحل إلى أقرب جزء من مئة باستخدام حاسبة التمثيلات البيانية.

$$87. x^3 = 2^x \quad x \approx 1.37$$

$$88. \log_2 x = \log_8 x \quad x = 1$$

$$89. 3^x = x(5^x) \quad x \approx 0.7$$

$$90. \log_5 5 = \log_5 x \quad x = 5$$

91. النشاط الإشعاعي يُظهر النظيران المشعان الفسفور 32 والكبريت 35 خاصية التحلل الإشعاعي. وعمر النصف للفسفور 32 هو 14.282 يوماً، أما عمر النصف للكبريت 35 فهو 87.51 يوماً.

a. اكتب معادلات للتعبير عن التحلل الإشعاعي للفسفور 32 والكبريت 35 في ضوء الوقت t باليوم ونسبة R للكمية المتبقية من النظير المشع باستخدام المعادلة العامة للتحلل الإشعاعي. من النظير $X = \frac{\ln R}{-0.693}$ ؛ حيث يمثل A عدد أيام تحلل النظير المشع و t عمر النصف بالأيام. **انظر الحاشية.**

b. عند أي من قيم R يكون الكبريت 35 قد تحلل لمدة 5 أيام أكثر من الفسفور 32؟ $R = 0.954$

أوجد حل كل من المتباينات الأسية التالية. 92-101. **انظر الحاشية.**

$$92. 2 \leq 2^x \leq 32$$

$$93. 9 < 3^y < 27$$

$$94. \frac{1}{4096} \leq 8^p \leq \frac{1}{64}$$

$$95. \frac{1}{2197} < 13^f \leq \frac{1}{13}$$

$$96. 10 < 10^d < 100,000$$

$$97. 4000 > 5^q > 125$$

$$98. 49 < 7^z < 1000$$

$$99. 10,000 < 10^a < 275,000$$

$$100. \frac{1}{15} \geq 4^b \geq \frac{1}{64}$$

$$101. \frac{1}{2} \geq e^c \geq \frac{1}{100}$$

102. **الطب الشرعي** يقوم خبراء الطب الشرعي بعمليات التشريح لتحديد وقت وسبب الوفاة. يمكن حساب الوقت t بالساعات منذ الوفاة

بواسطة المعادلة $t = -10 \ln \left(\frac{T - R_f}{98.6 - R_f} \right)$ ، حيث يمثل T درجة حرارة الجسم و R_f درجة حرارة الغرفة.

a. إذا قام خبير الطب الشرعي بقياس درجة حرارة الجسم ووجد أنها 93°F في غرفة حرارتها 72°F ، فما وقت الوفاة؟

b. توفي مريض في مستشفى منذ 4 ساعات. فإذا علمت أن متوسط درجة حرارة الغرفة في المستشفى 75°F ، فما درجة حرارة الجسم؟ 90.8°F

c. كانت درجة حرارة مريض 89°F بعد 3.5 ساعات من وفاته. حدد درجة حرارة الغرفة. 66°F

103. **الطب** تم إخضاع 50 شخصاً للعلاج من فيروس في اليوم ذاته. ويتسم الفيروس بأنه شديد العدوى، ويجب على هؤلاء الأشخاص البقاء في المستشفى حتى زوال الأعراض.

يمكن تمثيل عدد الأشخاص p الذين تظهر عليهم الأعراض بعد t من الأيام بواسطة المعادلة $p = \frac{52.76}{1 + 0.03e^{0.75t}}$

a. كم عدد من تظهر عليهم الأعراض بعد 5 أيام؟ **تقريباً 23**

b. حل المعادلة بالنسبة إلى t . **انظر الحاشية.**

c. بعد كم يوم تظهر الأعراض على شخص واحد فقط؟ **تقريباً 10**

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

$$104. 27 = \frac{12}{1 - \frac{1}{2}e^{-x}} \quad -0.11$$

$$105. 22 = \frac{L}{1 + \frac{L-3}{3}e^{-15}} \quad 22$$

$$106. 1000 = \frac{10,000}{1 + 19e^{-t}} \quad 0.75$$

$$107. 300 = \frac{400}{1 + 3e^{-2k}} \quad 1.10$$

$$108. 16^x + 4^x - 6 = 0 \quad 0.5$$

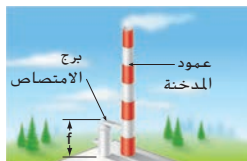
$$109. \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 6 \quad \ln \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 0.17$$

$$110. \frac{\ln(4x+2)}{\ln(4x-2)} = 3 \quad 0.949$$

$$111. \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2} \quad \ln \sqrt{3} \approx 0.549$$

112. **التلوث** أضافت بعض المصانع أنظمة ترشيح يُطلق عليها أبراج الامتصاص إلى المداخل لتقليل الانبعاثات الملوثة للبيئة. يمكن تمثيل النسبة المئوية للتلوث P الذي يتم التخلص منه بعد f من الأقدام من طول برج امتصاص بواسطة المعادلة $P = \frac{0.9}{1 + 70e^{-0.28f}}$

a-c. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**



a. مثل بياناً النسبة المئوية للتلوث الذي يتم التخلص منه كدالة لطول برج الامتصاص.

b. حدد أقصى نسبة مئوية للتلوث الذي يمكن التخلص منه بواسطة برج الامتصاص. اشرح استدلالك.

c. اذكر بالتقريب أقصى طول لبرج الامتصاص الذي ينبغي على المصنع استخدامه، اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

113. **الاستنتاج** ما أقصى عدد للحلول الدخيلة التي يمكن أن تتوفر لمعادلة لوغاريتمية؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

114. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثلاً لمعادلة لوغاريتمية لها عدد لا نهائي من الحلول. **الإجابة النموذجية: $\log x^3 = 2 \log x + \log x$**

115. **التحدي** إذا تم استثمار مبلغ بمعدل فائدة r مركبة شهرياً، فما الوقت اللازم لمضاعفة المبلغ ثلاثة أضعاف؟ **انظر الحاشية.**

116. **الاستنتاج** كيف يمكن حل معادلة تتضمن تعابير لوغاريتمية بثلاثة أساسات مختلفة؟ **انظر الحاشية.**

117. **التحدي** لأي من قيم x تختلف مجالات $f(x) = \log(x^4 - x^2)$ و $g(x) = \log x + \log x + \log(x-1) + \log(x+1)$ ؟

يتم تعريف $f(x)$ لـ $x < -1$ أو $x > 1$ ، بينما يتم تعريف $g(x)$ فقط لـ $x > 1$.

118. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن حل ما يلي جبرياً $t \ln P = \frac{L}{1 + \left(\frac{L-1}{L}\right)e^{-kt}}$ **انظر الحاشية.**



مختبر تقنية التمثيل البياني

حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية

الهدف:

- حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية جبرياً وبيانياً.

1 التركيز

الهدف حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية.

نصيحة دراسية

ذكَر الطلاب بأنه عند إدخال متباينة إلى الآلة الحاسبة البيانية، فبإمكانهم اختيار رمز للمتباينة بالتمرير إلى يسار إشارة التساوي وضغط ENTER (إدخال) إلى أن يومض المثلث المظلل الصحيح.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلبة في الفصل إلى مجموعات ثنائية. واطلب من الفصل كله حل النشاط 1. ثم اطلب من كل طالب العمل مع زميله لإكمال التمارين 1-6.

في الدرس 2-4، قمت بحل المعادلات الأسية جبرياً وأكدت الحلول بيانياً. يمكنك استخدام أساليب مشابهة والخصائص التالية لحل المتباينات التي تتضمن دوالاً أسية.

المفهوم الأساسي خصائص التباين في الدوال الأسية

الشرح إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ فقط إذا كان $x > y$ ، و $b^x < b^y$ فقط إذا كان $x < y$

مثال إذا كان $5^4 < 5^x$ فإن $x > 4$

تنطبق هذه الخاصية أيضاً على \geq و \leq .

نشاط 1 المتباينات الأسية

أوجد حلاً لـ $5^{2x-6} > 0.04^{x-3}$

أوجد الحل جبرياً

$5^{2x-6} > 0.04^{x-3}$	المتباينة الأصلية
$5^{2x-6} > \left(\frac{1}{25}\right)^{x-3}$	أعد كتابة 0.04 بصيغة $\frac{1}{25}$
$5^{2x-6} > (5^{-2})^{x-3}$	أعد كتابة $\frac{1}{25}$ بصيغة 5^{-2} أو 5 بحيث يكون لكل طرف نفس الأساس.
$5^{2x-6} > 5^{-2x+6}$	قوة الأس
$2x-6 > -2x+6$	خاصية التباين في الدوال الأسية
$4x > 12$	خاصية الجمع في المتباينات
$x > 3$	خاصية القسمة في المتباينات

مجموعة الحل هي \mathbb{R} $\{x \mid x > 3\}$ أو $(3, \infty)$

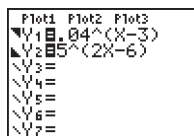
الإثبات بيانياً

الخطوة 1 يؤدي استبدال كل طرف في المتباينة بـ y إلى نظام المتباينات $y < 5^{2x-6}$ و $y = 0.04^{x-3}$

أدخل كل معادلة حدية وحدد خيار الظل الملائم.

الخطوة 2

مثّل النظام بيانياً. تُعتبر قيم x للنقاط في المنطقة التي تتداخل فيها الظلال هي مجموعة الحلول للمتباينة الأصلية. باستخدام خاصية التقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $(3, \infty)$. وهذا يتسق مع مجموعة الحل الجبري لدينا.



$[-0.5, 4.5]$ scl: 0.5 by $[-2, 3]$ scl: 0.5

تمارين

أوجد حل كل من المتباينات التالية.

- $16^x < 8^x + 1$ $(-\infty, 3)$
- $32^{5x} + 2 \geq 16^{5x}$ $[-2, \infty)$
- $2^{4x-5} > 0.5^{x-5}$ $(2, \infty)$
- $9^{2x-1} \geq 3^{2x+8}$ $[5, \infty)$
- $343^{x-2} \leq 49$ $[-\infty, 2\frac{2}{3}]$
- $100^x < 0.01^{3x-4}$ $(-\infty, 1)$

تمرين اطلب من الطلاب إتمام النشاطين 2 و3 والتمارين 7-12.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 10 لتقييم قدرة كل طالب على حل المتباينات اللوغاريتمية.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه حول حل المتباينات الأسية واللوغاريتمية.

لحل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات، استخدم الخاصية التالية.

المفهوم الأساسي تحويل المتباينة اللوغاريتمية إلى أسية

الشرح	فإن $x > b^y$ و $\log_b x > y$ و $x > 0$ و $b > 1$ إذا كان فإن $x < b^y$ و $\log_b x < y$ و $x > 0$ و $b > 1$ إذا كان فإن $0 < x < b^y$
المثال	$\log_3 x < 5$ و $\log_2 x > 3$ $0 < x < 3^5$ و $x > 2^3$

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على \geq و \leq .

نشاط 2 المتباينات اللوغاريتمية

أوجد حلًا لـ $\log x \leq 2$.

أوجد حلًا تجريبيًا لـ

المتباينة الأصلية	$\log x \leq 2$
المتباينة اللوغاريتمية إلى أسية	$0 < x \leq 10^2$
حوّل لأبسط صورة.	$0 < x \leq 100$

مجموعة الحل هي $\{x \mid 0 < x \leq 100, x \in \mathbb{R}\}$ أو $(0, 100]$.

أثبت بيانيًا مَثَل بيانيًا نظام المتباينات $y > \log x$ و $y \leq 2$ (الشكل 2.4.1). باستخدام خاصيتي التعقب والتقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $(0, 100]$. ✓

لحل المتباينات التي تتضمن لوغاريتمات لها نفس الأساس على كل طرف، استخدم الخاصية التالية.

المفهوم الأساسي خصائص المتباينات في الدوال اللوغاريتمية

الشرح إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b y > \log_b x$ فقط في حالة $y > x$ ، و $\log_b x < \log_b y$ فقط في حالة $x < y$.

المثال إذا كان $\log_2 x > \log_2 9$ ، فإن $x > 9$.

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على \geq و \leq .

نشاط 3 المتباينات ذات اللوغاريتمات في كل طرف

أوجد حلًا لـ $\ln(x+6) < (3x-4)$.

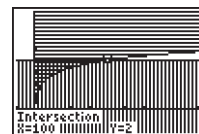
أوجد حلًا تجريبيًا لـ

المتباينة الأصلية	$(3x-4) < \ln(x+6)$
خاصية المتباينات في الدوال اللوغاريتمية	$3x-4 < x+6$
خاصية القسمة في المتباينات	$x < 5$

استبعد كل قيم x بحيث تكون $3x-4 \leq 0$ أو $x+6 \leq 0$. وبهذا تكون مجموعة الحل هي $x > \frac{1}{3}$.

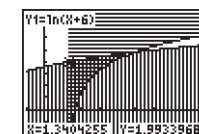
و $-6 < x < 5$. يتم تبسيط هذه المتباينة المركبة إلى $\{x \mid \frac{1}{3} < x < 5, x \in \mathbb{R}\}$ أو $(\frac{1}{3}, 5)$.

أثبت بيانيًا مَثَل بيانيًا نظام المتباينات $y < \ln(x+6)$ و $y > \ln(3x-4)$ (الشكل 2.4.2). باستخدام خاصيتي التعقب والتقاطع، يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $(\frac{1}{3}, 5)$. ✓



Intersection
 $x=100$ $y=2$

الشكل 2.4.1



Intersection
 $x=1.3404255$ $y=1.9933968$



Intersection
 $x=5$ $y=2.3878953$

الشكل 2.4.2

تمارين

أوجد حل كل من المتباينات التالية.

- $\ln(2x-1) < 0$ (0.5, 1)
- $\log(3x-8) > 2$ (36, ∞)
- $\log 2x < -1$ (0, 0.05)
- $\log(5x+2) \leq \log(x-4)$ لا يوجد حل
- $\ln(3x-5) > \ln(x+7)$ [6, ∞)
- $\log(x^2-6) \geq \log x$ [3, ∞)

117B

النمذجة باستخدام الانحدار اللاخطي

السابق: النمو الخطي
الحالي: النمو اللاخطي
لماذا؟

- لقد مثلت البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود. (الدرس 1-1)
- نمذجة البيانات باستخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوجستية.
- على الرغم من أن النمو الأسّي ليس نموذجًا مثاليًا للتعبير عن نمو السكان، إلا أن الهيئات الحكومية تستطيع استخدام التقديرات المستمدة من هذه النماذج لوضع خطط إستراتيجية تضمن أن يكونوا مستعدين لتلبية الاحتياجات المستقبلية لشعبهم.
- تقريب البيانات خطيًا وتحليلها.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-5 تمثيل البيانات باستخدام الدوال كثيرة الحدود.

الدرس 2-5 تمثيل البيانات باستخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوجستية. التقريب الخطي للبيانات وتحليلها.

بعد الدرس 2-5 استخدم دوال الانحدار لتمثيل وتحليل الأنواع المختلفة من البيانات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم لماذا؟ بهذا الدرس.

اسأل:

كيف يبدو التمثيل البياني للنموذج الممثل للنمو الأسّي؟ تمثيل بياني يتزايد باطراد

لم قد لا يكون النمو الأسّي نموذجًا مثاليًا لنمو تعداد السكان؟ لأنه

يفترض أن النمو مستمر بمعدل متزايد، وقد لا يكون ذلك ممكنًا على الدوام.

1 النمذجة الأسية واللوغاريتمية واللوجستية

على حاسبة تمثيلات بيانية بدلاً من الأساليب الجبرية لتمثيل بيانات توضح النمو أو التضاؤل الأسّي أو اللوغاريتمي.

مثال 1 الانحدار الأسّي

السكان تُعتبر مدينة ميسا في ولاية أريزونا من بين أسرع المدن نموًا في الولايات المتحدة. استخدم الانحدار الأسّي لتمثيل بيانات سكان ميسا. ثم استخدم نموذجك لتقدير سكان ميسا في عام 2020.

سكان مدينة ميسا في أريزونا (بالآلاف)											
عام	2000	1990	1980	1970	1960	1950	1940	1930	1920	1910	1900
تعداد السكان	396	288	152	63	33.8	16.8	7.2	3.7	3.0	1.6	0.7

الخطوة 1 أنشئ مخطط التشتت.

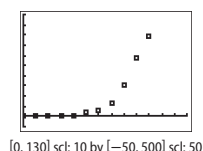
افترض أن $P(t)$ تمثل عدد سكان ميسا بالآلاف بعد t من السنوات من عام 1900. أدخل البيانات ومثلها بيانيًا إلى حاسبة تمثيلات بيانية لإنشاء مخطط التشتت (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) (الشكل 2.5.1). لاحظ أن المخطط يتشابه بشدة مع التمثيل البياني لدالة النمو الأسّي.

الخطوة 2 أوجد دالة أسية لتمثيل البيانات.

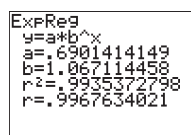
أثناء تشغيل خاصية التشخيص واستخدام ExpReg من قائمة نماذج الانحدار، نحصل على القيم الظاهرة في الشكل 2.5.2. يتم تمثيل عدد السكان في عام 1900 بـ a ويتم تمثيل معادل النمو الذي يبلغ 6.7% في السنة بـ b . لاحظ أن معامل الترابط $r \approx 0.9968$ قريب من 1، مما يشير إلى التقارب مع البيانات. من قائمة $Y=$ اختر معادلة الانحدار هذه عن طريق إدخال VARX Statistics (الإحصاءات). EQ. RegEQ.

الخطوة 3 مثل بيانيًا معادلة الانحدار وأنشئ مخطط التشتت على الشاشة نفسها.

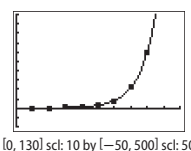
لاحظ أن التمثيل البياني للانحدار يتناسب مع البيانات بشكل جيد نوعًا ما. (الشكل 2.5.3).



الشكل 2.5.1



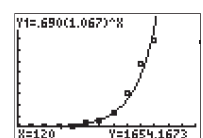
الشكل 2.5.2



الشكل 2.5.3

الخطوة 4 استخدم النموذج في التوقع.

لتوقع عدد سكان ميسا في عام 2020، أي بعد 120 سنة من عام 1900، استخدم ميزة CALC لتقييم دالة $P(120)$ كما هو موضح. بناءً على النموذج، سيبلغ عدد سكان ميسا 1,675 ألفًا تقريبًا أو 1.675 مليون نسمة في عام 2020.



التقويم التكويني
استخدم التمارين الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بكتيريا يوضح الجدول أدناه نمو مزرعة من البكتيريا. استخدم الانحدار الأسّي لتمثيل البيانات. ثم استخدم لتوقع العدد الذي ستبلغه البكتيريا بعد 24 ساعة.
 $B(t) = 400(1.19)^t$ ؛ حوالي 26,013 جرثومة

الساعات	عدد البكتيريا
0	400
1	475
2	565
3	670
4	800
5	950
6	1,130

2 الذاكرة تأملت مجموعة من الطلاب صورة فوتوغرافية لمدة 30 ثانية. وبداية من اليوم التالي لذلك، بدأ الطلاب يخضعون لاختبار كل يوم ما يتذكرونه في الصورة. يبين الجدول الدرجة المتوسطة الممنوحة في كل يوم. استخدم الانحدار اللوغاريتمي لتمثيل البيانات. ثم استخدم نموذجك لتوقع متوسط درجات الاختبار بعد أسبوعين.

الأيام	الدرجة (%)
1	72.3
2	69.8
3	64.2
4	62.9
5	61.3
6	60.5
7	58.3

$$S(t) = 73.1 - 7.31 \ln t; 53.8\%$$

تمرين موجه

1. الإنترنت شهدت شبكة الإنترنت نمواً سريعاً في تسعينيات القرن الماضي. ويوضح الجدول التالي عدد المستخدمين بالملايين خلال هذا العقد من الزمان. استخدم الانحدار الأسّي لتمثيل البيانات. ثم استخدم نموذجك لتوقع عدد المستخدمين في عام 2008. افترض أن x هو عدد السنوات بعد عام 1990.

السنة	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
مستخدمو الإنترنت	1	1.142	1.429	4.286	5.714	10	21.429	34.286	59.143	70.314

بينما تشير بيانات النمو أو التضاؤل السريع إلى نموذج أسّي. تميل البيانات التي تنمو أو تتضاءل بشكل سريع في البداية ثم تنبسطاً مع الوقت إلى نموذج لوغاريتمي يتم حسابه باستخدام انحدار لوغاريتمي طبيعي.

مثال 2 الانحدار اللوغاريتمي

المواليد استخدم الانحدار اللوغاريتمي لتمثيل البيانات في الجدول والخاصة بالمواليد التوائم في الولايات المتحدة. ثم استخدم نموذجك في توقع الوقت الذي سيصل فيه عدد المواليد التوائم في الولايات المتحدة إلى 150,000.

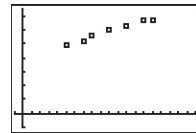
السنة	1995	1997	1998	2000	2002	2004	2005
المواليد	96,736	104,137	110,670	118,916	125,134	132,219	133,122

الخطوة 1 افترض أن $B(t)$ تمثل عدد المواليد التوائم بعد t من السنوات من عام 1990. ثم أنشئ مخطط التشتت (الشكل 2.5.5). يتشابه هذا المخطط مع التمثيل البياني لدالة النمو اللوغاريتمي.

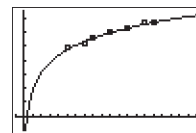
الخطوة 2 احسب معادلة الانحدار باستخدام LnReg. يشير معامل الارتباط $r \approx 0.9949$ إلى ملائمة قريبة للبيانات. عند تقريب كل قيمة إلى ثلاث خانات عشرية، تمثل إحدى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية التي تمثل البيانات في $B(t) = 38,428.963 + 35,000.168 \ln x$.

الخطوة 3 من القائمة $\boxed{Y=}$ اختر معادلة الانحدار هذه. يوضح الشكل 2.5.4 نتائج الانحدار $B(t)$. ويتم تمثيل عدد المواليد التوائم في عام 1990 من خلال a . ويتلاءم تمثيل $B(t)$ البياني بشكل جيد نوعاً ما مع البيانات (الشكل 2.5.6).

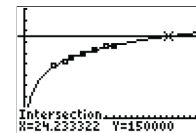
الخطوة 4 للتوصل إلى الوقت الذي سيصل فيه عدد المواليد التوائم إلى 150,000، مثل بيانياً الخط $y = 150,000$ ومعادلة التمثيل على الشاشة نفسها. عند حساب نقطة التقاطع (الشكل 2.5.7)، نجد أنه وفقاً لهذا النموذج، سيصل عدد المواليد التوائم إلى 150,000 عندما $t \approx 24$ ، ويكون ذلك في عام $1990 + 24$ أو 2014.



[-1, 20] scl: 1 by
-20,000; 150,000] scl: 20,000
الشكل 2.5.5



[-1, 20] scl: 1 by
-20,000; 150,000] scl: 20,000
الشكل 2.5.6



[-1, 30] scl: 2 by
-20,000; 200,000] scl: 20,000
الشكل 2.5.7

تمرين موجه

2. العمر المتوقع يوضح الجدول متوسط الأعمال المتوقعة في الولايات المتحدة وفقاً لعام الميلاد. استخدم الانحدار اللوغاريتمي لنموذج البيانات. ثم استخدم الدالة لتوقع العمر المتوقع لشخص مولود في عام 2020. افترض أن x هو عدد الأعوام بعد عام 1900.

عام الميلاد	2005	2000	1995	1990	1980	1970	1960	1950
العمر المتوقع	77.8	77.0	75.8	75.4	73.7	70.8	69.7	68.2

10 scl: 100, 0 scl: 1 مقدار

$$y = 0.44(1.696)^x$$

5.931 مليارات

```
LnReg
y=a+blnx
a=38428.96308
b=35000.1679
r=.99497472487
r=.9948604167
```

الشكل 2.5.4

نصيحة دراسية

التقريب تذكر أن معادلة الانحدار التي تم تقريبها لا تُستخدم في التوصل لتنبؤات. ويمكن التوصل إلى تنبؤ أدق باستخدام المعادلة بالكامل.

10 scl: 100, 0 scl: 1 مقدار

$$y = 15.09 + 13.38 \ln x$$

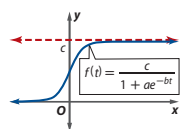
حوالي 79.2

1 تمثيل الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوغستية

تبين الأمثلة 1-3 طريقة تطبيق الانحدار الأسّي واللوغاريتمي واللوغستي على البيانات. ويبين المثال 4 طريقة استخدام دالة الانحدار على الحاسبة البيانية لتحديد النوع الأمثل لمعادلات الانحدار الذي يمثل هذه الحالة.

يكون النمو الأسّي واللوجاريتمي غير مقيد، حيث يزيد بمعدل دائم التزايد بدون حد أقصى. إلا أنه في الكثير من حالات النمو، يتحدد مقدار النمو بالعوامل التي تعمل على تعزيز السكان، مثل المساحة والطعام والماء. وتتسبب هذه العوامل في اتجاه النمو، الذي كان أسّيًا في البداية، إلى التباطؤ والثبات، ليقترب من خط مغايرة أفقي. تمثل **دالة النمو اللوجستي** هذا النمو الأسّي محدود الموارد.

المفهوم الأساسي دالة النمو اللوجستي



وتأخذ دالة النمو اللوجستي الصيغة

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

حيث t يمثل أي عدد حقيقي. في حين تمثل a و b و c أعداد ثابتة موجبة، و c هو حد النمو.

نصيحة دراسية

التضائل اللوجستي إذا كان $b < 0$. فإن $f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$ ستمثل التضائل اللوجستي. وما لم يُذكر خلاف ذلك، ستمثل كل النماذج اللوجستية في هذا النص النمو اللوجستي.

وترتبط دوال النمو اللوجستي بخطي تقارب أفقيين هما $y = c$ و $y = 0$. يُسمى حد النمو c أيضًا بسعة حمل الدالة.

مثال 3 من الحياة اليومية الانحدار اللوجستي

البيولوجيا استخدم الانحدار اللوجستي لتصل إلى دالة نمو لوجستي لتمثيل البيانات في الجدول الخاص بعدد بكتيريا الخميرة التي تنمو في مزرعة. ثم استخدم نموذجك في توقع حد نمو بكتيريا الخميرة في المزرعة.

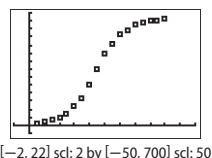
عدد بكتيريا الخميرة في مزرعة																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	19	31	45	68	120	172	255	353	445	512	561	597	629	641	653	654	658
الوقت (h)																	الخميرة

الخطوة 1 افترض أن $Y(t)$ تمثل عدد بكتيريا الخميرة في المزرعة بعد t من الساعات. ثم أنشئ مخطط التشتت (الشكل 2.5.8). يتشابه هذا المخطط مع التمثيل البياني لدالة النمو اللوجستي.

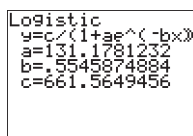
الخطوة 2 احسب معادلة الانحدار باستخدام دالة لوجستية (الشكل 2.5.9). عند تقريب كل قيمة إلى ثلاث منازل عشرية، فإن الدالة اللوجستية التي تمثل البيانات تكون

الخطوة 3 يلائم التمثيل البياني لـ $Y(t) = \frac{661.565}{1 + 131.178e^{-0.555t}}$ البيانات بشكل جيد جدًا (الشكل 2.5.10).

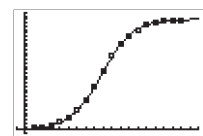
الخطوة 4 يمثل حد النمو في معادلة التمثيل البسيط في الكسر أو 661.565. لهذا، فوفقًا لهذا النموذج، سيقترن عدد بكتيريا الخميرة في المزرعة من 662 لكنه لن يصل إلى هذا الرقم أبدًا.



الشكل 2.5.8



الشكل 2.5.9



الشكل 2.5.10

تمرين موجه

3. **السكك** استخدم الانحدار اللوجستي لتمثيل البيانات التي في الجدول عن عدد السمك في بحيرة. ثم استخدم نموذجك في توقع حد نمو عدد السمك.

الوقت (بالأشهر)						
0	4	8	12	16	20	24
8450	8280	7540	5300	2200	580	125
السمك						

نصيحة دراسية

معاملات الارتباط ليس للانحدارات اللوجستية معامل ارتباط مغاير بسبب طبيعة النماذج.

[0, 40] scl: 5 by [0, 10,000] scl: 1000

$$F(t) = \frac{8498.858}{1 + 64.696e^{-0.390t}}$$

؛ حوالي 8500 سمكة

مثال إضافي

3 إعلان يؤثر عدد الإعلانات

التلفزيونية الخاصة بأحد المنتجات في النسبة المئوية لمشتري المنتج كما يوضح الجدول أدناه. استخدم الانحدار اللوجستي لإيجاد دالة نمو لوجستي لتمثيل البيانات. ثم استخدم نموذجك لتوقع حد النسبة المئوية للأشخاص الذين سيشترون المنتج.

الإعلانات	الأشخاص (%)
0	1.5
15	3.2
30	4.5
45	15.6
60	28
75	37.8
90	49

$$P(x) = \frac{55.86}{1 + 50.24e^{-0.064x}}$$

حوالي 56%

التركيز على محتوى الرياضيات

تمثيل النمو يمكن تمثيل النمو باستخدام أنواع عديدة من المعادلات. يواصل النمو الأسّي واللوجاريتمي التزايد بدون حد أعلى. أما النمو اللوجاريتمي فيأخذ في البداية الشكل الأسّي، ولكنه يستقرّ حينما يقترب من خط التقارب الأفقي. يمكن استخدام دالة الانحدار على الحاسبة البيانية لتحديد هذه النماذج.

مثال إضافي

4 الإنترنيت استخدم البيانات الموجودة في الجدول لتحديد معادلة انحدار تربط بين أرباح أحد المواقع الإلكترونية مع الزمن الذي مضى منذ بدء نشاطه التجاري. ثم حدد الزمن التقريبي الذي سيستغرقه الموقع الإلكتروني لتحقيق ربح مقداره AED 100,000 في عام واحد.

العالم	الربح (AED)
1	1,780.00
2	3,168.40
3	5,639.75
4	10,038.76
5	17,868.99
6	31,806.80

$$P(t) = 1,000(1.78)^t; 7.99 \text{ عامًا}$$

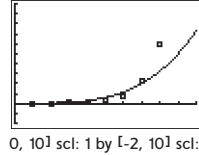
التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة اطلب من الطلبة تدوين أوجه التشابه والاختلاف بين النماذج الأسية واللوغاريتمية واللوجستية.

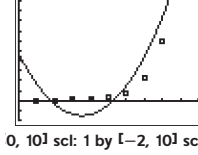
نصائح للمعلمين الجدد

مفاهيم خاطئة شائعة أثبت أنه في كثير من الحالات ثمة أكثر من نموذج صحيح يمكن أن يمثل البيانات بناءً على معامل الارتباط. وينبغي المقارنة بين معاملات الارتباط للعثور على النموذج الأفضل.

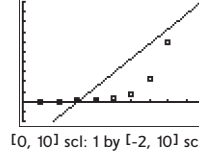
انحدار القوة
 $r = 0.94$



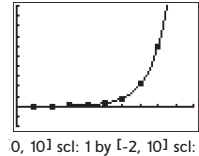
انحدار التربيعي
 $r = 0.94$



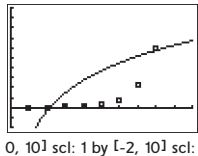
انحدار الخطي
 $r = 0.74$



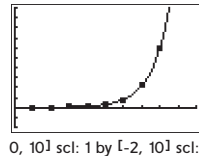
انحدار اللوجستي



انحدار اللوغاريتمي
 $r = 0.58$



انحدار الأسّي



على مستوى المجال المعروض، يبدو أن نموذجي الانحدار الأسّي واللوجستي هما الأكثر دقة في ملائمة البيانات، بينما يتمتع النموذج الأسّي بمعامل الارتباط الأقوى.

مثال 4 اختيار انحدار

الزلازل استخدم البيانات أدناه لتحديد معادلة انحدار تربط بالشكل الأمثل المسافة التي تستطيع موجة زلزالية قطعها من مركز زلزال بالوقت الذي مر على وقوع الزلزال. ثم حدد مسافة الإحساس بالموجة من مركز الزلزال بعد 8.5 دقائق من وقوع الزلزال.

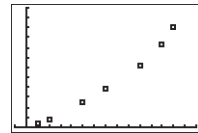
1	2	5	7	10	12	13	زمن الانتشار (min)
400	800	2,500	3,900	6,250	8,400	10,000	المسافة (km)

الخطوة 1 من شكل مخطط التشتت، يبدو أنه يمكن تمثيل هذه البيانات بالشكل الأفضل بواسطة أي نماذج انحدار مذكورة أعلاه باستثناء النموذج اللوغاريتمي. (الشكل 2.5.10)

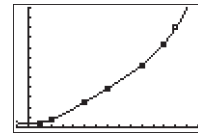
الخطوة 2 استخدم ميزات الانحدار PwrReg و ExpReg و LnReg و QuartReg و CubicReg و QuadReg و LinReg(ax+b) و Logistic لتتوصل إلى ميزات الانحدار التي تلائم البيانات. مع ملاحظة معاملات الارتباط المغالطة. وتعد معادلة الانحدار ذات معامل الارتباط الأقرب إلى 1 هي الانحدار التربيعي مع تقريب المعادلة إلى $y = 0.702x^4 - 16.961x^3 + 160.826x^2 - 21.045x + 293.022$. تذكر أن تستخدم لتحويل VARS المعادلة بالكامل إلى التمثيل البياني.

الخطوة 3 إن معادلة الانحدار من الدرجة الرابعة تلائم البيانات بشكل جيد جدًا بالفعل. (الشكل 2.5.11)

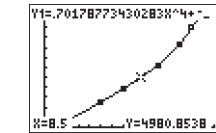
الخطوة 4 استخدم ميزة CALC لتقييم معادلة الانحدار هذه لـ $x = 8.5$. (الشكل 2.5.12) بما أن $y \approx 4,981$ عندما تكون $x = 8.5$. يمكنك أن تتوقع الإحساس بالموجة على بعد 4,981 كيلومترًا تقريبًا بعد 8.5 دقائق.



الشكل 2.5.10



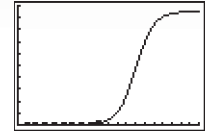
الشكل 2.5.11



الشكل 2.5.12

نصيحة دراسية

الانحدار اللوجستي لاحظ كيف يُمثل التمثيل البياني اللوجستي على اليسار عن الجزء الأول فقط من التمثيل البياني. ولهذا فمن الأصعب قليلاً تقييم دقة هذا الانحدار بدون توسيع المجال. يظهر التمثيل البياني الكامل للانحدار اللوجستي أدناه.



نصيحة دراسية

استخدام معادلة انحدار

تعتبر بعض النماذج أفضل من أخرى في توقع السلوك على المدى الطويل. بينما هناك نماذج أخرى أكثر ملائمة لبحث السلوك أو استنباط البيانات على المدى القصير.

2 التقريب الخطي للبيانات

يبين المثالان 5 و6 كيف يمكن تقريب مجموعة من البيانات خطيًا لإيجاد نموذج لتمثيل البيانات الأصلية.

نصائح للمعلمين الجدد

التقريب من أجل تقريب البيانات خطيًا في جدول، طبق التحويلات المبينة في مربع المفاهيم الأساسية أو النصائح الدراسية بناءً على نوع الدالة.

تمرين موجه

4. **الإنترنت** استخدم البيانات الموجودة في الجدول لتحديد معادلة انحدار تعرض بالشكل الأفضل العدد التراكمي لأسماء النطاقات التي يتم شراؤها من موفر إنترنت كل شهر. ثم تنبأ بعدد أسماء النطاقات التي سيتم شراؤها أثناء الشهر 18.

الوقت (بالأشهر)	1	2	3	4	5	6	7	8
أسماء النطاقات	211	346	422	468	491	506	522	531

الوقت (بالأشهر)	9	10	11	12	13	14	15	16
أسماء النطاقات	540	538	551	542	565	571	588	593

مكعب، $D(t) \approx 0.39x^3 - 12.069x^2 + 123.473x + 127.082$ ؛ حوالي 714 اسمًا للنطاقات

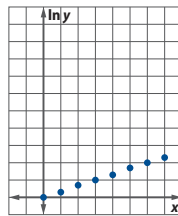
2 تقريب البيانات خطيًا

يُعتبر معامل الارتباط مقياسًا يتم حسابه من انحدار خطي. كيف إذا تقوم حاسبات التمثيلات البيانية بتوفير معاملات ارتباط للانحدار غير الخطي؟ الإجابة تكمن في أن الحاسبات تكون قد **قربت** **البيانات خطيًا** ثم تحويلها بحيث تبدو وكأنها تتجمع حول خط. وتسمى عملية تحويل البيانات غير الخطية بحيث تبدو خطية التقريب الخطي.

للتقريب الخطي للبيانات، يتم تطبيق دالة على أحد المتغيرين أو كليهما في البيانات المعنية كما يظهر في المثال أدناه.

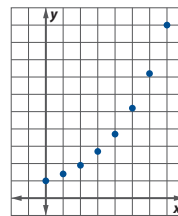
البيانات بعد التقريب الخطي

$\ln y$	x
0	0
0.3	1
0.6	2
1.0	3
1.3	4
1.6	5
2.0	6
2.3	7



البيانات الأصلية

y	x
1	0
1.4	1
1.9	2
2.7	3
3.7	4
5.2	5
7.2	6
10.0	7



عن طريق حساب معادلة الخط التلائم بالشكل الأمثل للبيانات بعد التقريب الخطي ثم تطبيق الدوال العكسية، تستطيع الحاسبة أن توفر لك معادلة تمثل البيانات الأصلية. إن معامل الارتباط لهذا الانحدار غير الخطي يمثل في الواقع قياسًا لمدى قدرة الحاسبة على ملاءمة البيانات بعد التقريب الخطي.

يتم تقريب البيانات التي تمثلها دالة تربيعية بيانيًا عن طريق تطبيق دالة جذر تربيعي على المتغير y . بينما البيانات التي تمثلها الدوال الأسية أو ذات الأس الثابت أو اللوغاريتمية يتم تقريبها خطيًا عن طريق تطبيق دالة لوغاريتمية على أحد المتغيرين أو كليهما.

المفهوم الأساسي للتحويلات للتقريب الخطي للبيانات

التقريب الخطي للبيانات الممثلة بواسطة:

- دالة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$. تمثيل بياني (x, \sqrt{y}) .
- دالة أسية $y = ab^x$. تمثيل بياني $(x, \ln y)$.
- دالة لوغاريتمية $y = a \ln x + b$. تمثيل بياني $(\ln x, y)$.
- دالة أس ثابت $y = ax^b$. تمثيل بياني $(\ln x, \ln y)$.

سوف تفسر اثنين من هذه التحويلات الخطية جبريًا في التمرينين 34 و35.

نصيحة دراسية

التقريب الخطي للبيانات التي تمثلها دوال أخرى كثيرة الحدود
للتقريب الخطي لدالة تكعيبية $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ التمثيل البياني $(x, \sqrt[3]{y})$ للتقريب الخطي لدالة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$ التمثيل البياني (x, \sqrt{y})

122 | الدرس 2-5 | النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي

OL خيارات الواجب المنزلي المتمايز

المتعلمون عن طريق التواصل استخدم التمرين الموجه للمثال رقم 4. اقسم الصف إلى ثنائي مجموعات. واطلب من كل مجموعة استخدام انحدار واحد من الانحدارات الثمانية لإيجاد معادلة الانحدار الخاص بالبيانات ومعامل ارتباطها. وبعد بضع دقائق، اسأل الصف أي مجموعة توصلت إلى معادلة انحدار تمثل البيانات بالصورة الأفضل مع التعليل. أدخل كل معادلة في الآلة الحاسبة، ومثل المعادلة بيانيًا واكتب معامل الترابط على السبورة. ناقش العلاقة بين صحة المعادلة ومعامل الترابط لكل نوع من أنواع الانحدار.

122 | الدرس 2-5 | التمثيل باستخدام الانحدار اللا خطي

مثال إضافي

5

ارسم مخطط تشتت للبيانات وخطها باستخدام نموذج قوة. مثل بيانات البيانات التي تم تقريبها خطياً، وأوجد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج لتمثيل البيانات الأصلية.

x	y
0.5	0.38
1	3
1.5	10.1
2	24
2.5	46.9
3	81
3.5	128.6
4	192

[0, 5] scl: 0.25 by [-10, 200] scl: 10

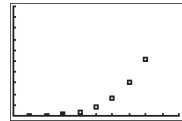
ln x	ln y
-0.7	-0.97
0	1.1
0.4	2.3
0.7	3.2
0.9	3.8
1.1	4.4
1.3	4.9
1.4	5.3

[0, 2] scl: 0.1 by [-2, 6] scl: 0.5

$$\hat{y} = 3\hat{x} + 1.1; y = 3x^3$$

مثال 5 تقريب البيانات خطياً

يظهر على اليمين بالأدنى تمثيل بياني للبيانات. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج أس ثابت. مثل البيانات التي تم تقريبها خطياً بشكل بياني، وأوجد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية.



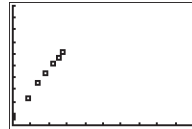
[0, 5] scl: 0.5 by [0, 1000] scl: 100

x	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
y	512	300.1	162	78.1	32	10.1	2	0.13

الخطوة 1 قَرِّب البيانات خطياً.

حتى تتمكن من التقريب الخطي للبيانات التي يمكن تمثيلها بدالة ثابتة الأس. خذ اللوغاريتم الطبيعي لكل من قيمتي x و y.

ln x	1.4	1.3	1.1	0.9	0.7	0.4	0	-0.7
ln y	6.2	5.7	5.1	4.4	3.5	2.3	0.7	-2



[0, 5] scl: 0.5 by [0, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثل بيانات البيانات التي تم تقريبها خطياً، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

يظهر التمثيل البياني للدالة $(\ln x, \ln y)$ وكأنه يتجمع حول مستقيم. افترض أن $\hat{y} = \ln y$ و $\hat{x} = \ln x$. باستخدام الانحدار الخطي، تكون المعادلة التقريبية التي تمثل البيانات بعد تقريبها خطياً هي $\hat{y} = 4\hat{x} + 0.7$.

الخطوة 3 استخدم نموذج البيانات بعد تقريبها خطياً لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

استبدل \hat{x} بـ $\ln x$ و \hat{y} بـ $\ln y$ وأوجد حلاً لـ y.

$$\hat{y} = 4\hat{x} + 0.7$$

معادلة للبيانات بعد تقريبها خطياً

$$\ln y = 4 \ln x + 0.7$$

$$\hat{x} = \ln x \text{ و } \hat{y} = \ln y$$

$$e^{\ln y} = e^{4 \ln x + 0.7}$$

$$y = e^{4 \ln x + 0.7}$$

خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

$$y = e^{4 \ln x + 0.7}$$

خاصية ناتج الضرب في الأسس

$$y = e^{\ln x^4} e^{0.7}$$

خاصية الأس الثابت للأسس

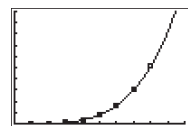
$$y = x^4 e^{0.7}$$

خاصية المعكوس في اللوغاريتمات

$$y = 2x^4$$

$$e^{0.7} \approx 2$$

ولهذا فإن دالة الأس الثابت التي تمثل هذه البيانات هي $y = 2x^4$. يوضح التمثيل البياني لهذه الدالة إلى جانب مخطط تشتت للبيانات الأصلية أن هذا النموذج يلائم البيانات جيداً.



[0, 5] scl: 1 by [0, 1000] scl: 100

تبرين موجه

أنشئ مخطط تشتت لكل مجموعة بيانات وقَرِّب البيانات خطياً وفقاً للنموذج المذكور. مثل بيانات البيانات التي تم تقريبها خطياً، وأوجد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم هذا النموذج الخطي للبيانات المتحول لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

5A. نموذج تربيعي انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	1	2	9	20	35	54	77

5B. نموذج لوغاريتمي انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	7.1	8.3	9.5	9.8	10.4	10.8	11.2

نصيحة دراسية

البيانات شبه اللوغاريتمية وبيانات لوغاريتم log

عند تطبيق دالة لوغاريتمية على قيم x أو y في مجموعة بيانات، يُشار إلى مجموعة البيانات الجديدة أحياناً باسم شبه لوغاريتم البيانات $(\ln x, y)$ أو $(x, \ln y)$. تشير بيانات لوغاريتم log إلى البيانات التي تم تحويلها عن طريق أخذ دالة لوغاريتمية لكل من قيمتي x و y ($\ln x, \ln y$).

نصيحة دراسية

المقارنة بين الأساليب استخدم ميزة الانحدار ثابت الأس في حاسبة لتصل إلى معادلة تمثل البيانات في المثال 5. كيف يمكن المقارنة بين الاثنين؟ كيف يمكن مقارنة معامل الارتباط في الانحدار الخطي في الخطوة 2 مع معامل الارتباط الوارد من الانحدار ثابت الأس؟

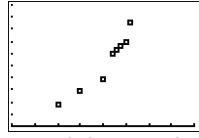
يمكنك تقريب البيانات خطيًا لتصل إلى نماذج لبيانات من الحياة اليومية بدون استخدام حاسبة.

مثال 6 من الحياة اليومية استخدم التقريب الخطي

الرياضة يوضح الجدول متوسط مرتبات لاعبي كرة القدم المحترفين لعدة سنوات. أوجد نموذجًا أسياً يربط هذه البيانات عبر التقريب الخطي للبيانات وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم نموذجك لتوقع متوسط المرتبات في عام 2012.

العام	1990	1995	2000	2002	2003	2004	2005	2006
متوسط المرتبات (1,000 AED)	354	584	787	1,180	1,259	1,331	1,400	1,700

المصدر: اتحاد كرة القدم



[80, 120] scl: 5 by [0, 2000] scl: 200

الخطوة 1 ضع مخطط تشتت (تمثيل بياني بالنقاط المبعثرة) وقرب البيانات خطيًا.

افتراض أن x تمثل عدد السنوات بعد عام 1900 ولا متوسط المرتبات بالآلاف.

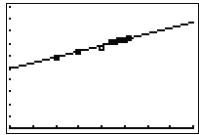
x	90	95	100	102	103	104	105	106
y	354	584	787	1,180	1,259	1,331	1,400	1,700

المخطط غير خطي ويظهر شكله إلى أنه يمكن تمثيل البيانات بدالة أسية. احسب تقريب البيانات خطيًا عن طريق إيجاد $(x, \ln y)$.

x	90	95	100	102	103	104	105	106
$\ln y$	5.9	6.4	6.7	7.1	7.1	7.2	7.2	7.4

الخطوة 2 مثل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا. وأوجد معادلة انحدار خطي.

يبدو التمثيل البياني للبيانات بعد تقريبها خطيًا وكأنه يشكل خطًا مستقيمًا. بافتراض أن $y = \ln y$. فإن معادلة الانحدار بعد تقريبها تبلغ حوالي $y = 0.096x - 2.754$.



[80, 120] scl: 5 by [0, 10] scl: 1

الخطوة 3 استخدم نموذج البيانات بعد تقريبها خطيًا لتصل إلى نموذج للبيانات الأصلية.

استبدل y بـ $\ln y$ وأوجد حلًا لـ y .

$$y = 0.096x - 2.754 \quad \text{معادلة للبيانات بعد تقريبها خطيًا}$$

$$\ln y = 0.096x - 2.754 \quad y = \ln y$$

$$e^{\ln y} = e^{0.096x - 2.754} \quad \text{احسب التحويل الأسّي لكل جانب.}$$

$$y = e^{0.096x - 2.754} \quad \text{خاصية المعكوس في اللوغاريتمات}$$

$$y = e^{0.096x} e^{-2.754} \quad \text{خاصية ناتج الضرب في الأسس}$$

$$y = 0.06e^{0.096x} \quad e^{-2.754} \approx 0.06$$

$$y = 0.06e^{0.096x} \quad \text{لهذا، فإن المعادلة الأسية التي تمثل هذه البيانات هي}$$

الخطوة 4 استخدم المعادلة التي تمثل البيانات الأصلية لحل المسألة.

للتوصل إلى متوسط المرتبات في عام 2012، أوجد قيمة y عندما تكون $x = 2012 - 1900$ أو 112. وفقًا لهذا النموذج، سيكون متوسط مرتب لاعب كرة القدم المحترف في عام 2012 ألف 2,803 AED $\approx 2,803$ (112) $0.096 \approx 0.06$ أو حوالي مليون 2.8 AED.

تمرين موجه

6. إسقاط أحد الأشياء ألقى أحمد بأحد أذنيه من طائرة مروحية ملحقة. تظهر المسافة d التي قطعها الحذاء بالأقدام بعد t ثانية من إلقائه في الجدول.

t	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
d	0	15.7	35.4	63.8	101.4	144.5	258.1	404.8

أوجد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات عبر تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم نموذجك لتوقع المسافة التي قطعها الحذاء بعد 7 ثوانٍ. **انظر الحاشية.**

124 | الدرس 2-5 | النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي

إجابات إضافية (تمرين موجه)

t	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
\sqrt{d}	0	3.96	5.95	7.99	10.07	12.02	16.07	20.12

الخط الأفضل تمثيلًا: $\hat{d} = 4t$. النموذج التربيعي للبيانات: $d = 16t^2$; بعد 7 ثوانٍ، سيكون الحذاء قد قطع مسافة 784 ft تقريبًا.

مثال إضافي

6 البكتيريا يبين الجدول عدد البكتيريا الموجودة في مزرعة بكتيرية. أوجد نموذجًا أسياً يربط هذه البيانات عن طريق تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. ثم استخدم نموذجك لتوقع عدد البكتيريا بعد 10 ساعات.

الزمن (بالساعة)	عدد البكتيريا (بالآلاف)
0	5.68
1	15.44
2	41.97
3	114.09
4	310.12

x	$\ln y$
0	1.74
1	2.74
2	3.74
3	4.74
4	5.74

$$y = 5.7e^x; 125,551 \text{ جرثومة}$$

المتابعة

لقد استكشف الطلاب تمثيل البيانات باستخدام الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوغستية.

اسأل:

- كيف يمكن استخدام نماذج الرياضيات للمساعدة في اتخاذ قرارات جيدة؟ الإجابة النموذجية: يمكن استخدام نماذج الرياضيات للمقارنة بين الخيارات المختلفة المتاحة، إضافةً إلى توقع تأثير أحد الخيارات في حال اختياره.

- ما العوامل التي يجب أخذها في الحسبان عند استخدام النماذج الأسية واللوغاريتمية في اتخاذ القرارات؟ الإجابة النموذجية: يمكن أن تنمو النماذج الأسية واللوغاريتمية بدون حد، ولا ينطبق ذلك على الحالة التي يمثلها النموذج. على سبيل المثال، لا يمكن أن ينمو التعداد السكاني بدون حدٍّ بسبب محدودية المكان والغذاء. ولذلك، عند استخدام أحد النماذج، ينبغي النظر بعناية إلى الحالة التي يُجرى تمثيلها عند اتخاذ القرارات.

124 | الدرس 2-5 | التمثيل باستخدام الانحدار اللا خطي

تمارين

- بالنسبة إلى التمارين 1-3، أكمل كل خطوة. 1-3. **انظر الحاشية.**
 a. أوجد دالة أسية لتمثيل البيانات.
 b. أوجد قيمة كل نموذج عند $x = 20$ (مثال 1)

1.	x	y
1	7	
2	11	
3	25	
4	47	
5	96	
6	193	
7	380	

2.	x	y
0	1	
1	6	
2	23	
3	124	
4	620	
5	3130	
6	15,600	

3.	x	y
0	25	
1	6	
2	1.6	
3	0.4	
4	0.09	
5	0.023	
6	0.006	

4. **علم الوراثة** دروسوفيل ميلانوجاستر نوع من ذبابة الفاكهة يشيع استخدامه في معامل علم الوراثة لأنها تتكاثر كل 8.5 أيام تقريبًا مما يسمح للباحثين بأن يدرسوا أجيالًا عديدة. يوضح هذا الجدول عدد الدروسوفيل على مدار عدة أيام. (مثال 1)

الجيل	دروسوفيل	الجيل	دروسوفيل
1	80	5	1,180
2	156	6	2,314
3	307	7	4,512
4	593	8	8,843

- a. أوجد دالة أسية لتمثيل البيانات.
 $y = 40.69 \times 1.96^x$
 b. استخدم الدالة في توقع عدد الدروسوفيل بعد 93.5 يومًا. 66.563

5. **أسماك القرش** توجد لدى أسماك القرش الكثير من صفوف الأسنان المضمنة في لثتها مباشرة وليست متصلة بفكها. وعندما يفقد القرش أسنانه، تتحرك أسنان الصف التالي للأمام. ويزيد معدل استبدال صف الأسنان بالأيام لكل صف مع درجة حرارة الماء. (مثال 1)

درجة الحرارة (°C)	20	21	22	23	24	25	26	27
الأيام لكل صف	66	54	44	35	28	22	18	16

- a. أوجد دالة أسية لتمثيل البيانات.
 $y = 4,476 \times 0.810^x$
 b. استخدم الدالة لتوقع درجة الحرارة التي تفقد عندها أسماك القرش صفًا من الأسنان خلال 12 يومًا. 28.1°C

6. **الكلمات** تتألف عائلة الكلمة من كلمة أساسية وكل مشتقاتها. يوضح الجدول النسبة المئوية للكلمات في نص إنجليزي عادي يتألف من عائلات الكلمات الأكثر شيوعًا. (مثال 2)

عائلات الكلمات	5,000	4,000	3,000	2,000	1,000
النسبة المئوية للكلمات	88.6	86.7	84.0	79.7	73.1

- a. أوجد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات.
 $y = 5.84 + 9.74 \ln x$
 b. توقع عدد عائلات الكلمات التي تشكل نسبة تصل إلى 95% من الكلمات في نص إنجليزي عادي. 9,483 عائلة للكلمات

- بالنسبة إلى التمارين 7-9، أكمل كل خطوة. 7-9. **انظر الحاشية.**
 a. أوجد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات.
 b. أوجد قيمة كل نموذج عند $x = 15$ (مثال 2)

7.	x	y
1	50	
2	42	
3	37	
4	33	
5	31	
6	28	
7	27	

8.	x	y
2	8.6	
4	7.2	
6	6.4	
8	5.8	
10	5.4	
12	5.0	
14	4.7	

9.	x	y
1	40	
2	49.9	
3	55.8	
4	59.9	
5	63.2	
6	65.8	
7	68.1	

10. **الكيمياء** ألقت أحد المعامل عينة من نظائر الكوبالت عام 1999. ويظهر المقدار المتبقي من الكوبالت بالجرام في العام في الجدول أدناه. (مثال 2)

العام	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
الكوبالت (بالجرام)	877	769	674	591	518	454	398	349

- $y = 922.18 - 259.08 \ln x$
 a. أوجد دالة لوغاريتمية لتمثيل البيانات. افترض أن $x = 1$ تمثل 2,000.
 b. تنبأ بمقدار الكوبالت المتبقي في عام 2020. 133 g

- بالنسبة إلى التمارين 11-13، أكمل كل خطوة.
 a. أوجد دالة لوجستية لتمثيل البيانات.
 b. أوجد قيمة كل نموذج عند $x = 25$ (مثال 3) 11-13. **انظر الحاشية.**

11.	x	y
0	50	
2	67	
4	80	
6	89	
8	94	
10	97	
12	98	
14	99	

12.	x	y
1	3	
2	5	
3	7	
4	8	
5	13	
6	16	
7	19	
8	20	

13.	x	y
3	21	
6	25	
9	28	
12	31	
15	33	
18	34	
21	35	
24	35	

14. **الكيمياء** تقوم إحدى الطالبات بمعايرة بالتحليل الحجمي في المعمل. ولإجراء المعايرة، فإنها تستخدم قطارة لإضافة محلول أساسي لهيدروكسيد الصوديوم إلى محلول محايد. يوضح الجدول درجة حموضة المحلول مع إضافة هيدروكسيد الصوديوم. (المثال 3)

هيدروكسيد الصوديوم (mL)	0	1	2	3	5	7.5	10
درجة الحموضة	10	10.4	10.6	11.0	11.3	11.5	11.5

- a. أوجد دالة لوجستية لتمثيل البيانات. **انظر الحاشية.**
 b. استخدم النموذج لتوقع حموضة المحلول بعد إضافة 12 مليلترًا من هيدروكسيد الصوديوم. 11.36

125

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-23 للتحقق من فهم الطلاب. ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع بالنسبة للتمرين 10. ذكر الطلاب بأن السنوات يجب أن تكون بالصيغة 1, 2, 3,... وليس 2000, 2001, 2002,...

إجابات إضافية

- 1a. $y = 3.19(1.98)^x$
 1b. 2,605,304.4
 2a. $y = 1.04(4.95)^x$
 2b. 8.09×10^{13}
 3a. $y = 24.98(0.25)^x$
 3b. 1.98×10^{-11}
 7a. $y = 50.11 - 12.06 \ln x$
 7b. 17.46
 8a. $y = 9.98 - 2 \ln x$
 8b. 4.56
 9a. $y = 39.95 + 14.44 \ln x$
 9b. 79.04
 11a. $y = \frac{99.65}{1 + 0.99e^{-0.35x}}$
 11b. 99.63
 12a. $y = \frac{24.63}{1 + 12.74e^{-0.52x}}$
 12b. 24.63
 13a. $y = \frac{36.16}{1 + 1.19e^{-0.16x}}$
 13b. 35.43
 14a. $y = \frac{11.62}{1 + 0.17e^{-0.33x}}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين
AL قريب من المستوى	1-23, 31, 33-54	2-22, زوجية 31, 33-53
OL ضمن المستوى	1-23, 24, 25-29, زوجية 30, 31, 33-54	24-31, 33-53
BL أعلى من المستوى	24-54	

23. الإسكان يوضح الجدول تقديرات قيمة منزل كل 3 سنوات منذ شرائه. (امثال 6)

الأعوام	0	3	6	9	12	15
القيمة (AED)	78,000	81,576	85,992	90,791	95,859	101,135

a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج أسي.
b. مثل بيانات البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي للتوصل إلى نموذج للبيانات الأصلية وحدد القيمة التقريبية للمنزل بعد 24 سنة من شرائه.

$$y = 77,653e^{0.0175x} \quad \text{حوالي } 118,185 \text{ AED}$$

24. الطهو أوقات الطهو ودرجات الحرارة والوصفات غالبًا ما تختلف على الارتفاعات الكبيرة عن مستوى البحر. وهذا يعود إلى الاختلاف في الضغط الجوي، مما يؤدي إلى انخفاض درجات غليان مواد مختلفة مثل الماء عند الارتفاعات الكبيرة. يوضح الجدول نقطة غليان الماء عند الارتفاعات المختلفة فوق مستوى سطح البحر.

الارتفاع (m)	نقطة الغليان (°C)
0	100
1,000	99.29
2,000	98.81
3,000	98.43
4,000	98.10
5,000	97.80
6,000	97.53
7,000	97.28
8,000	97.05
9,000	96.83
10,000	96.62

a-b. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات في النماذج الأسية وثابتة الأس واللوغاريتمية.

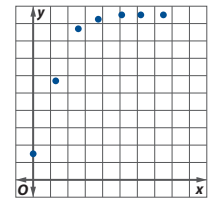
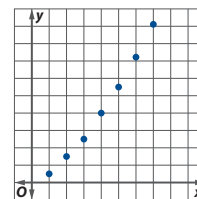
b. مثل البيانات بيانيًا بعد تقريبها خطيًا وحدد النموذج الأفضل في تمثيل البيانات.

c. اكتب معادلة تمثيل البيانات بناءً على تحليلك لحسابات التقريب الخطي.

$$y = 99.48e^{-0.0000032x} \quad \text{الدالة الأسية:}$$

حدد النموذج الأكثر ملاءمة لكل مخطط تشتت. اشرح استنتاجك.

25. 25-26. انظر الحاشية.



احسب التقريب الخطي للبيانات في كل جدول. ثم حدد النموذج الأكثر ملاءمة. 27-29. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

27.

x	y
2	2.5
4	7.3
6	13.7
8	21.3
10	30.2
12	40.0
14	50.8
16	62.5

28.

x	y
1	6
2	29
3	42
4	52
5	59
6	65
7	70
8	75

29.

x	y
1	37.8
2	17.0
3	7.7
4	3.4
5	1.6
6	0.7
7	0.3
8	0.1

30. السهك يدرس العديد من علماء البحار أعداد القاروس صغير القم في بحيرة. ويوضح الجدول أعداد القاروس صغير القم في البحيرة مع الوقت.

العام	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
القاروس	673	891	1,453	1,889	2,542	2,967	3,018	3,011

a, c, d. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

a. حدد النموذج الأكثر ملاءمة للبيانات. اشرح استنتاجك.

b. أوجد دالة لتمثيل البيانات.

c. استخدم الدالة في توقع أعداد القاروس صغير القم في عام 2012 حوالي 3,231.

d. ناقش فاعلية نموذج التنبؤ بأعداد القاروس مع زيادة الوقت بدرجة كبيرة خارج مجال البيانات.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. الاستنتاج لماذا تُعتبر الانحدارات اللوغاريتمية غير صالحة عندما يساوي المجال 0؟ انظر الحاشية.

32. التحدي أوضح أن $y = ab^x$ يمكن تحويلها إلى $y = ae^{kx}$.

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

33. الاستنتاج هل يمكن أن يكون التمثيل البياني لدالة لوجستية له أي تقاطعات؟ اشرح استنتاجك.

انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

الإثبات استخدم الجبر للتحقق من أن البيانات التي تم تمثيلها بكل نوع من الدوال يمكن تقريبها خطيًا أو التعبير عنها كدالة $y = mx + b$ بالنسبة لبعض القيم m و b ، عن طريق استبدال (x, y) بالإحداثيات المشار إليها. 34-35. انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

34. الدالة الأسية، $(\ln y)$

35. الدالة ثابتة الأس، $(\ln x, \ln y)$ انظر ملحق إجابات الوحدة 2.

36. الاستنتاج كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{5}{1+e^{-x}} + a$ بالتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{5}{1+e^{-x}}$ ؟ اشرح.

37. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية ارتباط معاملات نموذج أسي أو لوغاريتمي بمجموعة البيانات أو الحالة التي يجري تمثيلها.

إجابات إضافية

25. دالة قوة؛ يتزايد التمثيل البياني

بنسبة تغير ثابتة.

26. دالة لوجستية؛ يتزايد التمثيل البياني

بمعدل متناقص ثم يستقر.

31. يكون الانحدار اللوغاريتمي غير

صالح عندما يكون المجال صفراً،

لأن الدالة اللوغاريتمية تكون غير

محددة عند تلك القيمة، ولا يعمل

الانحدار مع القيم غير المحددة.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

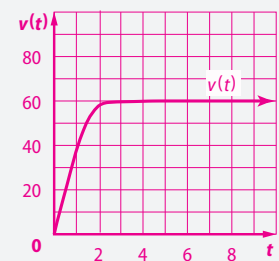
اطلب من الطلاب كتابة شرح قصير عن جوانب الاختلاف بين الدوال الأسية واللوغاريتمية واللوجستية. ويجب أن تتضمن إجاباتهم تمثيلات بيانية تقريبية لكل نوع.

إجابات إضافية

45b. AED 2,578,760.27؛ الإجابة

النموذجية: نعم، يستمر المال في النمو بمعدل أسرع كل عام. ففي السنوات العشر الأولى، زاد المال AED 678,000؛ وفي السنوات العشر القادمة، سيزيد حوالي AED 900,000.

54a.



54b. $D = \{t \mid t \geq 0\}$, $R = \{v \mid v > 0\}$

الإجابة النموذجية: لا يمكن أن تكون قيمتا الزمن والسرعة سالبة.

54c. دالة لوجيستية

54d. $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 60$ ؛ الإجابة النموذجية:

تبلغ السيارة سرعة 60 ميلاً في الساعة، ثم تظل سرعتها ثابتة.

54e. الإجابة النموذجية: دالة خطية؛ حين تقترب t إلى اللانهاية، تُمثل المسافة الإجمالية المقطوعة بالدالة $d(t) = 60t$. ويعزى ذلك إلى أن السيارة كانت تسير بتلك السرعة منذ اللحظة $t = 2$ ومع تزايد الزمن، يقل تأثير متوسط السرعة للسيارة بزمّن التسارع بداية من $0 \leq t \leq 2$.

54f. الإجابة النموذجية: $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ ؛ حالما تبلغ السيارة سرعة 60 ميلاً في الساعة، فإنها تتوقف عن التسارع.

مراجعة شاملة

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (الدرس 2-4)

38. $3^{4x} = 3^{3-x} \cdot \frac{3}{5}$ 39. $3^{5x} \times 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 10 40. $49^x = 7^{x^2-15}$ -3, 5
41. $\log_5(4x-1) = \log_5(3x+2)$ 3 42. $\log_{10} z + \log_{10}(z+3) = 1$ 2 43. $\log_6(a^2+2) + \log_6 2 = 2$ ± 4

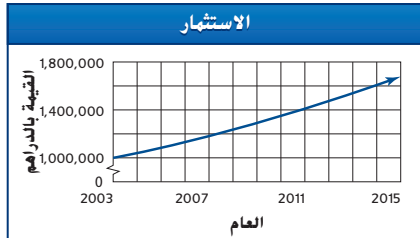
44. الطاقة E، بالكيلو كالوري لكل جرام من الجزيء، المطلوبة لنقل مادة من خارج خلية حية إلى داخلها تتحدد على أساس $E = 1.4(\log_{10} C_2 - \log_{10} C_1)$ ، حيث C_1 و C_2 هما تركيزا المادة داخل الخلية وخارجها على التوالي. (الدرس 2-3)
a. عبّر عن قيمة E بصيغة لوغاريتم واحد.
b. افترض أن تركيز المادة داخل الخلية يبلغ ضعف التركيز خارجها. ما مقدار الطاقة المطلوبة لنقل المادة الموجودة خارج الخلية إلى داخلها؟ (استخدم $\log_{10} 2 \approx 0.3010$)

حوالي 0.4214 كيلو كالوري في الجرام

c. افترض أن تركيز المادة داخل الخلية يبلغ أربعة أضعاف التركيز خارجها. ما مقدار الطاقة المطلوبة لنقل المادة من خارج الخلية إلى داخلها؟

حوالي 0.8429 كيلو كالوري في الجرام

45. المعرفة المالية في عام 2003، ورثت أميرة 1,000,000 AED من جدتها. وقد استثمرت كل المبلغ. وكان من المتوقع أن ينمو المبلغ بحلول عام 2015 إلى 1,678,000 AED. (الدرس 2-1)



a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل المبلغ المالي y. اكتب الدالة باستخدام x، والذي يشير إلى عدد السنوات منذ عام 2003. $y = 1,000,000(1.044)^x$
b. افترض أن المبلغ المالي ظل ينمو بنفس المعدل. أوجد قيمة المبلغ المالي في عام 2025. هل هذا التقدير صحيح؟ اشرح استنتاجك. انظر الحاشية.

حوّل لأبسط صورة. (الدرس 0-2)

46. $(-2i)(-6i)(4i)$ -48i 47. $3i(-5i)^2$ -75i 48. i^{13} i
49. $(1-4i)(2+i)$ 7i - 6 50. $\frac{4i}{3+i}$ $\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$ 51. $\frac{4}{5+3i}$ $\frac{6}{17} - \frac{10}{17}i$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

54. الاستجابة الحرة تمثل السرعة التي تتحرك بها سيارة بالميل في الساعة في الدالة $v(t) = 60(1 - e^{-t^2})$ حيث t هو الوقت بالثواني. افترض أن السيارة لن تحتاج إلى التوقف أبداً. a-f. انظر الحاشية.

a. مَثَل بياناً $v(t)$ لـ $0 \leq t \leq 10$.

b. وضح مجال ومدى $v(t)$. اشرح استنتاجك.

c. ما نوع الدالة $v(t)$ ؟

d. ما السلوك الطرفي لـ $v(t)$ ؟ ما معنى هذا في سياق الحالة؟

e. افترض أن $d(t)$ تمثل إجمالي المسافة التي قطعها السيارة. ما نوع الدالة التي تمثلها $d(t)$ مع اقتراب t من اللانهاية؟ اشرح.

f. افترض أن $a(t)$ تمثل تسارع السيارة. فما السلوك الطرفي لـ $a(t)$ ؟ اشرح.

52. SAT/ACT أظهرت دراسة حديثة أن عدد المنازل الأسترالية التي بها حاسوب يتضاعف كل 8 أشهر. بافتراض أن العدد يتزايد باستمرار، فما هو المعدل الشهري التقريبي الذي يجب أن يزيد به مالكو أجهزة الحاسب الآلي الأستراليون لكي يتحقق هذا؟ B

- A 6.8% C 12.5% E 2%
B 8.66% D 8.0%

53. تبين البيانات أدناه عدد البكتيريا الموجودة في مزرعة معينة. تنمو البكتيريا أسياً. F

الساعات	1	2	3	4
عدد البكتيريا	48	26	15	8

ما الوقت المطلوب تقريباً لكي يتضاعف حجم مزرعة البكتيريا بعد الساعة 4؟

- H 1.68 ساعة F 1.26 ساعة
J 1.76 ساعة G 1.35 ساعة

128 | الدرس 2-5 | النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي

خيارات الواجب المنزلي المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب تنظيم خطوات استخدام الانحدار الأسّي واللوغاريتمي واللوجستي في خريطة المفاهيم الانسيابية. ويجب عليهم وصف خطوات تحديد نوع الانحدار الذي ينبغي استخدامه وكيفية تحديد معادلة الانحدار. وبعد ذلك، عليهم إجراء التنبؤات بناءً على النموذج.

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرس 2-1)

- الدوال الأسية تتخذ الشكل $f(x) = ab^x$ ، حيث $a \neq 0$ ، $b \neq 1$ ، b بالنسبة إلى الدوال الأسية طبيعية الأساس. يكون الأساس هو الثابت e .
- إذا تم استثمار رأس مال P بمعدل فائدة سنوية r (بصيغة عشرية)، يتم احتساب الرصيد A في الحساب بعد t من السنوات من خلال $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ إذا تم تركيبه بصفة مستمرة.
- إذا علمت أن المبلغ الأولي N_0 ينمو أو يتضاءل بمعدل أسّي k أو k_1 (في صورة k عشرية)، فإن المبلغ النهائي N بعد الفترة t يتم تمثيله بواسطة $N = N_0(1 + r)^t$ أو $N = N_0 e^{kt}$ ؛ N : مبلغ t ينمو معدل النمو لكل فترة t ويمثل k معدل النمو المستمر في t وقت t .

الدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-2)

- معكوس $f(x) = b^x$: حيث $b > 0$ و $b \neq 1$. هي الدالة اللوغاريتمية بالأساس b : ونرمز لها $f^{-1}(x) = \log_b x$.
- إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$. فإن الصيغة الأسية لـ $y = \log_b x$ هي $b^y = x$ والصيغة اللوغاريتمية لـ $y = \log_b x$ هي $\log_b x = y$. اللوغاريتم هو أس.
- لوغاريتمات عادية: $\log_{10} x$ أو $\log x$
- لوغاريتمات طبيعية: $\log_e x$ أو $\ln x$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-3)

- خاصية ناتج الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- خاصية خارج القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- خاصية الأس الناتج: $\log_b x^p = p \times \log_b x$
- تغيير قاعدة الأساس: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية (الدرس 2-4)

- خاصية واحد لواحد للأسس: بالنسبة إلى $b > 0$ و $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ فقط إذا كانت $x = y$.
- خاصية واحد لواحد للغايرتيمات: بالنسبة إلى $b > 0$ و $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ فقط إذا كانت $x = y$.

النهجة باستخدام الانحدار غير الخطي (الدرس 5-2)

- التقريب الخطي للبيانات الممثلة بواسطة:
- دالة تربيعية $y = ax^2 + bx + c$: تمثيل بياني (x, \sqrt{y}) .
- دالة أسية $y = ab^x$: تمثيل بياني $(x, \ln y)$.
- دالة لوغاريتمية $y = a \ln x + b$: تمثيل بياني $(\ln x, y)$.
- دالة ثابتة الأس $y = ax^b$: تمثيل بياني $(\ln x, \ln y)$.

المفردات الأساسية

- | | |
|--|--|
| الدالة الجبرية
(algebraic function) (ص 158) | الدالة اللوغاريتمية التي تحتوي على الأساس
b (logarithmic function with base b)
(ص 172) |
| لوغاريتم عادي
(common logarithm) (ص 173) | دالة النمو اللوجستي
(logistic growth function)
(ص 202) |
| المركبة المتصلة
(continuous compound) (ص 163) | الأساس الطبيعي
(natural base) (ص 160) |
| الدالة الأسية
(interest) (ص 158) | لوغاريتم طبيعي
(natural logarithm)
(ص 174) |
| التقريب الخطي
(linearize exponential function)
(ص 204) | الدالة المتسامية
(transcendental function)
(ص 158) |
| لوغاريتم (logarithm) (ص 172) | |

مراجعة المفردات

أكمل كل عبارة باستخدام المصطلح المناسب من القائمة أعلاه.

1. التعبير اللوغاريتمي الذي لا يُشار فيه إلى أساس يستخدم _____
اللوغاريتم العادي
2. _____ هي دوال يكون المتغير فيها هو الأساس. **الدوال الأسية**
3. الدوال الأسية واللوغاريتمية مثالان على _____. **الدوال المتماثلة**
4. معكوس $f(x) = b^x$ يُسمى $a(n)$ _____. **اللوغاريتم**
5. يحتوي التمثيل البياني لـ $a(n)$ _____ على خطين مقاربين رأسيين. نستخدم مثل هذه الدالة للنمو بعامل محدد. **دالة النمو اللوجستي**
6. يتم في العديد من التطبيقات من الحياة اليومية استخدام e ، وهو، مثل $\sqrt{5}$ ، أو باي (π) عدد غير نسبي يتطلب التقريب العشري. **الأساس الطبيعي**
7. من أجل بيانات _____، يتم تطبيق الدالة على أحد المتغيرين أو كلاهما في مجموعة البيانات، لتحويل البيانات بحيث تظهر منجمعة حول مستقيم. **التقريب الخطي**
8. الدوال ثابتة الأساس والجزرية وكثيرة الحدود والنسبية هي أمثلة على **الدوال الجبرية**
9. تحدث عندما لا يكون هناك أي فترة انتظار بين دفعات الفائدة. **الفائدة المركبة المتصلة**
10. يُرمز له بـ \ln .

اللوغاريتم الطبيعي

إجابات إضافية

45a.

x	0	1	2	3	4	5	6
ln y	0.69	1.61	2.83	3.97	5.11	6.25	7.39

45b. $\hat{y} = 1.13x + 0.59$

[0, 7] scl: 1 by [0, 8] scl: 1

45c. $y = 1.80e^{1.13x}$

[0, 7] scl: 1 by [0, 1700] scl: 200

46a.

ln x	0	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95
y	-3	4	8	10	12	14	15

46b. $y = 9.2 \hat{x} - 2.66$

[0, 2] scl: 0.25 by [-4, 16] scl: 2

46c. $y = 9.2 \ln x - 2.66$

[0, 8] scl: 1 by [-4, 16] scl: 2

3-2 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 181-188)

قم بتوسيع كل تعبير.

32. $\log_3 9x^3y^3z^6 = 2 + 3 \log_3 x + 3 \log_3 y + 6 \log_3 z$

33. $\log_5 x^2a^7\sqrt{b} = 2 \log_5 x + 7 \log_5 a + \frac{1}{2} \log_5 b$

34. $\ln \frac{e}{x^2y^3z} = 1 - 2 \ln x - 3 \ln y - \ln z$

35. $\log \frac{\sqrt{gk}}{100} = \frac{1}{2} (\log g + 5 \log k) - 2$

قم بتبسيط كل تعبير.

36. $3 \log_3 x - 2 \log_3 y = \log_3 \frac{x^3}{y^2}$

37. $\frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 (b + 1) = \log_2 [\sqrt[3]{a}(b + 1)]$

38. $5 \ln (x + 3) + 3 \ln 2x - 4 \ln (x - 1) = \ln \frac{8x^3(x + 3)^5}{(x - 1)^4}$

مثال 4

قم بتبسيط $3 \log_3 x + \log_3 7 - \frac{1}{2} \log_3 x$

$= \log_3 x^3 + \log_3 7 - \log_3 \sqrt{x}$

خاصية الأس الثابت

$= \log_3 7x^3 - \log_3 \sqrt{x}$

خاصية ناتج الضرب

$= \log_3 \frac{7x^3}{\sqrt{x}}$

خاصية ناتج القسمة

مثال 5

حل $7 \ln 2x = 28$

$7 \ln 2x = 28$

المعادلة الأصلية

$\ln 2x = 4$

اقسم كل طرف على 7.

$e^{\ln 2x} = e^4$

ارفع أس كل طرف.

$2x = e^4$

خاصية المعكوس

$x = 0.5e^4 \approx 27.299$

حل وحول لأبسط صورة.

2-4 المعادلات الأسية واللوغاريتمية (الصفحات 190-199)

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

39. $3^{x+3} = 27^{x-2} \quad \frac{9}{2}$

40. $25^{3x+2} = 125 \quad -\frac{1}{6}$

41. $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0 \quad \ln 3; \ln 5$

42. $e^x - 4e^{-x} = 0 \quad \ln 2$

43. $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 18 \quad 6$

44. $\log_6 x + \log_6 (x - 5) = 2 \quad 9$

2-5 النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي (الصفحات 200-210)

أكمل كلًا من الخطوات التالية.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات حسب النموذج المحدد.

b. مثل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثله بيانيًا.

45. أسى 45-46. انظر الحاشية.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	5	17	53	166	517	1614

46. لوغاريتمي

x	7	6	5	4	3	2	1
y	15	14	12	10	8	4	3

مثال 6

احسب التقريب الخطي للبيانات الموضحة بافتراض نموذج لوغاريتمي. واحسب معادلة الخط الأفضل تمثيلًا. استخدم هذه المعادلة لإيجاد نموذج لوغاريتمي للبيانات الأصلية.

x	1	3	5	7	9	10
y	12	-7	-15	-21	-25	-27

الخطوة 2 لحساب التقريب الخطي لـ $y = a \ln x + b$: ومثل بيانيًا $(\ln x, y)$.

ln x	0	1.1	1.6	1.9	2.2	2.3
y	12	-7	-15	-21	-25	-27

الخطوة 2 الخط الأفضل تمثيلًا هو $y = -16.94x + 11.86$

الخطوة 3 $x = \ln x \quad y = -16.94 \ln x + 11.86$

إجابات إضافية

52b. لا؛ الإجابة النموذجية؛ إن مضاعفة الشدة لا يضاعف وحدة الديسيبل؛

$$10 \log \frac{2w}{w_0} = 10 \log 2 + 10$$

$$\log \frac{w}{w_0} \neq 2 \times 10 \log \frac{w}{w_0}$$

54a.

$$[0, 20] \text{ scl: 2 by } [0, 105] \text{ scl: 10}$$

54b.

ln x	2.20	2.30	2.40	2.48	2.56	2.64	2.71	2.77
y	33	50	65	77	87	94	98	101

$$54c. y = 120.48 \hat{x} - 226.48$$

$$[0, 3] \text{ scl: 0.25 by } [0, 105] \text{ scl: 10}$$

$$54d. y = 120.48 \ln x - 226.48$$

$$[0, 20] \text{ scl: 2 by } [0, 105] \text{ scl: 10}$$

دليل الدراسة والمراجعة

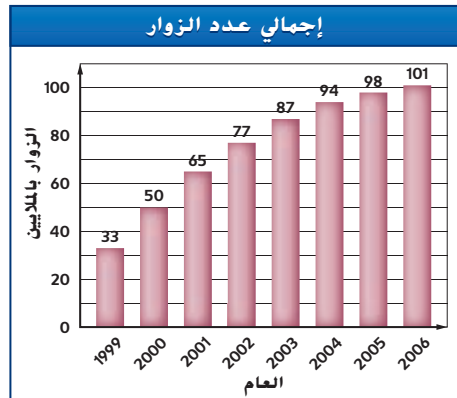
التطبيقات وحل المسائل

52. **الصوت** يمكن تمثيل مستوى شدة الصوت بالديسيبل بالمعادلة $d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$. حيث يمثل w شدة الصوت بالوات لكل متر مربع. ويمثل w_0 الثابت $10^{-12} \times 1$ وات لكل متر مربع. (الدرس 2-4)
- a. حدد شدة الصوت لحفلة موسيقية يصل شدة الصوت بها إلى 100 ديسيبل. 1×10^{-2}
- b. تقارن هند بين الحفلة وبين الموسيقى التي تعزفها في بيتها. وهي تعزف الموسيقى بمستوى 50 ديسيبل. وهكذا فإن شدة صوت الموسيقى نصف شدة صوت الحفلة. فهل استدلالها صحيح؟ علل إجابتك رياضياً. **انظر الحاشية.**
- c. يتم عزف الموسيقى الهادئة بشدة $10^{-8} \times 1$ وات لكل متر مربع. ما مقدار زيادة الأعداد العشرية إذا تضاعفت الشدة؟ **3.01 dB**

53. **المعرفة المالية** لدى علي AED 8000 ويريد إيداعها في حساب بفائدة مركبة مستمرة. هدفه هو امتلاك AED 12,000 خلال 5 أعوام. (الدرس 2-4)

- a. وجد علي بنكاً يقدم 6% على الاستثمارات. فكم يستغرق وصول استثماره إلى AED 12,000 بمعدل 6%؟ **6.76 أعوام تقريباً**
- b. ما المعدل اللازم لوصول علي إلى AED 12,000 بعد 5 أعوام؟ **تقريباً 8.1%**

54. **الإنترنت** عدد زوار موقع إنترنت رائج موضع أدناه. (الدرس 2-5) a-d. **انظر الحاشية.**



- a. قم بعمل تمثيل بياني باستخدام مخطط تشتت للبيانات. افترض أن 1990 = 0
- b. احسب التقريب الخطي للبيانات باستخدام نموذج لوغاريتمي.
- c. مثل بيانياً البيانات التي تم تقريبها خطياً، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.
- d. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثله بيانياً.

47. **التضخم** تزداد أسعار السلع الاستهلاكية عامة كل عام نتيجة التضخم. من عام 2000 إلى 2008، كان متوسط معدل التضخم في الولايات المتحدة 5.4%. في ظل هذا المعدل، يمكن تمثيل سعر اللبن بعد t من الأعوام من يناير 2000 بواسطة $M(t) = 2.75(1.045)^t$. (الدرس 2-1)

- a. كم كان سعر اللبن في عام 2005؟ 2000؟ **2.75 AED; 3.43 AED**
- b. إذا استمر التضخم بمعدل 4.5%، فكم سيكون سعر اللبن تقريباً في 2015؟ **5.32 AED**
- c. في أي عام بلغ سعر اللبن 4 دولارات أمريكية؟ **2008**

48. **السيارات** تنخفض قيمة السيارة الجديدة من لحظة قيادتها خارج معرض التاجر. وتستمر قيمة السيارة في الانخفاض كل عام. قيمة إحدى السيارات بعد t أعوام من شرائها هو $f(x) = 18,000(0.8)^t$ (الدرس 2-1)

- a. ما معدل استهلاك السيارة؟ **20%**
- b. بعد كم عام من شراء السيارة تنخفض قيمتها الأصلية إلى النصف؟ **3.11 أعوام**

49. **الكيمياء** عمر النصف لإحدى المواد المشعة هو 16 عامًا. يمكن تحديد عدد الأعوام t التي يستغرقها انحلال الكمية المبدئية N_0 إلى N بواسطة $t = \frac{16 \log \frac{N}{N_0}}{\log \frac{1}{2}}$ (الدرس 2-2)

- a. كم تقريباً عدد الأعوام التي يستغرقها انحلال 100 جرام إلى 30 جراماً؟ **28 عامًا**
- b. ما النسبة المئوية تقريباً لها سيبقى من 100 جرام بعد 40 عامًا؟ **18%**

50. **الزلازل** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. يعتمد العدد R على كمية الطاقة E التي يطلقها الزلزال بالكيلو وات في الساعة. ويتم تحديد قيمة R بواسطة $R = 0.67 \times \log (0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-2)

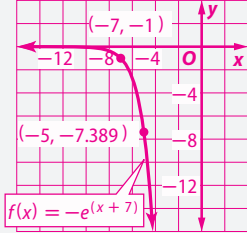
- a. أوجد R لزلزال يطلق 1,000,000 كيلو وات في الساعة. **5.2**
- b. قم بتقدير كمية الطاقة التي يطلقها زلزال يسجل 7.5 على مقياس ريختر. **2.8×10^9 kWh**

51. **علم الأحياء** الوقت الذي يستغرقه تضاعف نوع من الحيوانات يُعرف بأنه مدة الجيل ويتم تمثيله بالمعادلة $G = \frac{t}{2.5 \log_{10} d}$. حيث يمثل b العدد الأولي للحيوانات ويمثل d العدد النهائي للحيوانات ويمثل t الفترة ويمثل G مدة الجيل. إذا عملت أن مدة الجيل G لأحد الأنواع 6 أعوام. فما الفترة t التي يستغرقها 5 حيوانات للتضاعف إلى 3125 حيواناً؟ (الدرس 2-3) **75 عامًا**

إجابات إضافية

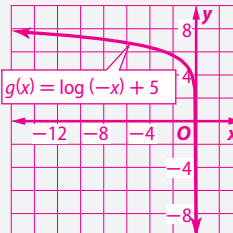
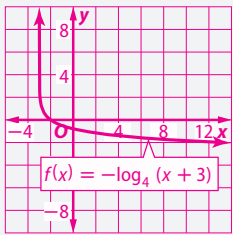
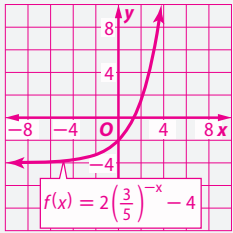
1. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, 0)$

نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y = -e^7$ ؛
خط التقارب مع المحور الأفقي $x: \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
متناقصة ضمن المجال $(-\infty, \infty)$



2. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-4, \infty)$

نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y = -2$ ؛
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: 1.36$ ؛
خط التقارب: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y = -4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty - 4$
المجال $(-\infty, \infty)$



10.

11.

تمرين على الاختبار

مثل كل دالة بيانيًا وحلها. ووضح المجال والحدى ونقاط التقاطع والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرقي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

1. $f(x) = -e^{x+7}$ 2. $f(x) = 2\left(\frac{3}{5}\right)^{-x} - 4$

1-2. **انظر الحاشية.** استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم مثل التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و $g(x)$.

3. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 4. $f(x) = 5^x$

5. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$ 6. $g(x) = -5^{-x} - 2$

3-4. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**

5. **اختيار من متعدد** لأي دالة تنتمي $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ؟

A $f(x) = -2 \cdot 3^{-x}$ B $f(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^x$ C $f(x) = -\log_8(x-5)$ D $f(x) = \log_3(-x) - 6$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

6. $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ 7. $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$
8. $\log_{10} 12 = 12$ 9. $\log_{10} 5.3 = 5.3$

مثل كل دالة بيانيًا. 10-11. **انظر الحاشية.**

10. $f(x) = -\log_4(x+3)$ 11. $g(x) = \log(-x) + 5$

12. **المعرفة المالية** تستثمر AED 1500 في حساب يمدد فائدة 8% لمدة 12 عامًا دون إجراء أية عمليات إيداع أو سحب أخرى.

a. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت الفائدة مركبة شهريًا؟ AED 3905.08
b. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت الفائدة مركبة مستمرة؟ AED 3917.54
c. إذا كان الاستثمار مركبًا يوميًا، فكم تقريبًا يستغرق تضاعف المبلغ المبدئي؟ 8.67 أعوام تقريبًا

14. $\log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b - \log_3 4 - 1$
قم بتوسيع كل تعبير.

13. $\log_6 36xy^2$ 14. $\log_3 \frac{a\sqrt{b}}{12}$
 $2 + \log_6 x + 2 \log_6 y$

15. **جيولوجيا** يمكن حساب قوة زلزال على مقياس ريختر بواسطة المعادلة $R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ ، حيث يمثل E الطاقة الناتجة و E_0 الثابت.

a. ضرب زلزال بقوة 7.1 سان فرانسيسكو عام 1989. أوجد مقياس زلزال ينتج 10 أضعاف طاقة زلزال 1989. 7.8
b. في عام 1906، ضرب سان فرانسيسكو زلزال سجل 8.25. كم ضعفًا من الطاقة أنتجها زلزال 1906 بالنسبة إلى زلزال 1989؟ 53 ضعفًا تقريبًا

قم بتبسيط كل تعبير.

16. $2 \log_4 m + 6 \log_4 n - 3(\log_4 3 + \log_4 j) = \log_4 \frac{m^2 n^6}{27j^3}$
17. $1 + \ln 3 - 4 \ln x = \ln \frac{3e}{x^4}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

18. $3^x + 8 = 9^{2x} = 81^x$ 19. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ 0, ln 2
20. $\log x + \log(x-3) = 1$ 5
21. $\log_2(x-1) + 1 = \log_2(x+3)$ 5

22. **اختيار من متعدد** أي المعادلات ليس لها حلول؟
F $e^x = e^{-x}$ H $\log_5 x = \log_9 x$
G $2^{x-1} = 3^{x+1}$ J $\log_2(x+1) = \log_2 x$

بالنسبة إلى التمرينين 23 و 24، أكمل كل خطوة.

a. أوجد دالة أسية أو لوغاريتمية لتمثيل البيانات.
b. أوجد قيمة كل نموذج عند $x = 20$.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	8	3	0	-2	-3	-4	-5

a. $f(x) = 8.20 - 5.11 \ln x$ b. -7.11

x	1	3	5	7	9	11	13
y	3	4	5	6	7	9	10

a. $f(x) = 2.9(1.1)^x$ b. 21.22

25. **التعداد السكاني** يوضح الجدول تعداد سكان الولايات المتحدة بين عامي 1790 و 1940. افترض أن 1780 = 0.

السكان (بالمليون)	العام
4	1790
10	1820
23	1850
50	1880
92	1910
132	1940

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج تربيعي. مثل البيانات بيانيًا، واكتب معادلة للخط الأفضل تمثيلًا. a-b. **انظر ملحق إجابات الوحدة 2.**
b. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية. هل النموذج التربيعي جيد التمثيل للنمو السكاني؟ اشرح.

1 التركيز

الهدف استخدام الخطوط القاطعة والاشتقاق من أجل الحساب التقريبي لمعدل التغير.

نصيحة دراسية

دّر الطلاب بأن معدل التغير في الدالة الخطية يقاس باستخدام الميل الذي يعطى من خلال العلاقة التالية،

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
 يستخدم الميل أيضاً لإيجاد معدل التغير بين عدة نقاط على التمثيلات البيانية للدوال الأسية واللوغارتمية.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعاتٍ من ثلاثة أو أربعة طلاب ذوي قدراتٍ متنوعة. اطلب من هذه المجموعات إتمام الأنشطة 1 و 2 و 3 وتمارين تحليل النتائج من 3 إلى 7.

اسأل:

- ما الذي يمكن إيجاده باستخدام الاشتقاق؟ القيمة الدقيقة لمعدل تغير دالةٍ عند نقطة واحدة لتلك الدالة

إجابات إضافية

نشاط 1

الخطوة 3 $m = 4.67$

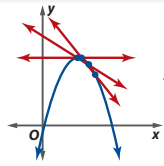
الخطوة 4 $m = 3.52$ ؛ $m = 3.08$

الهدف:

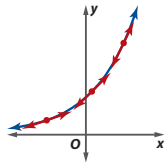
- استخدام المستقيمات القاطعة والاشتقاق من أجل الحساب التقريبي لمعدلات التغير.

2. الإجابة النموذجية:
 يكون استخدام المستقيمات القاطعة لتقريب معدل التغير اللحظي لدالةٍ عند نقطة ما فعالاً فقط في حالة قرب نقطتي التقاطع من بعضهما. وكذلك لا يتسم بكفاءة عالية لأنه قد يستلزم محاولات كثيرة للوصول إلى تقريب مناسب.

2 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم الحساب التقريبي لمعدلات التغير

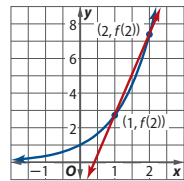


استكشفنا معدل تغير دالة عند نقطة معينة باستخدام المستقيمات القاطعة والاشتقاق. لقد تعلمت أنه يمكن تمثيل معدل تغير دالة عند نقطة معينة بواسطة ميل مستقيم المماس بالدالة عند تلك النقطة، ويُطلق على هذا معدل التغير اللحظي عند تلك النقطة.



يتم استخدام الثابت e في استخدامات النمو والتضائل المستمرين. ولهذا الثابت كذلك العديد من الاستخدامات في حساب التفاضل والتكامل. معدل تغير $f(x) = e^x$ عند أي من نقاطها يكون قريباً، مما يجعلها دالة مفيدة للاستكشاف والتطبيق في حساب التفاضل والتكامل.

نشاط 1 معدل التغير التقريبي



تقريب معدل تغير $f(x) = e^x$ عند $x = 1$.

الخطوة 1 مثل $f(x) = e^x$ بيانياً؛ وارسم مخططاً للنقطتين $P(1, f(1))$ و $Q(2, f(2))$.

الخطوة 2 ارسم خطاً قاطعاً للدالة $f(x)$ عبر P و Q .

الخطوة 3 استخدم $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ لحساب متوسط معدل التغير m لـ $f(x)$ باستخدام P و Q .

الخطوة 4 كرر الخطوات 1-3 مرتين إضافيتين. أولاً استخدم $P(1, f(1))$ و $Q(1.5, f(1.5))$ ثم استخدم $P(1, f(1))$ و $Q(1.25, f(1.25))$.

تحليل النتائج

- بينما يقترب الإحداثي x لـ Q من 1، مما يقترب متوسط معدل التغير m ؟
- قم بتقييم ووصف الكفاءة الإجمالية والفاعلية الإجمالية لاستخدام المستقيمات القاطعة لتقريب معدل التغير اللحظي لدالة عند نقطة معلومة.

قيمت بتطوير تعبير الاشتقاق لحساب ميل المستقيمات القاطعة لقيم مختلفة من h .

نتائج قسمة الفرق

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بينما تنخفض قيمة h ، يقترب الخط القاطع أكثر فأكثر من مستقيم المماس بالدالة. ويعمل استبدال قيم h المتناقصة في الاشتقاق على إنتاج ميول خطية قاطعة تقترب من حد ما. ويمثل هذا الحد ميل مستقيم المماس ومعدل التغير اللحظي للدالة عند تلك النقطة.

 $[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1 $[-5, 5]$ scl: 1 by $[-5, 5]$ scl: 1 $[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1 $[-10, 10]$ scl: 1 by $[0, 2000]$ scl: 200

$D = (-\infty, \infty)$, $R = [0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $x: 0$.
 التقاطع مع المحور الرأسى $y: 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 متصلة مع جميع الأعداد الحقيقية، ومتناقصة ضمن المدى $(-\infty, 0)$ ومتزايدة ضمن المدى $(0, \infty)$



نقطة $D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, \infty)$.
التقاطع مع المحور الأفقي $x: 0$.
نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y: 0$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
متصلتان مع جميع الأعداد الحقيقية
ومتزايدتان ضمن المدى $(-\infty, \infty)$

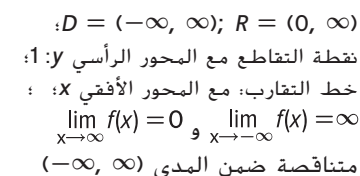


$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$ نقطة
 التقاطع مع المحور الأفقي $x: 0$, نقطة
 التقاطع مع المحور الرأسى $y: 0$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 متصلتان مع جميع الأعداد
 الحقيقية؛ ومتناقصتان عند المدى
 $(-\infty, \infty)$



$D = (-\infty, \infty), R = (-\infty, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الأفقي $O: x$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $O: y$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 متصلتان مع جميع الأعداد الحقيقية:
 ومتناقصتان عند المدى $(-\infty, \infty)$

.1A



$D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسى y : 1
 خط التقارب: مع المحور الأفقى x
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$
 متزايدة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$

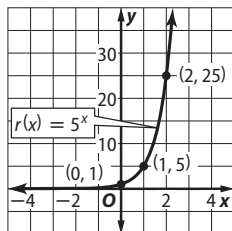


$D = (-\infty, \infty)$; $R = (1, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي $y: 2$
 خط التقارب: $y = 1$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$
 متناقصة ضمن المبداء $(-\infty, \infty)$

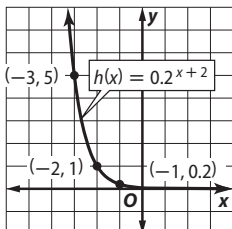


تأخذ هذه الدالة الصورة $k(x) = f(x) - 2$. وبالتالي فإن التمثيل البياني للدالة $k(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = 4^x$ منسحبًا نحو الأسفل بمقدار وحدتين.

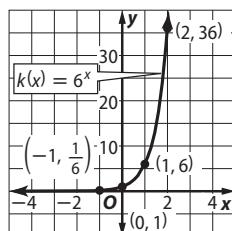
2. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \infty$
 متزايدة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



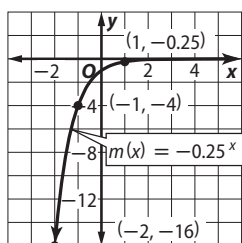
3. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 0.04
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$
 متناقصة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



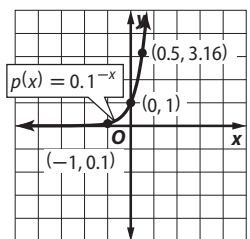
4. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x) = \infty$
 متزايدة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



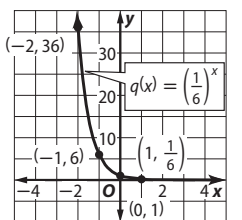
5. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, 0)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : -1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) = 0$
 متزايدة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



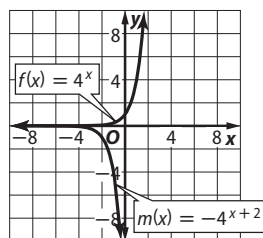
6. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0$
 تزايد ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



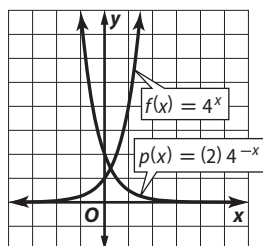
7. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$
 متناقصة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



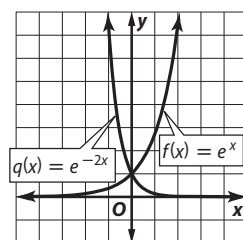
2B. تأخذ هذه الدالة الصورة $m(x) = -f(x + 2)$. وبالتالي، فإن التمثيل البياني للدالة $m(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = 4^x$ منسحبًا على المحور الأفقي x ومنسحبًا بمقدار وحدتين نحو اليسار.



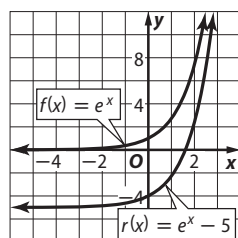
2C. تأخذ هذه الدالة الصورة $p(x) = 2f(-x)$. وبالتالي، فإن التمثيل البياني للدالة $p(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = 4^x$ منسحبًا على المحور الرأسي y ومتسبًا رأسيًا بمقدار وحدتين.



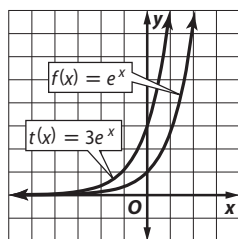
3A. تأخذ هذه الدالة الصورة $q(x) = f(-2x)$. وبالتالي، يعبر التمثيل البياني للدالة $p(x)$ عن التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^x$ معكوسًا بالنسبة للمحور الرأسي y ومضغوطًا بالاتجاه الأفقي بمعامل مقداره 2.



3B. تأخذ هذه الدالة الصورة $r(x) = f(x) - 5$. وبالتالي، فإن التمثيل البياني للدالة $r(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^x$ منسحبًا نحو الأسفل بمقدار 5 وحدات.

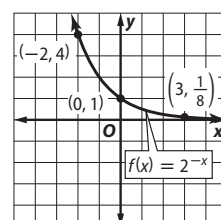


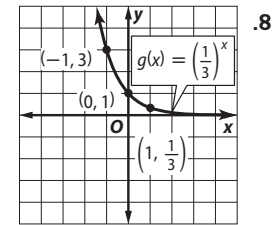
3C. تأخذ هذه الدالة الصورة $t(x) = 3f(x)$. وبالتالي، فإن التمثيل البياني للدالة $t(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = e^x$ متسبًا بالاتجاه الرأسي بمعامل مقداره 3.



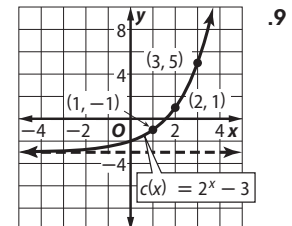
الصفحات 166-169، الدرس 2-1

1. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$;
 نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y : 1
 خط التقارب: المحور الأفقي x .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
 متناقصة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$

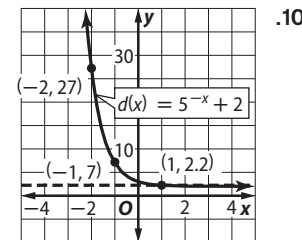




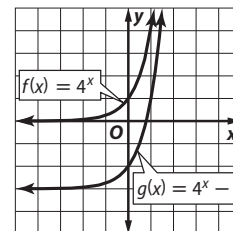
8. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (0, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور
الرأسي y : 1: خط التقارب:
المحور الأفقي x : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$: متناقصة ضمن
المدى $(-\infty, \infty)$



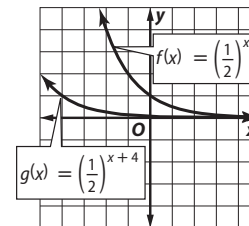
9. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-3, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور
الرأسي y : -2: نقطة التقاطع
مع المحور الأفقي x : 1.6: خط
التقارب: $y = -3$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = -3$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = \infty$
متزايدة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



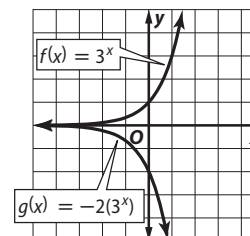
10. $D = (-\infty, \infty)$; $R = (2, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور
الرأسي y : 3: خط التقارب: $y = 2$:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \infty$
متناقصة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



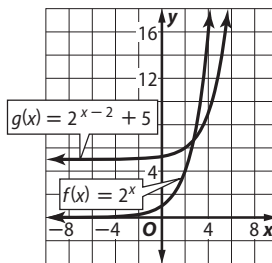
11. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منسحباً نحو
اليسار بمقدار 3 وحدات.



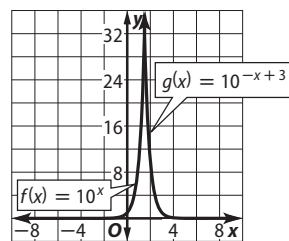
12. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منسحباً نحو
اليسار بمقدار
4 وحدات.



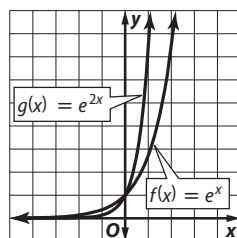
13. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منعكساً على
المحور الأفقي x ومتسبباً
رأسياً بمعامل مقداره 2.



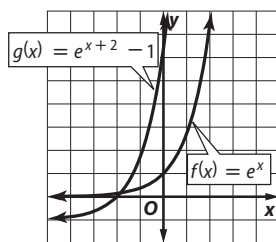
14. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منسحباً
بمقدار وحدتين إلى اليمين
و5 وحدات للأعلى.



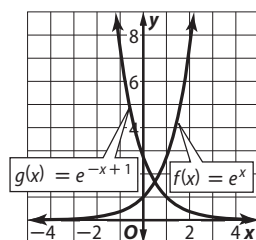
15. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منعكساً
على المحور الرأسى y
ومنسحباً بمقدار
3 وحدات إلى اليمين.



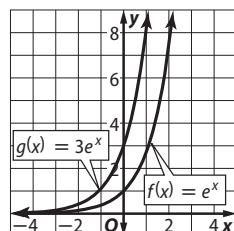
16. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ مضغوطاً أفقياً
بمعامل مقداره 2.



17. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منسحباً
وحدتين إلى اليسار
ووحدة لأسفل.



18. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ منعكساً
على المحور الرأسى y
ومنسحباً بمقدار وحدة
إلى اليمين.

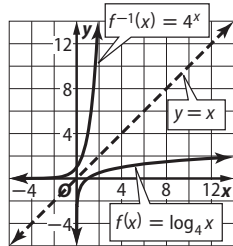


19. التمثيل البياني للدالة
 $g(x)$ هو التمثيل البياني
للدالة $f(x)$ متسبباً رأسياً
بمعامل مقداره 3.

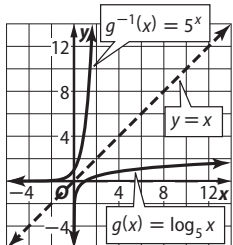
66. الإجابة النموذجية: سنقوم بتحليل دوال القوة ذات الصورة ax^n حيث إن a و n عدنان صحيحان موجبان. وسنقوم بتحليل دوال القوة ذات الصورة ab^x والتي يكون فيها a عددًا صحيحًا موجبًا. إن مجال كلا الدالتين هو $(-\infty, \infty)$ ولكن مداها مختلف. في دوال القوة، إذا كان n عددًا زوجيًا، يكون المدى هو $[0, \infty)$. في دوال القوة، إذا كان n عددًا فرديًا، فيكون المدى هو $(-\infty, \infty)$. في الدوال الأسية، يكون المدى على الدوام هو $(0, \infty)$. تلك دوال القوة نقطتي تقاطع مع المحور الأفقي x ومع المحور الرأسي y عند نقطة الأصل، بينما تلك الدوال الأسية نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y عند النقطة a وليس لها نقطة تقاطع مع المحور الأفقي x . إن دوال القوة الزوجية متناظرة بالنسبة للمحور الرأسي y بينما تكون دوال القوة الفردية متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل. في حين أن الدوال الأسية غير متناظرة. وكلا نوعي الدوال متواصل. إن دوال القوة الفردية متزايدة على الدوام أما دوال القوة الزوجية فهي متناقصة ضمن المدى $(-\infty, 0)$ ولكنها متزايدة ضمن المدى $(0, \infty)$. تتزايد الدوال الأسية إذا كان $b > 1$ ولكنها تتناقص إذا كان $b < 1$. وأخيرًا، يقترب السلوك لدوال القوة إلى ∞ أما الدوال الأسية فتقترب إلى ∞ عندما يكون $b > 1$ ولكنها تقترب إلى الصفر عندما يكون $b < 1$.

الصفحات 178-180، الدرس 2-2

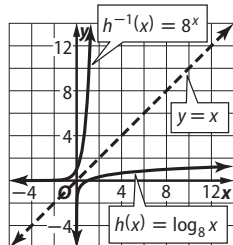
28. $D = (0, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 1: خط التقارب:
المحور الرأسي y : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة ضمن المدى $(0, \infty)$



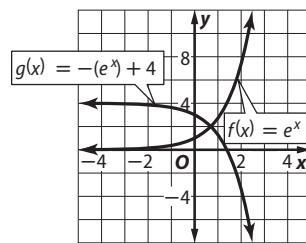
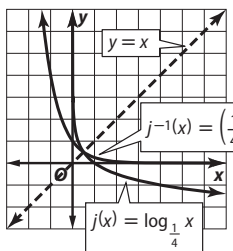
29. $D = (0, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 1: خط التقارب:
المحور الرأسي y : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة ضمن المدى $(0, \infty)$



30. $D = (0, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 1: خط التقارب:
المحور الرأسي y : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ متزايدة ضمن المدى $(0, \infty)$



31. $D = (0, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x : 1: خط التقارب:
المحور الرأسي y : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متناقصة ضمن المدى $(0, \infty)$



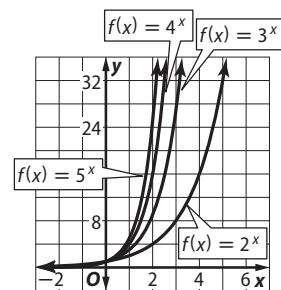
20. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكسًا على المحور الأفقي x ومنسحبًا بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى.

n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 579.64	AED 580.59	AED 580.81	AED 580.91	AED 580.92

n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 1,552.97	AED 1,564.38	AED 1,566.99	AED 1,568.27	AED 1,568.31

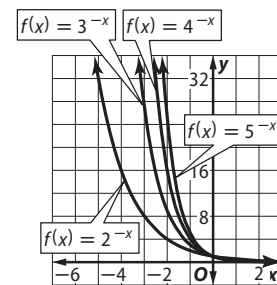
n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 2,653.30	AED 2,701.48	AED 2,712.64	AED 2,718.10	AED 2,718.28

n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 28,717.46	AED 29,846.61	AED 30,112.88	AED 30,243.76	AED 30,248.24



58a. إن قيم متوسط معدل التغير تساوي 1.5, 4, 7.5, 12 عندما تكون $b = 2, 3, 4, 5$ على التوالي.

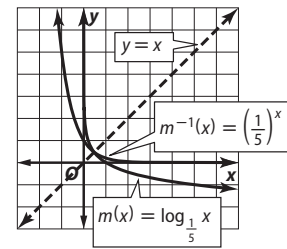
58b. مع تزايد قيم b يزداد أيضًا متوسط معدل التغير. وهذا ينتج عنه تمثيل بياني متوسع رأسياً كما هو موضح في الجزء a.



58c. إن قيم متوسط معدل التغير تساوي -0.375, -0.444, -0.469, -0.48 عندما تكون b تساوي 2, 3, 4, 5 على التوالي.

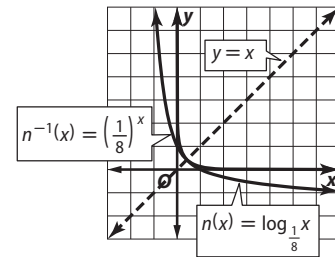
58d. مع تزايد قيم b يتناقص متوسط معدل التغير. تكون التمثيلات البيانية الممثلة لقيم b أكبر عند القيم السالبة لـ x ولكن حين يكون x موجبًا، تتضاءل التمثيلات البيانية وتقترب من الصفر بصورة أسرع.

32.



$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع
المحور الأفقي x : 1: خط
التقارب: المحور الرأس y :
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متناقصة
ضمن المدى $(0, \infty)$

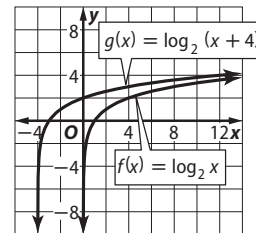
33.



$D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$
نقطة التقاطع مع
المحور الأفقي x : 1: خط
التقارب: المحور
الرأسي y : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متناقصة
ضمن المدى $(0, \infty)$

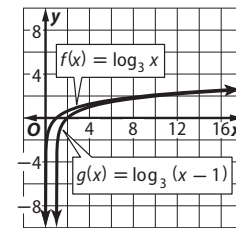
34.

التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$
منسحبًا نحو اليسار بمقدار
4 وحدات.



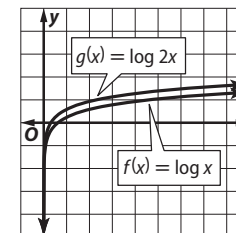
35.

التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$
منسحبًا إلى اليمين بمقدار
وحدة.



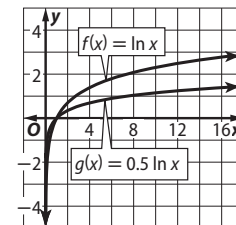
36.

التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$
مضغوطًا أفقيًا بمعامل قدره
2.

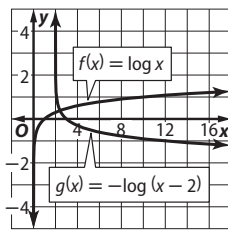


37.

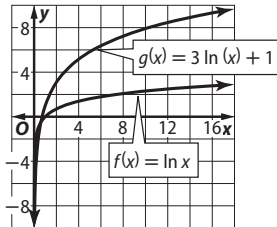
التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$
مضغوطًا أفقيًا بمعامل
قدره 0.5.



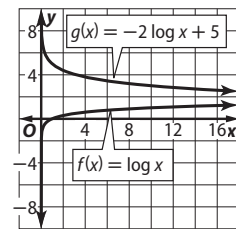
38. التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة
 $f(x)$ منعكسًا على المحور
الأفقي x ومنسحبًا بمقدار
إلى اليمين.



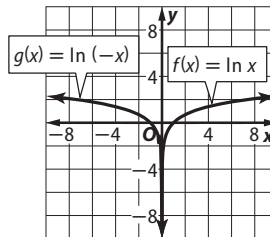
39. التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة
 $f(x)$ متسعة رأسيًا بمعامل
قدره 3 ومنسحبًا بمقدار
وحدة إلى الأعلى.



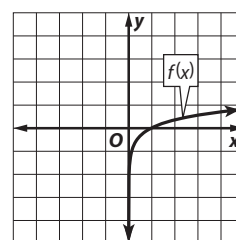
40. التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة
 $f(x)$ منعكسًا على المحور
الأفقي x ومتسعة رأسيًا
بمعامل مقداره 2، ومنسحبًا
بمقدار 5 وحدات إلى
الأعلى.



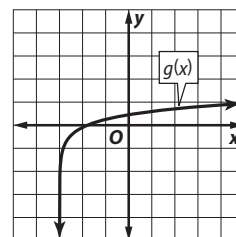
41. التمثيل البياني للدالة $g(x)$
هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$
منعكسًا على المحور الرأس y .



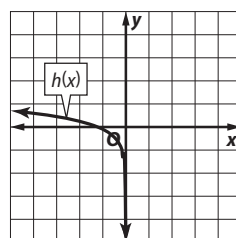
56. $D = (0, \infty); R = (-\infty, \infty)$
لا يوجد تناظر، دالة متصلة
ومتزايدة ضمن المدى
 $(0, \infty)$ ؛ الإجابة النموذجية:



57. $D = (-3, \infty); R = (-\infty, \infty)$
لا يوجد تماثل، دالة مستمرة
ومتزايدة ضمن المدى $(-3, \infty)$
؛ الإجابة النموذجية:



58. $D = (-\infty, 0); R = (-\infty, \infty)$
لا يوجد تناظر، دالة متصلة
ومتناقصة ضمن المدى
 $(-\infty, 0)$ ؛ الإجابة النموذجية:

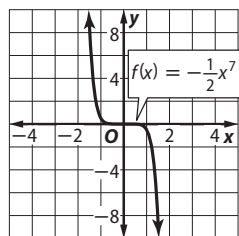


59.

135E | الوحدة 2 | ملحق الإجابات

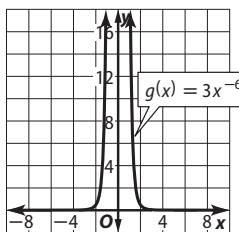
73. الإجابة النموذجية: تزداد الدوال الأسية التي تملك أساسًا ذا قيمة كبيرة بصورة أسرع من الدوال التي تملك أساسًا ذا قيمة أقل. على سبيل المثال، $2^{25} > 6^{10} > 10^9$. ازدادت قيمة الأس. كلما ازداد الفرق بين قيم y لكل أساس. كما تزداد الدوال اللوغاريتمية التي تملك أساسًا ذا قيمة أكبر بصورة أبطأ من الدوال التي تملك أساسًا ذا قيمة أقل. على سبيل المثال، $\log_2 36 > \log_6 216 > \log_{10} 500$.

$D = (-\infty, \infty)$;
مع نقطة التقاطع $R = (-\infty, \infty)$;
مع المحور الأفقي x : 0. نقطة
التقاطع مع المحور الرأسى
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ، 0: y
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ متصلة
مع جميع الأعداد الحقيقية.
ومتناقصة ضمن المدى $(-\infty, \infty)$



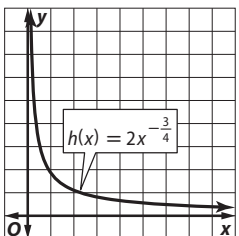
88.

$D = (-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$;
 $R = (0, \infty)$ لا توجد نقاط
تقاطع. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ لا نهائية دالة
غير متصلة عند النقطة
 $x = 0$: ومتزايدة ضمن
المدى $(-\infty, 0)$ ومتناقصة
ضمن المدى $(0, \infty)$



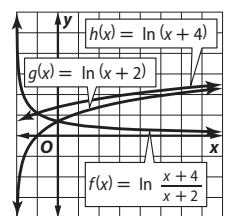
89.

$D = (0, \infty)$; $R = (0, \infty)$
لا توجد نقاط تقاطع.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$
دالة متصلة ضمن المدى $(0, \infty)$;
ومتناقصة عند المدى $(0, \infty)$



90.

الصفحتان 187-188، الدرس 2-3



113.

يمثل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ الفرق بين التمثيلين البيانيين
للدالتين $h(x)$ و $g(x)$.

نفرض أن $x = \log_b m$ و $x = \log_b n$
إذًا، يكون $b^x = m$ و $b^y = n$

$$\log_b \left(\frac{m}{n} \right) = \log_b \left(\frac{b^x}{b^y} \right)$$

$$= \log_b (b^{x-y})$$

$$= x - y$$

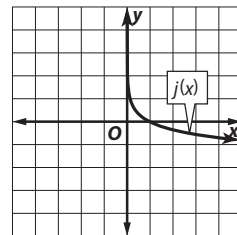
$$= \log_b m - \log_b n$$

بالتعويض

خاصية الاشتقاق للأسس

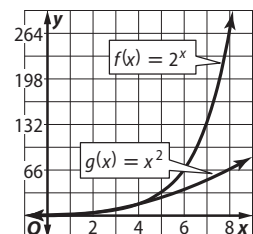
حسب تعريف اللوغاريتمات

بالتعويض



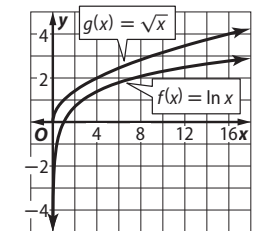
$D = (0, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$;
لا يوجد تناظر، دالة متصلة
ومتناقصة ضمن المدى $(0, \infty)$;
الإجابة النموذجية:

69c. إن معدل نمو الدالة الأسية
أكبر من معدل نمو دالة القوة
عندما تزداد قيمة x .



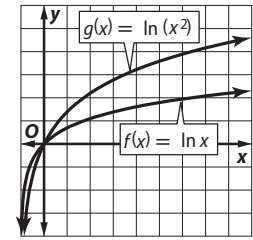
69a.

69f. إن معدل نمو الدالة الجذرية
أكبر من معدل نمو دالة
اللوغاريتم الطبيعي عندما
تزداد قيمة x .



69d.

70. الإجابة النموذجية: تقع الدالة اللوغاريتمية الأصلية ضمن
المدى $(0, \infty)$. بينما تقع كل من $c(x)$ و $d(x)$ ضمن المدى
 $(-\infty, \infty)$. يقع كل من $a(x)$ و $b(x)$ ضمن المدى
 $\{x \mid x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$. أما مدى الدالة اللوغاريتمية الأصلية
فهو $(-\infty, \infty)$. ومدى كل من $a(x)$ و $b(x)$ هو
 $\{y \mid y \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$. ومدى كل من $c(x)$ و $d(x)$ هو
 $(0, \infty)$. الدالة اللوغاريتمية الأصلية ليس لها نقطة تقاطع
مع المحور الرأسى y . وبالمثل، فإن الدالة $b(x)$ ليس لها
نقطة تقاطع مع المحور الرأسى y . تتقاطع $a(x)$ مع المحور
الرأسى y في نقطة الأصل. بينما تتقاطع كل من $c(x)$
و $d(x)$ مع المحور الرأسى y عند النقطة $(0, 1)$. إن الدوال
اللوغاريتمية $a(x)$ ، $c(x)$ و $d(x)$ ليست متناظرة، أما الدالة
 $b(x)$ فهي متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل. جميع الدوال
متصلة باستثناء الدالتين $a(x)$ و $c(x)$ المتصلتين فقط عند
 $[0, \infty)$. تتزايد الدالة اللوغاريتمية الأصلية وكذلك الدالة
 $d(x)$ عند $(0, \infty)$. عندما تكون $n > 0$ ، تتزايد الدالة $a(x)$
عند $(0, \infty)$ وتتناقص عند $(-\infty, 0)$. عندما تكون
 $n > 0$ ، تتناقص الدالة $a(x)$ عند $(0, \infty)$ وتتزايد في
 $(-\infty, 0)$. تتناقص الدالة $b(x)$ في $(0, \infty)$ وتتزايد في
 $(-\infty, 0)$. عندما يكون $a > 0$ ، فإن $c(x)$ تتزايد في المدى
 $(0, \infty)$ وتتناقص في المدى $(-\infty, 0)$. وعندما تكون
 $a > 0$ ، فإن $c(x)$ تتناقص في المدى $(0, \infty)$ وتتزايد في
المدى $(-\infty, 0)$. عندما تقترب الدالة اللوغاريتمية الأصلية
إلى الصفر، يقترب التمثيل البياني إلى $-\infty$ ، وعندما تتناهي
الدالة إلى ∞ ، يقترب التمثيل البياني إلى ∞ . عندما تكون
 $n > 0$ ، تقترب الدالة $a(x)$ إلى ∞ عندما تقترب x إلى ∞ .
تقترب الدالة $b(x)$ إلى الصفر عندما تقترب x إلى $-\infty$.
وتقترب من الصفر عندما تقترب x من ∞ . عندما تكون
 $a > 0$ ، تقترب الدالة $c(x)$ من الصفر حينما يقترب x
إلى $-\infty$ ، وتقترب من ∞ حينما يقترب x من ∞ . وتقترب
الدالة $d(x)$ إلى الصفر حينما يقترب x من $-\infty$ وتقترب من
 ∞ حينما تقترب x إلى ∞ .



114.

إن جميع قيم الدالة $g(x)$ تساوي ضعف قيم الدالة $f(x)$ بالنسبة لكل قيم x في المدى.

لنفرض أن
تحديد اللوغاريتمات
خاصية المساواة للأسس
خاصية المساواة في اللوغاريتمات
خاصية المعكوس في اللوغاريتمات
خاصية الانعكاس في الضرب
بالتعويض

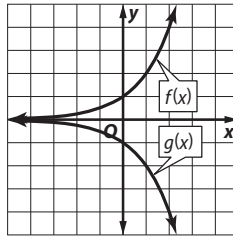
115. لنفرض أن $\log_a n = x$
تحديد اللوغاريتم
خاصية المساواة في اللوغاريتمات
خاصية القوة في اللوغاريتمات
بقسمة كلا الطرفين على $\log_b a$
نستبدل x بـ $\log_a n$

$$\begin{aligned} \log_5 (nt)^2 &= \frac{2 \log_5 nt}{\log_4 \left(\frac{t}{r}\right)} && \text{119. خاصية القوة في اللوغاريتمات} \\ &= \frac{2(\log_5 n + \log_5 t)}{\log_4 \left(\frac{t}{r}\right)} && \text{خاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات} \\ &= \frac{2(\log_5 n + \log_5 t)}{\log_4 t - \log_4 r} && \text{خاصية الاشتقاق في اللوغاريتمات} \\ &= \frac{2\left(\frac{\log n}{\log 5} + \frac{\log t}{\log 5}\right)}{\frac{\log t}{\log 4} - \frac{\log r}{\log 4}} && \text{قانون تغيير الأساس} \\ &= \frac{2\left(\frac{\log n + \log t}{\log 5}\right)}{\frac{\log t - \log r}{\log 4}} && \text{بالجمع.} \\ &= \frac{2 \log 4 (\log n + \log t)}{\log 5 (\log t - \log r)} && \text{نضرب في } \frac{\log 5 \log 4}{\log 5 \log 4} \\ &= \frac{2 \log n \log 4 + 2 \log 4 \log t}{\log 5 \log t - \log 5 \log r} && \text{خاصية التوزيع} \end{aligned}$$

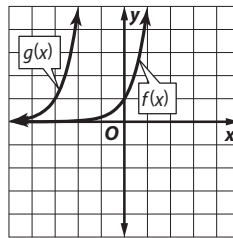
120. الإجابة النموذجية: $\log_b x = \frac{1}{\log b} \log x$ إذا فإن

اللوغاريتم ذا الأساس b هو المضاعف الثابت لللوغاريتم العادي المقابل له. عندما يكون $b > 1$ ، يتوسع التمثيل البياني f أو ينضغط في الاتجاه الرأسي. على سبيل المثال، إذا كان $b = 2$ ، فسوف يتوسع التمثيل البياني، ولكن إذا كان $b = 25$ ، فسينضغط التمثيل البياني. عندما يكون $b < 1$ ، بالإضافة إلى توسع التمثيل البياني أو انضغاطه في الاتجاه الرأسي، فإنه ينعكس على المحور الأفقي x .

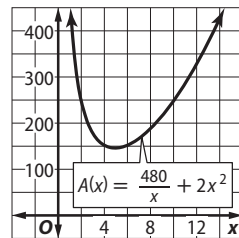
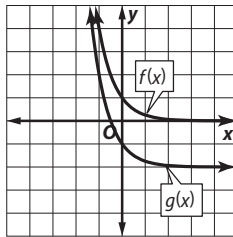
124. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكسًا على المحور الأفقي x .



125. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحبًا نحو اليسار بمقدار 3 وحدات.

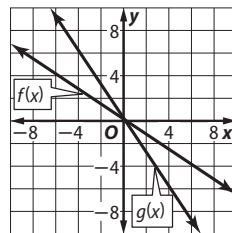


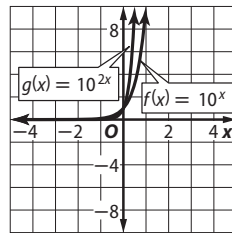
126. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحبًا نحو الأسفل بمقدار وحدتين.



127b

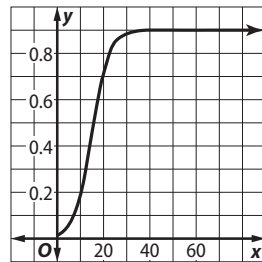
$$\begin{aligned} 131. f(g(x)) &= -\frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} = x - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = x \\ g(f(x)) &= -\frac{3}{2} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x \end{aligned}$$





6. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مضغوطاً أفقياً بمعامل قدره 2.

الصفحتان 198-199 الدرس 2-4



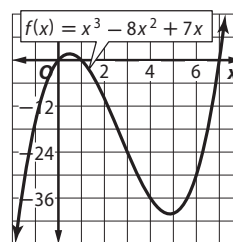
112a. أصغر من 90%؛ الإجابة النموذجية: عندما تقترب f من ∞ . فإن $e^{-0.28f}$ تقترب من الصفر. ولذلك، تقترب P من $\frac{0.9}{0+1}$ أو 0.9. والتمثيل البياني له خط التقارب أفقي عند النقطة 0.9؛ ولذلك لا بد أن تكون نسبة التلوث الذي تم التخلص منه أصغر من 90%.

112c. الإجابة النموذجية: ينبغي أن يختار المصنع أجهزة غسل العوادم بطول 30 قدمًا تقريبًا لتحقيق القدر الأقصى من خفض التلوث وتقليل المواد المستخدمة في أجهزة الغسل إلى الحد الأدنى. حيث يؤدي استخدام أجهزة غسل أطول من 30 قدمًا إلى تقليل منافع خفض التلوث إلى الحد الأدنى.

113. المعادلة اللوغاريتمية يمكن أن يكون لها عدد لا نهائي من الحلول الدخيلة. على سبيل المثال، يمكن الجمع بين عدد لا نهائي من الحدود، $\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3, \dots$ إلخ. لتكوين معادلة مثل $\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \dots = n$. يمكن تبسيط المعادلة إلى الصورة $(x-a)(x-b)(x-c) \dots = 0$. حيث يبدو فيها أن a, b, c, \dots تشكل حلولاً ولكنها حلول دخيلة، ذلك أنها تقضي إلى عدم وجود حل حقيقي لـ $\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3$.

123a. الدرجة تساوي 3، ومعامل الحد الأكبر يساوي 1. ونظرًا إلى أن الدرجة فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

123b. 0, 1, 7
123c. (-1, -16), (0.5, 1.625), (3, -24), (8, 56)

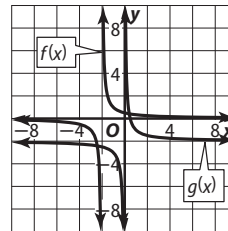


124a. الدرجة تساوي 3، ومعامل الحد الأكبر يساوي 1. ونظرًا إلى أن الدرجة فردية ومعامل الحد الأكبر موجب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

124b. 0, -2, -4

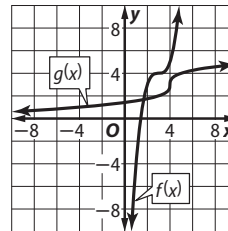
$$132. f(g(x)) = \frac{1}{(\frac{1}{x} - 2) + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x;$$

$$g(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 2} = x + 2 - 2 = x$$

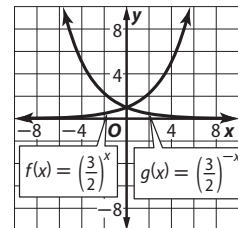


$$133. f(g(x)) = [(\sqrt[3]{x-4} + 3) - 3]^3 + 4 = (\sqrt[3]{x-4})^3 + 4 = x - 4 + 4 = x;$$

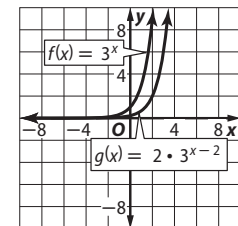
$$g(f(x)) = \sqrt[3]{[(x-3)^3 + 4]} - 4 + 3 = \sqrt[3]{(x-3)^3 + 3} + 3 = x - 3 + 3 = x$$



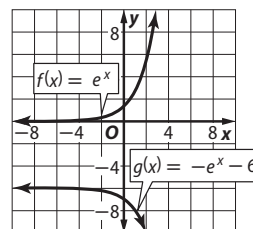
الصفحة 189، اختبار منتصف الوحدة



3. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكسًا على المحور الرأسى y .

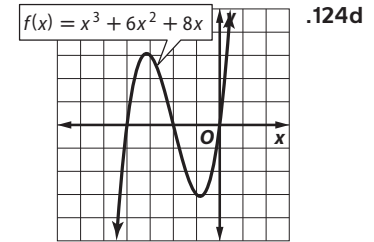


4. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ متسعة رأسياً بمعامل قدره اثنان ومنسحباً بمقدار وحدتين إلى اليمين.



5. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكسًا على المحور الأفقي x ومنسحباً بمقدار 6 وحدات نحو الأسفل.

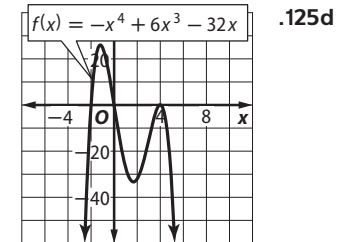
124c. $(-5, -15), (-3, 3), (-1, -3), (2, 48)$



125a. الدرجة تساوي 4، ومعامل الحد الأكبر يساوي -1. ونظرًا إلى أن الدرجة زوجية ومعامل الحد الأكبر سالب، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

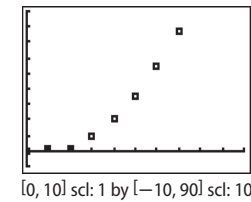
125b. -2, 0, 4

125c. $(-2.5, -52.8), (-1, 25), (2, -32), (5, -35)$

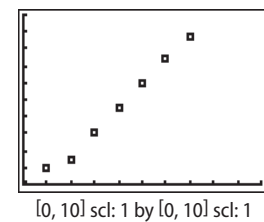
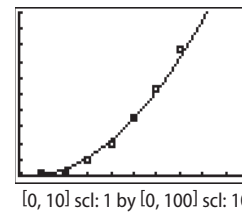


الصفحة 205 الدرس 2-5 (تمرين موجه)

5A.



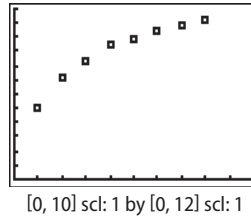
x	0	1	2	3	4	5	6	7
\sqrt{y}	0	1	1.41	3	4.47	5.92	7.35	8.77



$$\hat{y} = 1.29x - 0.52$$

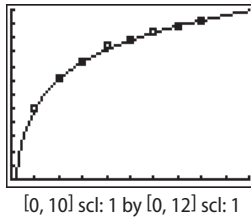
$$y = 1.66x^2 - 1.34x + 0.2704$$

5B.

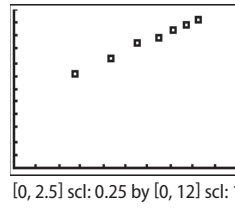


[0, 10] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

$\ln x$	0	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08
y	5	7.1	8.3	9.5	9.8	10.4	10.8	11.2



[0, 10] scl: 1 by [0, 12] scl: 1



[0, 2.5] scl: 0.25 by [0, 12] scl: 1

$$y = 3\hat{x} + 5$$

$$y = \ln x^3 + 5$$

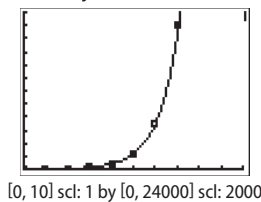
الصفحتان 208-209 الدرس 2-5

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\ln y$	2.40	3.47	4.51	5.59	6.69	7.78	8.85	10.0

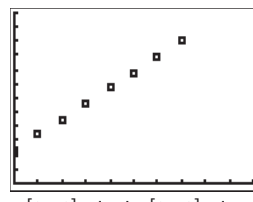
18a.

$$y = 10.7e^{1.08x}$$

$$\hat{y} = 1.08x + 2.37$$



[0, 10] scl: 1 by [0, 2400] scl: 2000



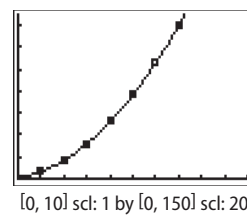
[0, 10] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7
\sqrt{y}	1	2.57	4.12	5.67	7.22	8.77	10.32	11.87

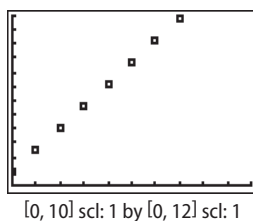
19a.

$$y = 2.4x^2 + 3.1x + 1$$

$$\hat{y} = 1.55x + 1.01$$



[0, 10] scl: 1 by [0, 150] scl: 20



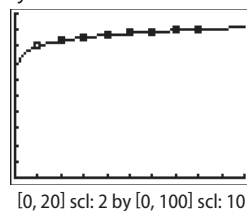
[0, 10] scl: 1 by [0, 12] scl: 1

$\ln x$	0.69	1.39	1.79	2.08	2.30	2.48	2.64	2.77
y	80	83.5	85.5	87	88.1	89	90	90.5

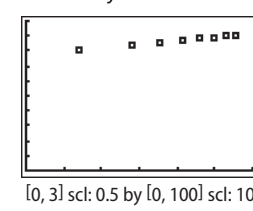
20a.

$$y = 5.1 \ln x + 76.5$$

$$y = 5.1x^2 + 76.5$$

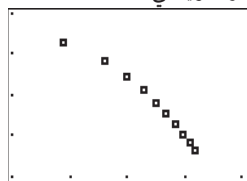


[0, 20] scl: 2 by [0, 100] scl: 10



[0, 3] scl: 0.5 by [0, 100] scl: 10

لوغاريتمي

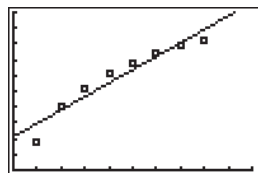


[6, 10] scl: 1 by [96, 100] scl: 1

الدالة اللوغاريتمية		دالة القوة		الدالة الأسية	
y	ln x	ln y	ln x	ln y	x
2.5	0.69	0.92	0.69	0.92	2
7.3	1.39	1.99	1.39	1.99	4
13.7	1.79	2.62	1.79	2.62	6
21.3	2.08	3.06	2.08	3.06	8
30.2	2.30	3.41	2.30	3.41	10
40.0	2.48	3.69	2.48	3.69	12
50.8	2.64	3.93	2.64	3.93	14
62.5	2.77	4.14	2.77	4.14	16

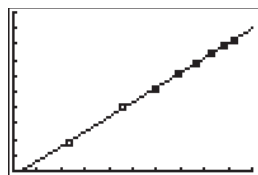
.27

الدالة الأسية:



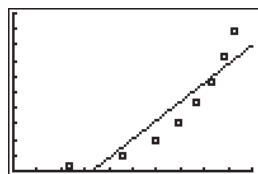
[0, 20] scl: 2 by [0, 5] scl: 0.5

دالة القوة:



[0, 3] scl: 0.3 by [0, 5] scl: 0.5

الدالة اللوغاريتمية:



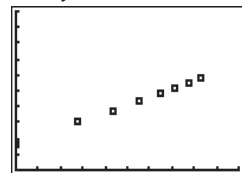
[0, 3] scl: 0.3 by [0, 70] scl: 7

إن التمثيل البياني للانحدار الخطي الخاص بدالة القوة يشبه إلى حد قريب جدًا خطأ.

ln x	0	0.69	1.10	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08
ln y	1.61	3.04	3.78	4.37	4.79	5.19	5.52	5.77

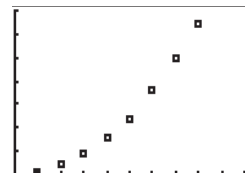
.21a

$$y = 5.05x^{1.99}$$



[0, 2.5] scl: 0.25 by [0, 10] scl: 1

$$\hat{y} = 1.99\hat{x} + 1.62$$



[0, 10] scl: 1 by [0, 350] scl: 50

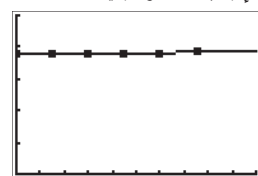
.21b

x	0	3	6	9	12	15
ln y	11.26	11.31	11.36	11.42	11.47	11.52

.23a

$$\hat{y} = 0.0175x + 11.26$$

الإجابة النموذجية: .23b

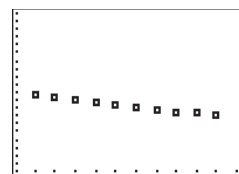


[0, 20] scl: 2 by [0, 15] scl: 3

الدالة اللوغاريتمية		دالة القوة		الدالة الأسية	
100	غير معرف	4.605	غير معرف	4.605	0
99.29	6.91	4.598	6.91	4.598	1,000
98.81	7.60	4.593	7.60	4.593	2,000
98.43	8.01	4.589	8.01	4.589	3,000
98.10	8.29	4.586	8.29	4.586	4,000
97.80	8.52	4.593	8.52	4.583	5,000
97.53	8.70	4.580	8.70	4.580	6,000
97.28	8.85	4.578	8.85	4.578	7,000
97.05	8.99	4.575	8.99	4.575	8,000
96.83	9.10	4.573	9.10	4.573	9,000
96.62	9.21	4.571	9.21	4.571	10,000

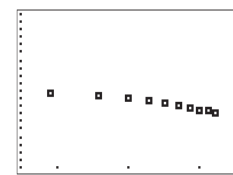
.24a

.24b النموذج الأسّي يقدم أفضل تمثيل.
الدالة الأسية



[100, 11000] scl: 1000 by [4.5, 4.7] scl: 0.01

دالة القوة

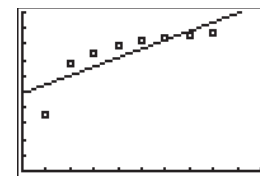


[6, 10] scl: 1 by [4.5, 4.7] scl: 0.01

28.

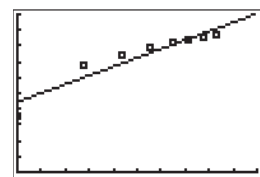
الدالة الأسية	دالة القوة	الدالة اللوغاريتمية
$\ln y$	$\ln x$	y
1.79	0.00	6
3.36	0.69	29
3.74	1.10	42
3.95	1.39	52
4.08	1.61	59
4.18	1.79	65
4.25	1.95	70
4.31	2.08	75

الدالة الأسية:



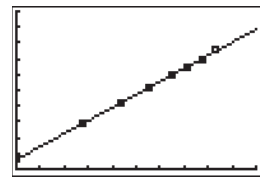
[0, 10] scl: 1 by [0, 5] scl: 0.5

دالة القوة:



[0, 5] scl: 0.5 by [0, 2.5] scl: 0.25

الدالة اللوغاريتمية:

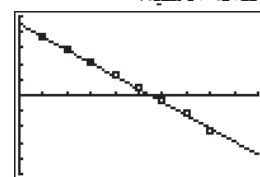


[0, 100] scl: 1 by [0, 5] scl: 0.5

إن التمثيل البياني للانحدار الخطي الخاص بالدالة اللوغاريتمية يشبه إلى حد قريب جدًا خطأً.

الدالة الأسية	دالة القوة	الدالة اللوغاريتمية
$\ln y$	$\ln x$	y
3.63	0	37.8
2.83	0.69	17.0
2.04	1.10	7.7
1.22	1.39	3.4
0.47	1.61	1.6
-0.36	1.79	0.7
-1.20	1.95	0.3
-2.30	2.08	0.1

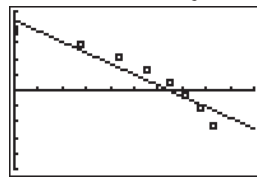
الدالة الأسية:



[0, 10] scl: 1 by [-5, 5] scl: 1

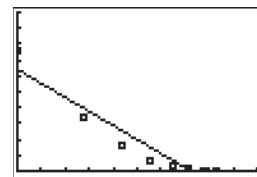
135K | الوحدة 2 | ملحق الإجابات

دالة القوة:



[0, 5] scl: 0.25 by [-5, 5] scl: 1

الدالة اللوغاريتمية:



[0, 50] scl: 5 by [0, 2.5] scl: 0.25

إن التمثيل البياني للانحدار الخطي الخاص بالدالة الأسية يشبه إلى حد قريب جدًا خطأً.

30a. التمثيل البياني للوجستي: يبدأ التمثيل البياني بالازدياد

بسرعة ثم يبدأ بالاستقرار ليأخذ قيمة ثابتة.

$$30b. y = \frac{3239}{1 + 9.84e^{-0.696x}}$$

30d. الإجابة النموذجية: في حين يساعد هذا النموذج في تمثيل

عدد الأسماك (المجتمع الإحصائي) توقعه بدقة تقريبًا في

المستقبل، بيد أنه لا يأخذ بالحسبان أي تغييرات قد تطرأ

على البحيرة بفعل العوامل الجوية أو التأثير البشري. على

سبيل المثال، قد تقوم إحدى الشركات المجاورة برمي

نفاياتها في البحيرة، ما قد يؤثر على زيادة أعداد الأسماك فيها.

$$32. ab^x = ae^{kx}$$

$$b^x = e^{kx}$$

$$\ln b^x = \ln e^{kx}$$

$$x \ln b = kx$$

$$\ln b = k$$

ولذلك،

$$y = ae^{kx}$$

$$y = ae^{x \ln b}$$

$$y = ae^{\ln b^x}$$

$$y = ab^x$$

33. الإجابة النموذجية: نعم، تتقاطع الدالة اللوجستية مع

المحور الرأسي y في النقطة $y = \frac{c}{1+a}$ ، ولكن لا يمكنها

التقاطع مع المحور الأفقي x لأن الثابت لا يمكن أن يساوي

الصفر أبدًا.

$$34. y = ab^x$$

$$\ln y = \ln ab^x$$

$$\ln y = \ln a + x \ln b$$

$$\ln y = (\ln b)x + \ln a$$

بما أن الحدين $\ln a$ و $\ln b$ ثابتان، تصبح هذه المعادلة خطية

عندما تكون $y = \ln y$.

$$35. y = ax^b$$

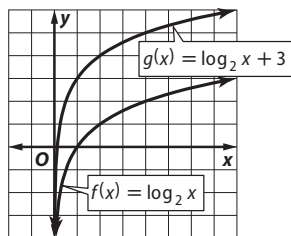
$$\ln y = \ln ax^b$$

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

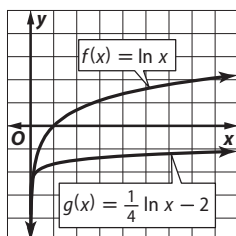
$$\ln y = b \ln x + \ln a$$

بما أن الحدين $\ln a$ و $\ln b$ ثابتان، تصبح هذه المعادلة خطية

عندما تكون $y = \ln y$ و $x = \ln x$.

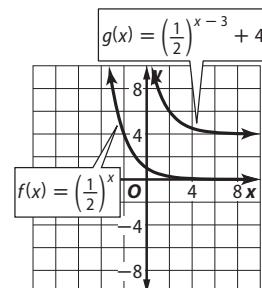


30. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحباً نحو الأعلى بمقدار 3 وحدات.

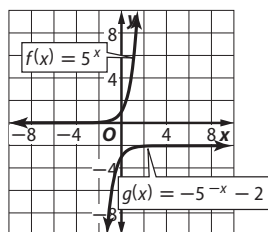


31. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مضغوطاً رأسياً بمعامل قدره $\frac{1}{4}$ ومنسحباً بمقدار وحدتين نحو الأسفل.

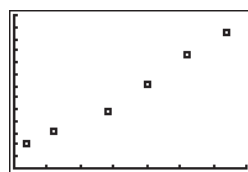
الصفحة 215، تمرين على الاختبار



3. المنحني البياني للدالة $g(x)$ هو المنحني البياني للدالة $f(x)$ منسحباً بمقدار 3 وحدات نحو اليمين وبمقدار 4 وحدات نحو الأعلى.



4. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منعكساً على المحور الأفقي x ومنعكساً على المحور الرأسى y ومنسحباً بمقدار وحدتين نحو الأسفل.



[0, 175] scl: 25 by [0, 13] scl: 1

$$\hat{y} = 0.064x + 1.04$$

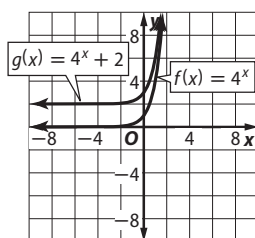
x	\sqrt{y}
10	2
30	3.16
70	4.8
100	7.07
130	9.59
160	11.49

25b. $y = 0.0041x^2 + 0.1331x + 1.0816$ ؛ إن زيادة التعداد السكاني لا تتم على وجه العموم دون حدود. بل إنها ستبدأ في العادة بالاستقرار ثم الثبات. ولهذه الأسباب يعدّ نموذج التمثيل اللوجستي الأكثر ملائمة.

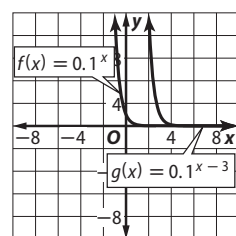
36. يعد التمثيل البياني للدالة $g(x)$ إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $f(x)$. ينزاح التمثيل البياني بمقدار a وحدات إلى الأعلى إذا كانت a موجبة، وبمقدار a وحدات إلى الأسفل إذا كانت a سالبة.

37. الإجابة النموذجية: إن لمجموعات البيانات التي يمثلها منحني الانحدار الأسّي مدى محدوداً. إن لمجموعات البيانات التي يمثلها منحني الانحدار اللوغاريتمي مجالاً محدوداً.

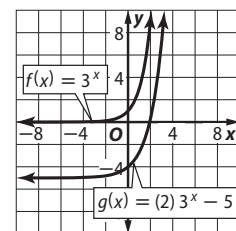
الصفحة 212، دليل الدراسة والمراجعة



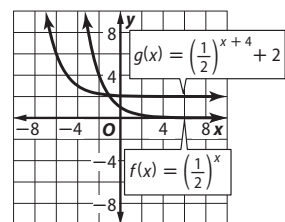
15. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحباً نحو الأعلى بمقدار وحدتين.



16. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحباً نحو اليمين بمقدار 3 وحدات.



17. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ موسّعاً رأسياً بمعامل قدره 2 ومنسحباً نحو الأسفل بمقدار 5 وحدات.



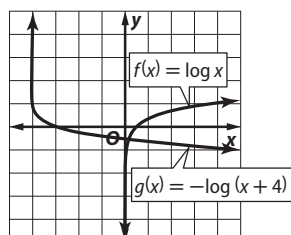
18. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ منسحباً بمقدار 4 وحدات نحو اليسار وبمقدار وحدتين نحو الأعلى.

n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 375.18	AED 379.11	AED 380.03	AED 380.48	AED 380.49

19.

n	1	4	12	365	باستمرار
A	AED 1,141.17	AED 1,143.67	AED 1,144.25	AED 1,144.53	AED 1,144.54

20.



29. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x)$ معكوساً بالنسبة للمحور الأفقي x ومنسحباً بمقدار 4 وحدات نحو اليسار.

كتيب الطالب

يمكن أن يساعدك كتيب الطالب هذا على الإجابة عن هذه الأسئلة.

ماذا إن احتجت إلى تذكر خصائص دالة معينة؟

R-1

المفاهيم الأساسية

يسرد قسم المفاهيم الرئيسية جميع المفاهيم المهمة التي تم التأكيد عليها في النص بالإضافة إلى الصفحات التي تظهر فيها.

ماذا إن نسيت إحدى المفردات؟

G-1

القاموس

يحتوي القاموس المتوفر باللغتين العربية والإنجليزية على كلمات مهمة أو مختلفة مستخدمة في الكتاب المدرسي كله.

ماذا إن نسيت أحد القوانين؟

TF-1

القوانين والرموز والدوال المثلثية والمطابقات

بداخل الغلاف الخلفي في كتاب الرياضيات، يوجد العديد من قوائم القوانين والمطابقات والرموز المستخدمة في الكتاب.

المفاهيم الأساسية

الاستعداد لما قبل حساب المتفاضل والتكامل

الوحدة 0

القيم الأولية لـ *f* (ص. ٢6) لإيجاد قيمة *f*، نفترض أن *R* هو التالي عند قسمة *n* على 4.

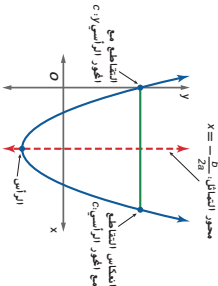
$$\begin{aligned} n < 0 \\ R = -3 \rightarrow f^n &= f \\ R = -2 \rightarrow f^n &= -1 \\ R = -1 \rightarrow f^n &= -f \\ R = 0 \rightarrow f^n &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n > 0 \\ R = 1 \rightarrow f^n &= f \\ R = 2 \rightarrow f^n &= -1 \\ R = 3 \rightarrow f^n &= -f \\ R = 0 \rightarrow f^n &= 1 \end{aligned}$$

التبثيل البياني للدارة التربيعية (ص. ٢٩) تبذل التمثيل البياني

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ حيث } a \neq 0.$$

- التناطح مع المحور الرأسي يساوي $c + b(0) + a(0)^2$ أو c .
- معادلة محاور التناطح تساوي $x = -\frac{b}{2a}$.
- الإحداثي x للرأس يساوي $-\frac{b}{2a}$.



القيم العظمى والصغرى (ص. ٢١0) هي التمثيل البياني لـ $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.

- تنتج وتكون في أقصى قيمة لها إذا كان $a > 0$.
- وتبقى وتكون في أصغر قيمة لها إذا كان $a < 0$.

خاصية ناتج الضرب المتطبي (ص. ٢١١) بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b ، إذا كان $a = 0$ ، فإن $b = 0$ ، أو $b = 0$ ، أو كلا من a و b يساويان الصفر.

إكمال المربع (ص. ٢١2) لاستكمال مربع أي تعبير تربيعي بالصيغة $bx + x^2$ اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1: أوجد نصف b الذي يمثل معامل x .

الخطوة 2: قم بترتيب نتيجة الخطوة 1.

الخطوة 3: أضف نتيجة الخطوة 2 إلى $bx + x^2$.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

الصيغة التربيعية (ص. ٢١2) يتم إيجاد حلول المعادلة التربيعية التي تكون بالصيغة $0 = c + bx + ax^2$ ، حيث $a \neq 0$ ، عن طريق الصيغة التالية.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الجذر التربوي لعدد ما (ص. ٢١4) يعرض أن a و b عدداً حقيقياً وأن n هي أي عدد حقيقي موجب أكبر من 1.

- إذا كان $a = b^n$ ، فإن a هو الجذر التربوي لـ b .
- إذا كان a له جذر تربوي، فإن الجذر التربوي الأساسي لـ a هو الجذر الذي لديه نفس علامة a .

يشير إلى الجذر التربوي الأساسي لـ a من خلال التعبير الجذري $\sqrt[n]{a}$ ، حيث n هو مؤشر الجذر و a هو الجذور.

الخواص الأساسية للجذور (ص. ٢١5) يعرض أن a و b عدداً حقيقياً أو متغيراً أو تعبيراً جبرياً، و m و n هما عدداً صحيحان موجبان أكبر من 1. حيث إن كل الجذور أعداد حقيقية وكل المعاملات أكبر من الصفر، فإن الخواص التالية صحيحة.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

خاصية ناتج الضرب

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

خاصية ناتج القسمة

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$

الأسس السالبة (ص. ٢١6) إذا كان b عدد حقيقي أو متغير أو تعبير جبري، و m و n عدداً حقيقياً موجبان أكبر من 1، فإن

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

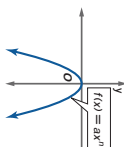
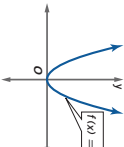
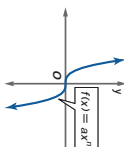
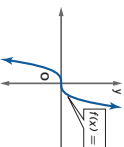
$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b}$$

الدوال الأسية وكثيرة الحدود والنسبية

دوال ذات قيمة أسية (ص. ٢٨٦) الدالة ذات القيمة الأسية هي أي دالة صيغتها $f(x) = ax^n$ حيث a و n عبارة عن أعداد حقيقية ثابتة غير صفرية.

(ص. ٢٨٦) تكون f دالة ذات قيمة أسية $f(x) = ax^n$ إن كان n عدداً صحيحاً موجباً.

<p>نقطة، a نهائي، a نهائي</p>  <p> $(-\infty, 0)$ نهائي $(0, \infty)$ نهائي تتناقص عند $x = 0$ الاتصال: متصلة بالنسبة إلى $x \in \mathbb{R}$ التناقص: آخر أولي و التناقص: الصغرى: $(0, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التزايد: $(-\infty, 0)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ سوروت النهائية: $-\infty$ </p>	<p>نقطة، a نهائي، a نهائي</p>  <p> $(-\infty, \infty)$ نهائي تتناقص عند $x = 0$ الاتصال: متصلة بالنسبة إلى $x \in \mathbb{R}$ التناقص: آخر أولي و التناقص: الصغرى: $(0, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التزايد: $(-\infty, 0)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ سوروت النهائية: $-\infty$ </p>
<p>نقطة، a نهائي، a نهائي</p>  <p> $(-\infty, \infty)$ نهائي تتناقص عند $x = 0$ الاتصال: متصلة بالنسبة إلى $x \in \mathbb{R}$ التناقص: آخر أولي و التناقص: الصغرى: $(0, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التزايد: $(-\infty, 0)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ سوروت النهائية: $-\infty$ </p>	<p>نقطة، a نهائي، a نهائي</p>  <p> $(-\infty, \infty)$ نهائي تتناقص عند $x = 0$ الاتصال: متصلة بالنسبة إلى $x \in \mathbb{R}$ التناقص: آخر أولي و التناقص: الصغرى: $(0, 0)$ التناقص: $(0, \infty)$ التزايد: $(-\infty, 0)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ سوروت النهائية: $-\infty$ </p>

دوال جذرية (ص. ٩٠) تكون f دالة جذرية $\sqrt[n]{x}$ إذا كان n عدد صحيح موجب.

نقطتي

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

نقطتي

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

نقطتي

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

نقطتي

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

R-3-R-2 | المفاهيم الرئيسية

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل أنظمة المتباينات (P21)

الحلوة: رسم كل متباينة يعطى الشكل الصحيح: (رسم خط سيك (رسم المتباينات ثنائي التي تحتوي على \leq أو \geq رسم خط متقطع لتمثيل المتباينات ثنائي التي تحتوي على $<$ أو $>$).

حدد المنطقة البغلة لجميع المتغيرات. وهذه هي طريقة حل النظام.

الخطوة 3: راجع الحل باستخدام نقطة اختبار داخل منطقة الحل.

لجميع أو طرح مصغوفتين لهما نفس الأبعاد، قم بجمع أو طرح العناصر المتناظرة: (ص. P24) **المصفوفات الجبرج والطرح في المصفوفات**

خواص عملیات الیمنوفات (ص. 25P)

k. فإن الخواص التالية تكون صحيحة.

خاصية التبديل في الجمع
خاصية التجميع في الجمع

خاصية التوزيع للكميات غير المتجهة من اليسار

مبدأ العدد الأساسي (p28) يفرض أن A و B حدثان. وإذا كان الحدث A له الوائج المحتملة η_1 وبتبعه الحدث B الذي له الوائج المحتملة η_2 فإن الحدث A الذي يتبعه الحدث B له الوائج المحتملة $\eta_1 \cdot \eta_2$.

(ص. ۲۹) انتخاب دیل

عدد تبديل عناصر n المجموعة n المأخوذة من المجموعة r في

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

الموافيق (ص. ١٣٥) عدد توافق عناصر n المجموعة r في وقت ما يساوي

$$v_i(u) = \frac{v_i(u)}{v_i(u) + v_j(u)}$$

مقاييس النزعة المركزية (P32.ح)

المتوسط الحسابي

444

$$\frac{U}{\sqrt{\sigma^2}} = \eta$$

الوسيط

مقياس التشتت (P32، ص. ٢٣٢)

الفرق بين القيم العظمى والصغرى في مجموعة من البيانات.

[illegible]

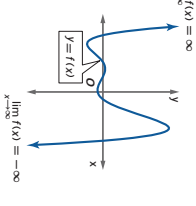
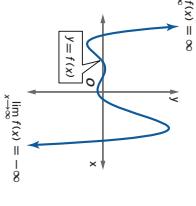
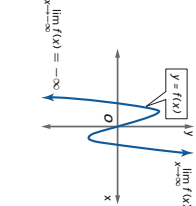
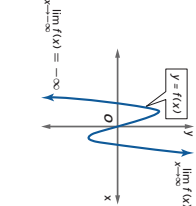
خانی اہلسنی

$$u = 1 - u$$

الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{n}}$$

اختيار البحر الرئيسي لسنوات النهاية كثيرة الحدود (ص: ٢98)
 سنوات النهاية لأي دالة كثيرة الحدود $0 + d_1x + \dots + d_nx^n = f(x)$ يمكن وصفه بأي شكل من الأشكال الأربعة التالية.

نقري، و d_n موجب	نقري، و d_n سالب
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 
نقري، و d_n موجب	نقري، و d_n سالب
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 

المناهج الأساسية

الأصهار وتقاطع التحول للدوال كثيرة الحدود (ص: ٢٥٥) الدالة كثيرة الحدود f ذات الدرجة $n \geq 1$ لها عدد n من الأصهار الحقيقية البسيطة على الأكثر. كما لها عدد $n - 1$ من نقاط التحول على الأكثر.

صيغة تربيعية (ص: ٢٥٥) تكون التعبير كثير الحدود في x إذا تم كتابتها على الشكل $c + bu + au^2$ لأي أعداد a, b, c, u ، حيث u يمثل بعض التعبيرات في x . إذا تم كتابتها على الشكل $c + bu + au^2$ لأي أعداد a, b, c, u ، حيث u يمثل بعض التعبيرات في x .

الأصهار المتكررة للدوال كثيرة الحدود (ص: ٢٥٢) إذا كان $m < c$ يمثل أعلى قيمة أسية لـ $(x - c)$ الذي هو عامل الدالة بتعدد الحدود f فإن c يساوي صفر التكرار لـ f حيث m عدد طبيعي.

- إذا كان صفر c يوجد به تكرار فردي، فإن الشكل البياني لـ f يمر بالصفر الألفي x في $c = x$ وقيمة $f(x)$ تغير العلامات عند $c = x$.

- إذا كان صفر c يوجد به تكرار زوجي، فإن الشكل البياني لـ f يتماس مع المحور الرئيسي x عند $c = x$ وقيمة $f(x)$ لا تتغير عند $c = x$.

قيمة كثيرات الحدود (ص: ٢١٥) يعرض أن $f(x)$ و $d(x)$ كثيرة الحدود حيث تكون درجة $d(x)$ أصغر من أو تساوي درجة $f(x)$ و $0 \neq d(x)$ وبذلك توجد هاتئ كثيرات حدود فريدة $q(x)$ و $r(x)$ حيث إن $f(x) = q(x)d(x) + r(x)$ و $0 \leq \deg(r) < \deg(d)$.

إذا كان $0 \neq r(x)$ فإن $d(x)$ يقسم بشكل متساوي إلى $f(x)$ أو درجة $f(x)$ أصغر من درجة $d(x)$.

خوارزمية القسمة التكرارية (ص: ٢١١) لقسمة كثيرة الحدود على العامل $c - x$.

استكمل جميع الخطوات.

المثال

اقسم $9 + 18x + 25x^2 - 6x^3$ على $3 - x$

3

6 -25 18 9

↓ ↓ ↓ ↓

0 -18 -21 -9

↓ ↓ ↓ ↓

0 0 0 0

الباقي معاملات ناتج القسمة الباقي

أضرب في $c = 3$ ✓ أضف الحدود = ↓

المناهج الأساسية

نظرية الباقي (ص: ٢١٢) إذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود مقسومة على $c - x$ فإن الباقي يكون $f(c) = r$.

نظرية المعامل (ص: ٢١٨) لا تحتوي الدالة $f(x)$ كثيرة الحدود على عامل $(x - c)$ إلا إذا كان $0 = f(c)$.

نظرية الصفر النسبي (ص: ٢١٩) إذا كان f دالة كثيرة الحدود بالصيغة $0 + d_1x + \dots + d_nx^n = f(x)$ ونحلل الدرجة $1 \geq m$ ، ومعاملات أعداد صحيحة $0 \neq d_0$ فإن كل صفر نسبي لـ f لديه نفس الصيغة $\frac{p}{q}$ حيث

- q لا يوجد بها أي عوامل مشتركة سوى 1.
- p هو عامل عدد صحيح للحد الثابت d_0 .
- q هو عامل عدد صحيح للعامل الرئيسي d_n .

اختيارات الحدود العليا والسفلى (ص: ٢2١) افترض أن f دالة كثيرة الحدود ذات الدرجة $1 \geq n$ ولها معاملات حقيقية ومعامل رئيسي موجب. افرض أن $f(x)$ مقسومة على $c - x$ باستخدام القسمة التكرارية.

- إذا كان $0 < c$ وكل عدد في آخر سطر من القسمة غير سالب وغير موجب بشكل متبادل فإن c هوحد سفلي للأصهار الحقيقية لـ f .
- إذا كان $0 \geq c$ وكل عدد في آخر سطر بالقسمة غير سالب، فإن c هوحد علوي للأصهار الحقيقية لـ f .

قاعدة ديكرت لإشارات (ص: ٢23) إذا كانت $0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{n-1}x^{n-1} + d_nx^n = f(x)$ دالة كثيرة الحدود ولها معاملات حقيقية، فإن

- عدد الأصهار الحقيقية الموجبة لـ f يساوي عدد تغيرات الإشارات $(-)$ أو $(+)$ من هذا العدد بحدود عدد زوجي.
- وعدد الأصهار الحقيقية السالبة لـ f يساوي عدد تغيرات الإشارات $(-)$ أو $(+)$ من هذا العدد بحدود عدد زوجي.

نظرية الجبر الأساسية (ص: ٢23) عبارة عن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n حيث $0 > n$ ، وتحتوي على صفر واحد على الأقل حقيقي أو تخيلي في نظام الأعداد الأولية.

نظرية تحليل العوامل الحقيقية (ص: ٢24) إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود بدرجة $0 > n$ ، فإن f لها n عوامل حقيقية و n عدد حقيقي غير صفري و $0n \dots c_2 \dots c_1(x - c_2) \dots (x - c_1) = f(x)$

حيث n عدد حقيقي غير صفري و $0n \dots c_2 \dots c_1(x - c_2) \dots (x - c_1) = f(x)$

تحليل الدوال كثيرة الحدود إلى عوامل على الأعداد الحقيقية (ص: ٢24) كل دالة كثيرة الحدود بدرجة $0 > n$ وتتميز بعوامل حقيقية يمكن كتابتها كناتج لمعاملات حقيقية وعوامل تربيعية لا يمكن اختزالها وكل دالة لديها عوامل حقيقية.

الخضوط المقاربة الرأسية والأفقية (ص: ٢3١)

المستقيم $c = x$ هو خط مقارب أفقي في الشكل البياني لـ f إذا كان $c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ أو $\pm\infty = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ (المستقيم $c = y$ هو خط مقارب أفقي في الشكل البياني لـ f إذا كان $c = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x)$ أو $\pm\infty = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x)$)

الشكل البياني للدوال النسبية (ص: ٢32) إذا كانت f دالة منطقية ناتجة عن

$$f(x) = \frac{d(x)}{b(x)} = \frac{d_nx^n + d_{n-1}x^{n-1} + \dots + d_1x + d_0}{b_nx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0}$$

حيث إن $0 \neq b(x)$ و $0 \neq d(x)$ لا يوجد به أي عوامل مشتركة سوى 1. فإن الشكل البياني f يحتوي على العوامل التالية.

- **الخط المقارب العمودي** قد يوجد خط مقارب عمودي للأصهار الحقيقية $b(x)$.
- **الخط المقارب الأفقي** يحتوي الشكل البياني على خط مقارب أفقي أو قد لا يحتوي على أي خط مقارب وذلك وفق معادلة درجة n لـ $b(x)$ إلى درجة m لـ $d(x)$
 - إذا كان $m < n$ فإن الخط المقارب الأفقي هو $0 = y$.
 - إذا كان $m = n$ فإن الخط المقارب الأفقي هو $0 = y$.
 - إذا كان $m > n$ فإنه لا يوجد أي خط مقارب أفقي.

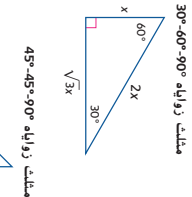
التقاطعات التقاطعات مع المحور الأفقي x إن وجدت، تقع عند الأصهار الحقيقية لـ $d(x)$ ، التقاطع مع المحور الرئيسي y إن وجد فهو قيمة f عندما تكون $0 = x$.

خضوط مقاربة مائلة (ص: ٢3٣) إذا كانت f هي دالة جذرية نتج عن

$$f(x) = \frac{d(x)}{b(x)} = \frac{d_nx^n + d_{n-1}x^{n-1} + \dots + d_1x + d_0}{b_nx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0}$$

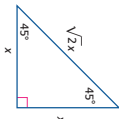
حيث إن $0 \neq b(x)$ و $0 \neq d(x)$ لا يوجد به أي عوامل مشتركة بخلاف 1. فإن الشكل البياني f يحتوي على خط مقارب مائل شريطة أن $1 + m = n$ و m دالة الخط المقارب المائل هي الناتج التعدد الحدود $q(x)$ الناتج عن قسمة $d(x)$ على $b(x)$.

المفاهيم الأساسية



مثلث ذو زاوية 30°-45°-90°

مثلث ذو زاوية 45°-45°-90°



التعليم المتقدمة لتروايا الخاصة (ص. 222 P)

الدوال المتقدمة المعكوسة (ص. 223 P)

معكوس جيب الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة وجيب الزاوية θ هو: فإن معكوس جيب الزاوية x يساوي قياس الزاوية θ .
بمعنى أنه إذا كانت $x = \sin \theta$ فإن $\theta = \sin^{-1} x$.

معكوس جيب تمام الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة وجيب تمام الزاوية θ هو: فإن معكوس جيب تمام الزاوية x يساوي قياس الزاوية θ .
بمعنى أنه إذا كانت $x = \cos \theta$ فإن $\theta = \cos^{-1} x$.

معكوس ظل الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة وظل الزاوية θ هي: فإن معكوس ظل الزاوية x يساوي قياس الزاوية θ .
بمعنى أنه إذا كانت $\theta = \tan^{-1} x$ فإن $x = \tan \theta$.

قياس دائري (ص. 232 P) قياس زاوية θ بالقياس الدائري للزاوية المركزية للدائرة يساوي نسبة طول القوس المقطوع s إلى نصف قطر الدائرة. وبالرمز: $\theta = \frac{s}{r}$ حيث تقاس زاوية θ بالقياس الدائري.

- تحويل قياس الدرجة إلى القياس الدائري: اضرب في $\frac{\pi}{180}$ الزاوية.
- لتحويل القياس الدائري إلى الدرجة: اضرب في $\frac{180}{\pi}$.

• لتحويل القياس الدائري إلى الدرجة: اضرب في $\frac{180}{\pi}$.

زوايا مشتركة النهاية (ص. 234 P)

المزجات إذا كانت α قياس زاوية ما فإن جميع الزوايا التي قياسها $2\pi + \alpha$ حيث n عدد صحيح، تكون زوايا طرفية مع α .

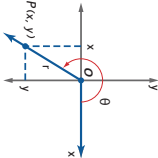
الزوايا النصفية تكون زوايا طرفية مع α .

طول القوس (ص. 235 P) إذا كانت θ هي زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها r فإنه يمكن إيجاد الأقواس المقطوعة من خلال $s = r\theta$ حيث θ تقاس بالراديان.

السرعة الخطية والسرعة الزاوية (ص. 236 P) يجب أن جسيما يتحرك بسرعة ثابتة على طول مسار دائري نصف قطره r .

- وإذا كان s هو طول القوس الذي قطعه الجسم المتحرك خلال الدورة الزاوية θ فإنه يمكن إيجاد السرعة الخطية v للجسم من خلال المعادلة $v = \frac{s}{t}$.
- وإذا كانت θ هي زاوية الدوران (بالراديان) التي من خلالها يتحرك الجسم أثناء الدورة الزاوية θ فإن السرعة الزاوية ω للجسم هي $\omega = \frac{\theta}{t}$.

المفاهيم الأساسية



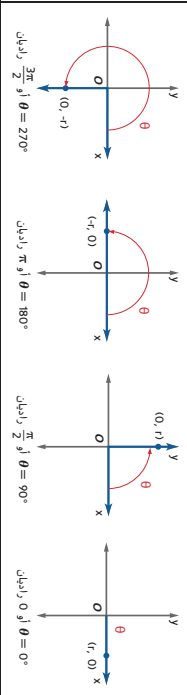
مساحة القطاع (ص. 237 P) المساحة A لقطاع من دائرة نصف قطرها r وزاوية المركزية θ هي $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ حيث θ مقاسة بالراديان.

الدوال المتقدمة في مثلث (ص. 242 P)

يفرض أن θ زاوية في مثلث فاسي وأن القطاع OP هي نقطة في الجانب الخارجي لـ θ . يفرض أن r تظل مسافة غير صفرية من P إلى نقطة الأصل. ويفرض أن $r^2 = x^2 + y^2$ إذا الدوال المتقدمة للزاوية θ هي كما يلي:

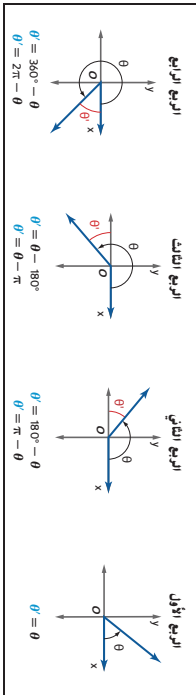
$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \neq 0 \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} \neq 0 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \neq 0 & \cot \theta &= \frac{x}{y} \neq 0\end{aligned}$$

زوايا ربعية مشتركة (ص. 243 P)



قواعد الزوايا المرجعية (ص. 244 P)

إذا كانت θ هي زاوية في موضع قياس، وزاويتها المرجعية θ' هي زاوية حادة تتكون من النصف الخارجي والحد الأدنى x لتعرف الزاوية المرجعية θ' لأي زاوية $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أو $0 < \theta < 2\pi$ على النحو التالي:

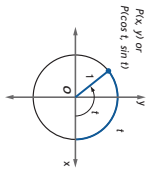


حساب قيم الدوال المتقدمة لأي زاوية (ص. 245 P)

الخطوة الأولى: أوجد الزاوية المرجعية θ' .
الخطوة الثانية: أوجد قيمة الدالة المتقدمة للزاوية θ' .
الخطوة الثالثة: استخدم الربع الذي يقع فيه النصف الخارجي لإشارة قيمة الدالة المتقدمة للزاوية θ .

الدوال المتقدمة على دائرة الوحدة (ص. 248 P)

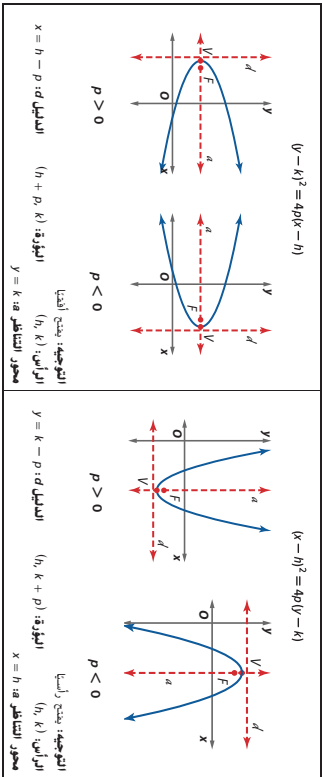
يفرض أن t هو أي رقم حقيقي على خط الأعداد. ويفرض أن t هو أي رقم حقيقي على خط الأعداد. وإذا كان t هو نقطة على دائرة الوحدة، فإن t هو نقطة على دائرة الوحدة.



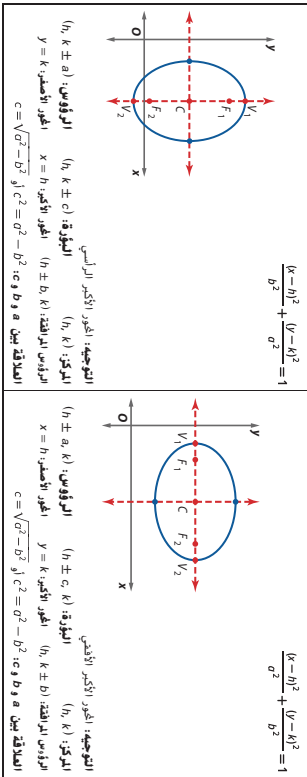
دوال دورية (ص. 250 P) دالة $f(t) = \sin t$ هي دالة دورية إذا كان بها عدد حقيقي موجب c بحيث أن $f(t + c) = f(t)$ لكل t في مجال f ، وأصغر رقم c يجعل f دالة دورية يطلق عليه فترة f .

الوحدة 6 المتطابقات المثلثية والبعدلات الوسيطة

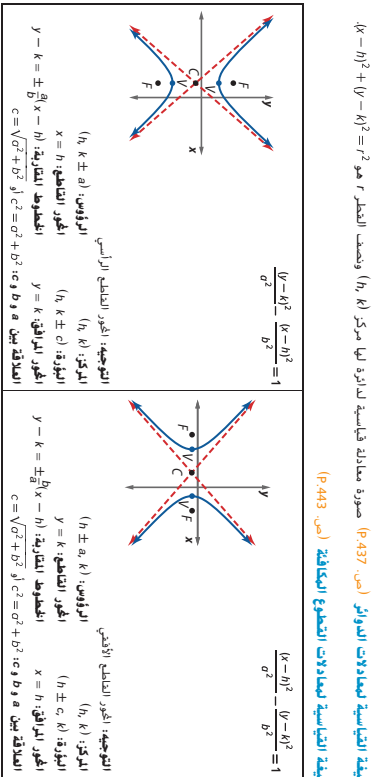
الصيغة التفاضلية لمعادلات التفاضل (ص. 423 ف)



الصيغة التفاضلية لمعادلات التفاضل (ص. 433 ف)



الصيغة التفاضلية لمعادلات التفاضل (ص. 437 ف)



مصفوفة معكوسة (ص. 378 ف) المصفوفة المقلوبة ذات الرتبة n وتشار إليها بالرمز $n \times n$ هي مصفوفة $n \times n$ وتكون من جميع قيم (1) على قطرها الرئيسي، بداية من الجانب الأيسر وصولاً إلى الجانب السفلي الأيمن. وتكون (2) لجميع العناصر الأخرى.

معكوس المصفوفة الزمنية (ص. 379 ف) يفرض أن A معكوسة $n \times n$ وإذا كانت معكوسة B بحيث $n \times n$ ، فإن $AB = BA = I_n$ ، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة $n \times n$ ، وإذا كان $A^{-1} = A^{-1}$ ، فإن $A^{-1} = A^{-1}$.

معكوس المصفوفتين ومحددتهما 2×2 (ص. 381 ف) يفرض أن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و A غير قابل للاعكاس سوى إذا كان $ad - cb \neq 0$ ، وبما أن A غير قابل للاعكاس، إذا $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. يُخلق على العدد $ad - cb$ معكوس المصفوفة 2×2 .

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

الأبوابية المصفوفة الزمنية للتبديلات (ص. 388 ف) يفرض أن A هو معكوس المصفوفة لتبديلات المعادلات الخطية n والتبديلات n الناتجة عن $AX = B$ ، حيث X هي مصفوفة المتغيرات B هي مصفوفة الثوابت. إذا كان A قابل للاعكاس، فإن نظام المعادلات ينتج حلاً فريداً من خلال $A^{-1}B$.

قاعدة كرامر (ص. 390 ف) يفرض أن A هو معكوس المصفوفة لتبديلات المعادلات الخطية n في المتغيرات n ونتج عن المعادلات $AX = B$ ، إذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن الحل الوحيد للنظام ينتج عن

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad y_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad z_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad \dots, \quad w_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

نظرية أرنولدي لإيجاد الحل الأمثل (ص. 405 ف) إذا كان يمكن إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، فإن هناك قيمة مثلى عند إحدى الرؤوس في المنطقة التي تمثل مجموعة من الحلول الممكنة.

برمجة خطية (ص. 406 ف) لإيجاد حل لمسألة برمجة خطية، اتبع الخطوات التالية:
1. رسم مثلاً بيانياً للمنطقة الممثلة لإيجاد حل لنظام المعادلات.
2. أوجد إحداثيات الرؤوس للمنطقة الممكنة.
3. أوجد قيمة دالة الهدف عند كل رأس لتحديد أي قيم x و y إن x و y هي المتغيرات.
4. واصلت في الخطوة 3.

تحليل الكسر الجزئي لـ $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ص. 401 ف)

1. إذا كانت درجة $f(x) \leq$ درجة $g(x)$ ، فاستخدم النسبة المئوية المطلوبة عديدة الحدود وحاصلات القسمة

2. إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ كسر جزئي، فإنه يتم ضرب العامل $(x-h)$ في باقي العوامل الخطية w أو العوامل التربيعية الأولية.

3. بالنسبة لكل عامل للنسبة $(x+h)^n$ في المقام، يجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من الكسور

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

4. بالنسبة لكل عامل رياضي A يوجد بعدد n من الثوابت في المقام، يجب أن يحتوي تحليل الكسر الجزئي على مجموع n من الكسور

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

5. تحليل الكسر الجزئي للدالة الأصلية يساوي مجموع $(x+h)^n$ في المقام، والكسور بالجزئين 3 و 4.

المفاهيم الأساسية

المفاهيم الأساسية

التيان والاحراف المعيارى لتوزيع الاحتمالات: (ص. 667 ف) لإيجاد تيان توزيع الاحتمالات، نطرح المتوسط الحسابى لتوزيع الاحتمالات من كل قيمة وفي مربع الفرق. بعد ذلك اضرب كل فرق في الاحتمال المقابل له وأوجد ناتج جمع نتائج الضرب. يمثل الاحراف المعيارى الجذر التربيعى للتيان.

تجربة ذات الحدين (ص. 668 ف): تمثل تجربة ذات الحدين في توزيع الاحتمالات الذى يستوفي الحالات التالية:

- تتكرر التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة n .
- لكل محاولة ناتجان مختلفان فقط، النجاح S أو الإخفاق F .
- احتمالية النجاح $P(S)$ لم p الأمر نفسه في كل محاولة، احتمالية الإخفاق $P(F)$ أو q هو $1 - p$
- يمثل المتغير العشوائى X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

صيغة احتمالية ذات الحدين (ص. 669 ف): احتمالية عدد مرات النجاح X في n من المحاولات المستقلة لاحتمالية ذات الحدين هي $P(X) = nC_x p^x q^{n-x}$ حيث يمثل p احتمالية النجاح و q احتمالية الإخفاق لمحاولة فردية.

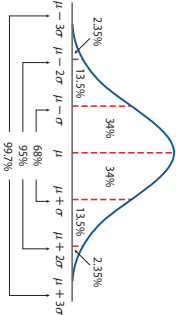
المتوسط الحسابى والاحراف المعيارى لتوزيع الاحتمالات (ص. 670 ف): يتم إيجاد المتوسط الحسابى والتيان والاحراف المعيارى لمتغير عشوائى بمرز له X ويحتوي على توزيع ذات الحدين بواسطة الصيغ التالية:

$$\begin{aligned} \mu &= np \\ \sigma^2 &= npq \\ \sigma &= \sqrt{npq} \end{aligned}$$

خصائص التوزيع الطبيعي (ص. 674 ف)

- يأخذ التمثيل البياني للمنحنى شكل الجرس ويكون متناظرا من حيث المتوسط الحسابى.
- يتساوى كل من المتوسط الحسابى والوسط والمووال ويكوون في المنتصف.
- المنحنى متصل.
- يقرب المنحنى من المحور الأفقى X لكن لا يلامسه.
- المساحة الكلية الواقعة أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100%.

قاعدة تجربة (ص. 675 ف): في التوزيع الطبيعي الذى يكون متوسطه الحسابى μ وحرافه المعيارى σ ,



- تقع نسبة 68% من قيم البيانات تقريبا بين $\sigma - \mu$ و $\sigma + \mu$
- تقع نسبة 95% من قيم البيانات تقريبا بين $2\sigma - \mu$ و $2\sigma + \mu$
- تقع نسبة 99% من قيم البيانات تقريبا بين $3\sigma - \mu$ و $3\sigma + \mu$

قاعدة قيم z (ص. 676 ف): يتم إيجاد قيمة z لقيمة البيانات في مجموعة بيانات بواسطة $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ حيث يمثل X قيمة البيانات، و μ يمثل μ المتوسط الحسابى، و σ يمثل σ الاحراف المعيارى.

خصائص التوزيع الطبيعي المعيارى (ص. 677 ف)

- تقع المساحة الكلية الواقعة أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100%.
- المساحة الكلية الواقعة أسفل المنحنى تساوي $-3 \leq z \leq 3$
- التوزيع متناظر.
- المتوسط الحسابى يساوي 0 والاحراف المعيارى يساوي 1.
- ينترب المنحنى من المحور الأفقى X لكن لا يلامسه.

- **نظرية الحد المركزي (ص. 686 ف):** كلما بوزاد حجم العينة n ، سيقترب شكل التوزيع للمتوسطات الحسابية للمجموعة ذات المجتمع الإحصائى الذى يكون متوسطه الحسابى μ وحرافه المعيارى σ من التوزيع الطبيعي.
- يستخدم التوزيع المتوسط الحسابى μ والاحراف المعيارى $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

متسلسلة القوة لجيب تمام الزاوية وجيب الزاوية (ص. 639 ف): يتم إيجاد علاقات $\sin x$ بواسطة

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \end{aligned}$$

صيغة أويلر (ص. 640 ف): بالنسبة إلى أي عدد حقيقي θ فإن $\sin \theta + i \cos \theta = e^{i\theta}$.

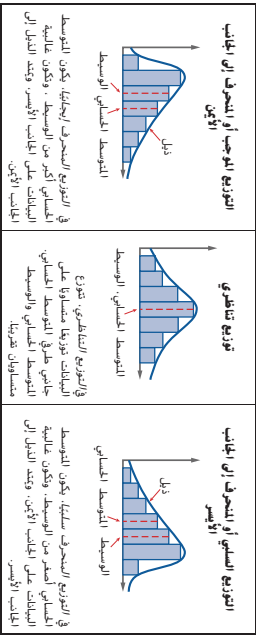
الصورة الأسية لعدد أويلر (ص. 640 ف): يتم إيجاد الصورة الأسية لعدد أولي

$$\begin{aligned} a + bi &= r e^{i\theta} \text{ حيث } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ و } \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \text{ عندما يكون } a > 0 \text{ و } \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi \text{ عندما } a < 0 \end{aligned}$$

يكون $a < 0$.

الوحدة 10 إحصاء استقرائى

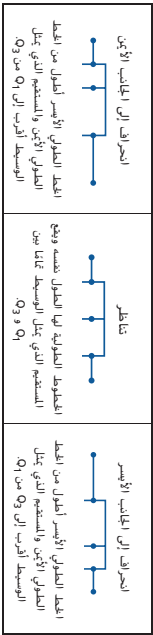
توزيعات متناظرة ومتجرفة (ص. 654 ف)



اختيار إحصاءات الميكن (ص. 654 ف): عند اختيار مياكن مركزية ومنتشارها لوصف التوزيع، فالخاص أو لا شكل التوزيع.

- إذا كان التوزيع متناظرا بطريقة متعولة وغانا من القيم المتطرفة، فاستخدم المتوسط الحسابى والاحراف الميكن.
- إذا احرف التوزيع وكان يحتوي على قيم متطرفة قوية، فاستور الميكن وفي خدمة القيمة الصغرى، الربع 1، الوسيط، الربع 3، القيمة العظمى. عادة أفضل ملخص للبيانات.

مخططات التوزيعات التناظرية والمتجرفة (ص. 657 ف)



المتغيرات العشوائية المتعددة والمتجرفة (ص. 664 ف)

- يمكن أن يكون المتغير العشوائى المتعطل عدداً لانهائياً أو يمكن عدد من القيم المختلفة داخل فترة معينة.
- يمكن أن يكون المتغير العشوائى المتعطل عدداً لانهائياً أو يمكن عدد من القيم المختلفة داخل فترة معينة.
- **توزيع الاحتمالات (ص. 665 ف):** توزيع الاحتمالات لمتغير العشوائى X عبارة عن جدول أو معادلة أو رسم بياني يربط كل قيمة محتملة لـ X مع احتمالية حدوثه. لتحديد الاحتمالات من الناحية النظرية أو عن طريق الملاحظة، يجب أن يستوفي توزيع الاحتمالات الحالات التالية.
- يجب أن تتوزع احتمالية كل قيمة لـ X بين 0 و 1، وفيه هذا أن، $0 \leq P(X) \leq 1$
- يجب أن يكون ناتج جمع جميع الاحتمالات لجميع قيم X متساوياً لـ 1، وفيه هذا أن، $\sum P(X) = 1$

المتوسط الحسابى لتوزيع الاحتمالات (ص. 666 ف): لإيجاد المتوسط الحسابى لتوزيع الاحتمالات لـ X اضرب كل قيمة لـ X في احتمال الحد له وأوجد ناتج جمع نتائج الضرب.

معادلة مستقيم الإحداث للبربعيات الخطوي (ص. ٢7١6) تتشكل معادلة مستقيم الإحداث للبربعيات الخطوي لتبسيط تسدي x وتعتبر الاستجابة y في $b + ax = z$. يتم إيجاد المساس و نقطة التقاطع y مع المحور الرأسي b في هذه المعادلة بواسطة $r^2 = 0 + ax = y - b$ حيث يمثل r معامل الصحيح بين متغيرين. \bar{x} ويمثل \bar{r} المتوسطات الحسابية لهما. ويمثل r و \bar{r} الانحرافات المعيارية لهما.

الوحدة 11 الحدود والمشتقات

استقلال الحد من قيمة الدالة عند نقطة (ص. ٢737) لا يتوقف حد الدالة $f(x)$ كلما اقرب x من النقطة c على قيمة الدالة عند النقطة c.

حدود أحادية الجانب (ص. ٢738)

الحد الأيسر إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من عدد قريب بما كلما اقرب x من النقطة c من الطرف الأيسر فإن $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$

الحد الأيمن إذا كانت القيمة $f(x)$ تقترب من عدد قريب بما كلما اقرب x من النقطة c من الجهة اليمنى فإن $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$

وجود حد عند نقطة (ص. ٢738) يوجد حد الدالة $f(x)$ كلما اقرب x من c فقط إذا كان كل من الحدين أحادي الجانب موجودين ومتساويين. وفي هذا، إذا كان $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ فإن $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

الحدود عند مدى لا نهائي (ص. ٢740)

- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من عدد قريب بما كلما ازداد x، فإن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$. ويتم قرأها لحد $f(x)$ كلما يقترب x إلى مدى لا نهائي L_1 .
- إذا كانت قيمة $f(x)$ تقترب من عدد قريب بما كلما انخفضت x، فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_2$. ويتم قرأها لحد $f(x)$ كلما يقترب x من مدى لا نهائي سلمي L_2 .

حدود الدوال التامة (ص. ٢746) يتشكل حد الدالة التامة عند أي نقطة في القيمة التامة للدالة أو $k = \lim_{x \rightarrow k} f(x)$

حدود دالة التطاق (ص. ٢746) يتشكل حد دالة التطاق عند أي نقطة c في c أو $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

خصائص الحدود (ص. ٢746) إذا كان k وc عددين حقيقيين، و $f(x)$ و $g(x)$ صحيحا موجبا $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ووجود كل من $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ فإن ما يلي يحد صحيحا.

- خاصية ناتج الجمع** $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- خاصية الفرق** $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- خاصية الضرب القياسي** $\lim_{x \rightarrow c} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- خاصية ناتج الضرب** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \times \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- خاصية ناتج القسمة** $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
- خاصية القوة** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)^n] = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$
- خاصية الجذر nth** $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ عندما يكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ عددا زوجيا.

حدود الدوال كثيرة الحدود (ص. ٢748) إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة الحدود وc عددا حقيقيا، فإن $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$

حدود الدوال النسبية (ص. ٢748) إذا كانت $f(x)$ دالة نسبية وc عددا حقيقيا، فإن $\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$ إذا كان $q(c) \neq 0$

حدود الدوال الأسية عند مدى لا نهائي (ص. ٢750) بالنسبة إلى أي عدد صحيح موجب n.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عددا زوجيا.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عددا فرديا.

القيمة z للمتوسط الحسابي للبيئة (ص. ٢686) يتم إيجاد القيمة z للمتوسط الحسابي للبيئة في مجتمع إحصائي بواسطة $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ حيث يمثل \bar{x} المتوسط الحسابي للبيئة، ويمثل μ المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي ويمثل σ فرق التباين المعياري.

قاعدة التوزيع لتوزيعات ذات الحدين (ص. ٢689) يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذات الحدين عندما يكون $np \geq 5$ و $nq \geq 5$

التقريب الطبيعي لتوزيع ذات الحدين (ص. ٢690) يتم إجراء التقريب الطبيعي لتوزيع ذات الحدين على النحو التالي:

- الخطوة 1** أوجد المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ .
- الخطوة 2** اكتب المسألة في ترميز الاحتمالات باستخدام X.
- الخطوة 3** أوجد عامل تصحيح الأسيان، لأنه كتابة المسألة لإيجاد المساحة المتأصلة الواقعة أسفل التوزيع الطبيعي.
- الخطوة 4** أوجد قيم z المتأصلة لـ X.
- الخطوة 5** استخدم جالبة التمثيل البياني لإيجاد المساحة المتأصلة.

القيمة العظمى لخطأ الحساب (ص. ٢697) يتم إيجاد القيمة العظمى لخطأ حساب E للمتوسط الحسابي

للجنتي الإحصائي μ بواسطة $E = z \times \sigma/\sqrt{n}$

أو $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث تمثل z قيمة حرجة متأصلة لمستوى ثقة معين، و σ/\sqrt{n} هو الانحراف المعياري للمتوسطات الحسابية للبيئة. عندما يكون $n \geq 30$ ، قد يتم التوزيع عن الانحراف المعياري بـ σ .

فترة الثقة للمتوسط الحسابي (ص. ٢697) يتم إيجاد فترة الثقة CI للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ بواسطة $CI = \bar{x} \pm E$ أو $CI = \bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، حيث يمثل \bar{x} المتوسط الحسابي للبيئة ويمثل E القيمة العظمى لخطأ الحساب.

خصائص التوزيع t (ص. ٢699)

- يأخذ التوزيع شكل الجرس ولكن متناظرا حول المتوسط الحسابي.
- يساوي كل من المتوسط الحسابي والوسيط والموال 0 ويقعون في منتصف التوزيع.
- لا يلامس المحور الأفقي x.
- يكون الانحراف المعياري أكبر من 1.
- التوزيع هو مجموعة من الاحتمالات التي تشتت إلى حجم البيئة n.
- كلما ازداد n، اقرب التوزيع من الانحراف الطبيعي المعياري.

فترة الثقة باستخدام التوزيع t (ص. ٢699) يتم إيجاد فترة الثقة CI للتوزيع t بواسطة $CI = \bar{x} \pm t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$ حيث يمثل \bar{x} عينة المتوسط الحسابي، و t من درجات الحرية، ويمثل s الانحراف المعياري للبيئة. ويمثل $\frac{s}{\sqrt{n}}$ القيمة الحرجة باستخدام $n - 1$ من درجات الحرية. ويمثل $\frac{s}{\sqrt{n}}$ القيمة العظمى لخطأ الحساب.

القيمة الصغرى لبيئة حجم العينة (ص. ٢701) يتم إيجاد القيمة الصغرى لحجم البيئة المطلوب عند إيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي بواسطة $n = \left(\frac{zE}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right)^2$

خطوات اختيار البرهنية (ص. ٢707)

- الخطوة 1** اذكر الفرضيات وحدد المتالبة.
- الخطوة 2** حدد القيمة (القيم) الحرجة والمنطقة.
- خطوة 3** احسب إحصائيات الاختبار.
- الخطوة 4** ارفض فرضية العدم أو تقبل عليها.

معامل التصحيح (ص. ٢٧٢) بالنسبة إلى n من أنواع بيانات البيئة للمتغيرين x و y، يتم إيجاد معامل التصحيح r بين x و y.

و $r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$

حيث يمثل \bar{x} و \bar{y} القيم العظمى لتوزيع x من البيانات، و \bar{r} المتوسطات الحسابية للمتغيرين. ويمثل r و \bar{r} الانحرافات المعيارية للمتغيرين.

قاعدة اختبار t لمعامل التصحيح (ص. ٢7٢5) بالنسبة إلى اختبار t للمعامل الذي يقع بين متغيرين، تمثل إحصائيات الاختبار لـ r معامل تصحيح البيئة r ويتم إيجاد إحصائيات الاختبار المخصصة t بواسطة $t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ حيث يمثل $n - 2$ درجات الحرية.

المعادلات الجبرية

حدود السؤال كثيرة الحدود عند **لا نهاية** (ص: 751) لتعريف أن P دالة كثيرة الحدود
 $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n = \infty$ إذا كان $a_n > 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ إذا كان $a_n < 0$
حدود الدالة العكسية عند **لا نهاية** (ص: 751) يتصل حد الدالة العكسية عند **لا نهاية** موجب أو سالب في 0 أو ∞ أو $-\infty$

معدل التغير اللحظي (ص: 758) يتصل معدل التغير اللحظي للرسم البياني $f(x)$ عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ في زاوية انحدار m خط التماس الذي يتم إنجاده بواسطة $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ بشرط وجود الحد
السرعة المتوسطة (ص: 760) إذا تم إعطاء الوسيط في صورة دالة الزمن $f(t)$ ففي نقطتين في الزمن t_1 و t_2 فسيتم إيجاد السرعة المتوسطة v بواسطة $v = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ فسيتم تعريف $v_{avg} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ فسيتم تعريف $v_{avg} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$
السرعة اللحظية (ص: 760) إذا كانت المسألة التي نبحثها جسم ما في صورة دالة الزمن $f(t)$ فإنه يتم إيجاد السرعة اللحظية $v(t)$ عند الزمن t بواسطة $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ فسيتم تعريف $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$

قاعدة لوبيتال في المشتقات (ص: 767) تكون لوبيتال x الموجود في المشتق $\frac{f(x)}{g(x)}$ في الحالة الأصلية في الحالة الأصلية، ومقابل لوبيتال x في المشتق هو نفسه مقابل لوبيتال x في الحالة الأصلية.
قواعد المشتقات (ص: 767)

اللاتيات مشتق الدالة الناتجة هو صفر، إذا كان c ، فإن $f(x) = c$ ، فإن $f'(x) = 0$
التعدد للثابت لتابعة الأس إذا كان c ، فإن $f(x) = c x^n$ ، فإن $f'(x) = n c x^{n-1}$
تأثير الجمع والتأثير إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

نظرية القيم المتوسطة (ص: 769) إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن $f(x)$ يغطي بكل من النهاية العظمى والمتوسطة والنهاية الصغرى المتصلة على $[a, b]$.

قاعدة ناتج الضرب في المشتقات (ص: 770) إذا كان f و g فالتين لاشتقاق عند x ، فإن $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

قاعدة ناتج النسبة في المشتقات (ص: 771) إذا كان f و g فالتين لاشتقاق عند x و $g(x) \neq 0$ ، فإن $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

تكامل محدود (ص: 777) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى البياني لدالة هي $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$

أن تقع h و g على القيم الصغرى والقيم العظمى على التوالي، $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و $x_i^* = a + (i-1)\Delta x$ ، تعريف هذه الطريقة بأنها تمثل مجموع ريمان الأيمن.

قواعد المشتقات العكسية (ص: 785)

قاعدة الأس إذا كان $x^n = f(x)$ ، حيث n عدداً نسبياً فحسباً عن $C + \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ ، فإن $f'(x) = n x^{n-1}$
التعدد للثابت لتابعة الأس إذا كان $f(x) = k x^n$ ، حيث n عدداً نسبياً فحسباً عن -1 و k ثابتاً، فإن $f'(x) = n k x^{n-1}$
تأثير الجمع والتأثير إذا كانت المشتقات العكسية لـ $f(x)$ و $g(x)$ هي $G(x)$ و $G(x)$ ، فإن $f(x) \pm g(x)$ يتصل المشتق العكسي لـ $f(x) \pm g(x)$ في $G(x) \pm G(x)$

تكامل غير محدود (ص: 785) يحدد التكامل غير البياني لـ $f(x)$ بواسطة $C + \int_a^x f(x) dx = F(x)$ ، حيث $F(x)$ متصلة عكسياً لـ $f(x)$ و C ثابت.

النظرية الوظيفية لحساب التفاضل والتكامل (ص: 786) إذا كان f متصلة على $[a, b]$ وكان $f(x)$ يمثل متصفاً عكسياً لـ $f(x)$ ، فإن $f(x) = f(b) - \int_0^b f(x) dx$ ، فسيتم تعريف $f(x) = f(b) - \int_0^b f(x) dx$ بشكل متتابع بواسطة $f(x) = f(b) - \int_0^b f(x) dx$

الإجابات والحلول المختارة

تمثل بالرمز إلى Hotmath.com حيث توفر مكاناً لحفظ نسخة من الحل لمجموعة التدريبات المرتبطة بـ:

ص: 8 الدرس 0-2

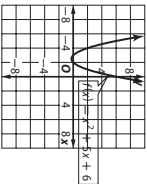
1. -1 3. 1 - i 5. i 7. 2i 9. -1 + 8i 11. -1.5 + 2i
13. 3.5 + 10.4i 15. 3 17. 9 + 2i ohms 19. -15 + 8i
21. 8 + 6i 23. 34 25. 85 27. $\frac{2}{5} + \frac{3}{4}i$

29

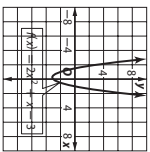
شطب النظام بصيغ البسط والمقام في المرافق i و $-i$.

$\frac{3-2i}{-4+i} = \frac{(3-2i)(-4-i)}{(-4-i)(-4+i)} = \frac{-12-3i+8i-2i^2}{16-(-1)} = \frac{-12+5i-2(-1)}{16+1} = \frac{-10+11i}{17}$
31. $\frac{23}{26} - \frac{11}{26}i$ 33. $\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)i$
35. $-13 - 34i$ volts 37. 28 + 57i volts 39. $\pm 4i$ 41. $\pm 2\sqrt{3}i$
43. $\pm 13i$ 45. 2.5 47. 3. -4 49. 6. 4 51. 12 - 31i
53. 20 + 15i

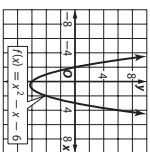
ص: 13 الدرس 3-0



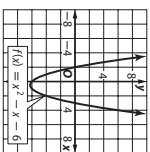
1.



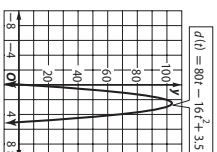
3.



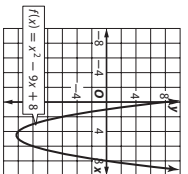
5.



7.



9.





القاموس / Glossary

English	الربنية
<p>absolute value function A function that contains an absolute value of the independent variable, with parent function $f(x) = x$.</p> <p>absolute value of a complex number A complex number's distance from zero in the complex plane.</p> <p>algebraic function A function with values that are obtained by adding, subtracting, multiplying, or dividing constants and the independent variable or raising the independent variable to a rational power.</p> <p>alternative hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is a difference between the sample value and the population parameter. The alternative hypothesis contains a statement of inequality such as $>$, \neq, or $<$.</p> <p>ambiguous case Given the measures of two sides and a nonincluded angle, either no triangle exists, exactly one triangle exists, or two triangles exist.</p> <p>amplitude Half the distance between the maximum and minimum values of a sinusoidal function. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, amplitude $= a$.</p> <p>anchor step In mathematical induction, showing that something works for the first case, or that P_1 is true.</p> <p>angle of depression The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object below.</p>	<p>دالة القيمة المطلقة دالة تحتوي على قيمة مطلقة لمغير مستقل. باستخدام الدالة الأصلية $x = f(x)$.</p> <p>قيمة مطلقة لعدد مركب بُعد العدد المركب عن الصفر في المستوى المركب.</p> <p>دالة جبرية دالة تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع التوابت والمغير المستقل أو طرحها أو قسمتها أو رفع المغير المستقل إلى قوى نسبية.</p> <p>فرضية بديلة فرضية من اثنتين تُظهر ضرورة إثبات صحة الفرض ما، وتُبنى على وجود فرق بين قيمة العبارة وعملية الحساب. تحتوي الفرضية البديلة على عبارة المساواة مثل أكبر من أو لا يساوي أو أقل من.</p> <p>حالة مبهمة بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير محصورة، فقد لا يوجد أي مثلث أو قد يوجد مثلث واحد أو قد يوجد مثلثان.</p> <p>سعة تمثل نصف المسافة الواقعة بين القيم العظمى والصغرى في دالة التوجع الجيبى. بما أن $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$ إذا السعة $= a$.</p> <p>خطوة المركز في الاستنتاج الرياضى، يُظهر أن شيئاً ما يعمل على حل المسألة الأولى، أو أن P_1 صحيح.</p> <p>زاوية الانخفاض الزاوية المكونة بواسطة مستقيم أفقى ومستقيم الزاوية الحاص باللاحظ للوصول إلى موضع أدناه.</p> <p>Glossary/القاموس G-02</p>

McGraw-Hill Education
 محفوظة لصالح مؤسسة
 والتأليف ©
 الطبع
 حقوق

binomial distribution A graph of a distribution of data that has two modes.

binomial coefficients The coefficients of the terms of an expanded binomial $(a + b)^n$.

binomial distribution The distribution of the outcomes of a binomial experiment and their corresponding probabilities.

binomial experiment A probability experiment in which there are a fixed number of independent trials, there are exactly two possible outcomes for each trial, and the probability of success is the same for each trial.

binomial probability distribution function A discrete function of the random variable X , represented in the binomial probability formula.

Binomial Theorem For any positive integer n , $(a + b)^n = nC_0 a^n b^0 + nC_1 a^{n-1} b^1 + nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + nC_r a^{n-r} b^r + \dots + C_n a^0 b^n$, where $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

bivariate data Data with two variables.

cardioid The graph of a polar equation of the form $r = a \pm a \cos \theta$ or $r = a \pm a \sin \theta$, where a is positive.

center of an ellipse The midpoint of the major and minor axes of an ellipse.

circular function A trigonometric function defined as a function of the real number system using the unit circle.

class A data value or group of data values.

class width The range of values for each class of data.

clusters Subgroups of data.

coefficient matrix A matrix that contains only the coefficients of a system of linear equations.

column matrix A matrix that has only one column.

combination An arrangement of objects in which order is not important.

common difference The difference between successive terms of an arithmetic sequence.

common logarithm A logarithm with base 10, usually written $\log x$.

توزيع ثنائي النموال رسم بياني يمثل توزيع البيانات ذات النموالين.

معاملات ذات الحدين تمثل معاملات حدود ثنائية الحدود الممتدة $(a + b)^n$.

توزيع ذات الحدين توزيع نتائج تجربة ذات الحدين وخصائصها المتطرفة.

تجربة ذات الحدين تجربة احتمالية يوجد بها عدد ثابت من التجارب المستقلة، ويوجد اثنان من النتائج المحتملة لكل تجربة، وحاصل النجاح هو نفسه لكل تجربة.

دالة توزيع احتمالي ذو حدين دالة متصلة للمتغير العشوائي X . ممثلة بصيغة احتمال ذو حدين.

نظرية ذات الحدين بيان أن أي عدد صحيح موجب يساوي n ، فإن $(a+b)^n = nC_0 a^n b^0 + nC_1 a^{n-1} b^1 + nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + nC_r a^{n-r} b^r + \dots + C_n a^0 b^n$ ، حيث $r = 0, 1, 2, \dots, n$.

بيانات ذات متغيرين بيانات تحتوي على متغيرين.

قالب الشكل تمثيل بياني لمعادلة قطبية من الشكل $r = a \pm a \cos \theta$ أو $r = a \pm a \sin \theta$ ، حيث يكون a عددا موجبة.

مركز القطع الناقص نقطة المنتصف في المحاورين الأكبر والأصغر للطبق الناقص.

دالة دائرية دالة مثلثية تعرف بأنها دالة في نظام الأعداد الحقيقي باستخدام دائرة الوحدة.

صف قيمة بيانات أو مجموعة من قيم البيانات.

عمر صف الصف مجموعة من القيم المحددة لكل صف من البيانات.

تجميعات مجموعات فرعية من البيانات.

مصفوفة المعاملات مصفوفة تحتوي فقط على معاملات نظام المعادلات الخطية.

مصفوفة عمودية مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط.

ترافيق تنظيم الأجسام بطريقة لا يكون الترتيب فيها فيها.

فرق مشترك الفرق بين الحدود المتتالية للحسابية.

لوغاريتم مشترك لوغاريتم يستخدم الأساس 10، ويكون اللوغاريتم المكتوب عادة بالشكل $\log x$.

Glossary/القاموس

angle of elevation The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object above.

angular speed The rate at which the object rotates about a fixed point.

antiderivative $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ if $F'(x) = f(x)$.

arccosine function The inverse cosine function, written as $y = \cos^{-1} x$ or $y = \arccos x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $[0, \pi]$.

arcsine function The inverse sine function, written as $y = \sin^{-1} x$ or $y = \arcsin x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

arctangent function, written as $y = \tan^{-1} x$ or $y = \arctan x$, that has a domain of $(-\infty, \infty)$ and a range of $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Argand Plane The complex plane.

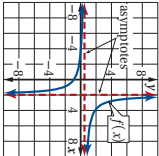
argument The angle θ of a complex number written in the form $r \cos \theta + i \sin \theta$.

arithmetic means The terms between two nonconsecutive terms of an arithmetic sequence.

arithmetic series The sum of the terms of an arithmetic sequence.

arithmetic sequence A sequence in which the difference between successive terms is a constant.

asymptote A line or curve that a graph approaches.



augmented matrix A matrix that contains the coefficients and constant terms of a system of linear equations, each written in standard form with the constant terms to the right of the equals sign.

average rate of change The slope of the line through any two points on the graph of a nonlinear function f .

axis of symmetry A line about which a figure is symmetric. In a parabola, the axis of symmetry is perpendicular to the directrix and passes through the focus.

Glossary/القاموس

زاوية الارتفاع الزاوية المكونة بواسطة مستقيم أفقي ومستقيم الزاوية الخاص بالألاحظ للوصول إلى موضع إعلال.

سرعة زاوية تمثل المعدل الذي بدور عنده الجسم حول نقطة ثابتة.

عكس المشتقة $F(x)$ هو عكس المشتقة لـ $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$.

دالة قوس جيب التمام تمثل معكوس دالة جيب التمام، وتكتب بالشكل $y = \cos^{-1} x$ أو $y = \arccos x$ ، ولها مجال يساوي $[-1, 1]$ ومدى يساوي $[0, \pi]$.

دالة قوس الجيب تمثل معكوس دالة جيب الزاوية، وتكتب بالشكل $y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$ ، ولها مجال يساوي $[-1, 1]$ ومدى يساوي $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

دالة قوس الظل تمثل معكوس دالة الظل، وتكتب بالشكل $y = \tan^{-1} x$ أو $y = \arctan x$ ، ولها مجال يساوي $(-\infty, \infty)$ ومدى يساوي $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

مستوى آر جاند يقصد به المستوى المركب.

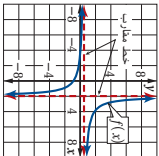
بند زاوي يقصد به الزاوية θ المحددة لعدد مركب بالشكل $r \cos \theta + i \sin \theta$.

أوساط حسابية الحدود بين حدين غير متتالين في متتالية حسابية.

متسلسلة حسابية مجموع حدود متتالية حسابية.

متتالية حسابية متتالية تتميز ببيانات الاختلاف بين الحدود المتتالية.

مستقيم مقارب مستقيم أو منحنى يقترب منه التمثيل البياني.



مصفوفة مربعة مصفوفة تحتوي على المعادلات والحدود الثابتة لنظام معادلات خطية وتكتب كل منها في الصورة الحسابية باستخدام الحدود القياسية الموجودة على الجانب الأيمن وإشارة التساوي.

متوسط معدل التغير ميل المستقيم الذي يمر عبر نقطتين على التمثيل البياني لدالة غير خطية f .

محور التماثل مستقيم يكون الشكل من حوله متماثل في الطع. في parabola، المحور التماثل متعامدا على الدليل ويمر عبر البؤرة، الكافئ، يكون محور التماثل متعامدا على الدليل ويمر عبر البؤرة.

Glossary/القاموس

<p>constant A system of equations that has at least one solution.</p> <p>constant Describes a function f for an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a zero change in $f(x)$.</p> <p>constant function A function of the form $f(x) = c$, where c is any real number.</p> <p>constraints Conditions given to variables in a two-dimensional linear programming problem, often expressed as a system of linear inequalities.</p> <p>continuity correction factor A correction for continuity that must be used when approximating a binomial distribution.</p> <p>continuous compound interest Interest that is reinvested continuously so that there is no waiting period between interest payments.</p> <p>continuous function A function that can be graphed with no breaks, holes, or gaps.</p> <p>continuous random variable A random variable that can take on an infinite number of possible values within a specified interval in a probability experiment.</p> <p>converge If a sequence has a limit such that the terms approach a unique number, it is said to converge.</p> <p>correlation An area of inferential statistics that involves determining whether a relationship exists between two variables.</p> <p>correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data.</p> <p>cosecant In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side opposite of θ. It is the reciprocal of the sine ratio, or $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$.</p> <p>cosine In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the side opposite θ. It is the reciprocal of the tangent ratio, or $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.</p> <p>cotangent In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the side opposite θ. It is the reciprocal of the tangent ratio, or $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.</p> <p>coterminal angles Angles in standard position that have the same initial and terminal sides, but different measures.</p>	<p>متوافق نظام معادلات له حل واحد على الأقل.</p> <p>ثابت يوضح الدالة f أو فترة في دالة يؤدي فيها التعبير الموجب في x إلى تعكس إلى تعبير موجب في $f(x)$.</p> <p>دالة ثابتة دالة تأخذ الصورة $f(x) = c$، حيث يمثل c أي عدد حقيقي.</p> <p>قيود الشروط الشروط المطروحة على المتغيرات في مسألة برمجة خطية. ثنائية الأبعاد والتي غالباً ما يتم التعبير عنها باسم المتباينات الخطية.</p> <p>معامل تصحيح الاتصال تصحيح للاتصال يجب استخدامه عند تقريب التوزيع ذو الحدين.</p> <p>قائمة مركبة متصلة قائمة يعاد وظيفتها باستمرار لكيلا يكون هناك أي فترة انتظار بين دفعات القائمة.</p> <p>دالة متصلة دالة يمكن رسمها بيانياً بدون فواصل أو لحظات أو فراغات.</p> <p>متغير عشوائي متصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عدداً لا نهائياً من القيم المحتملة ضمن فترة محددة في تجربة الاحتمال.</p> <p>متقاربة إذا كان للمتالية مدى ينتج عنه اقتراب الحدود من عدد واحد فإنه يطلق عليه تقارب.</p> <p>ارتباط نطاق من الأحكام الاستقرائي يضمن تحديد العلاقة الموجودة بين متغيرين.</p> <p>معامل الارتباط قياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقيمتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين.</p> <p>قاطع الجان في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، يمثل نسبة المقابلة بين طول الوتر والضلع المجاور للزاوية θ، ويكون معكوساً لنسبة ظل تمام الزاوية.</p> <p>جيب الجان في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، يمثل نسبة المقابلة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والوتر.</p> <p>ظل الجان في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، يمثل نسبة المقابلة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ، ويكون معكوساً لنسبة ظل تمام الزاوية.</p> <p>زاوية مشتركة في ضلع الإزتياء، زوايا في الوضع العكسي لها أضلاع الإزتياء وإزتياء نفسها، لكنها ذات قياسات مختلفة.</p>	<p>common ratio The ratio of successive terms of a geometric sequence.</p> <p>complement The complement of an event A consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event A.</p> <p>completing the square A process used to make a quadratic expression into a perfect square trinomial.</p> <p>complex conjugates Two complex numbers of the form $a + bi$ and $a - bi$, where $b \neq 0$.</p> <p>complex plane A plane used to graph complex numbers. The real component of a complex number is graphed on the horizontal and the imaginary component is graphed on the vertical axis.</p> <p>complex number Any number that can be written in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.</p> <p>component form A vector represented by its rectangular components. If the initial point of a vector is $A(x_1, y_1)$ and the terminal point is at $B(x_2, y_2)$, the component form is given by $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.</p>	<p>نسبة مشتركة نسبة الحدود المتتالية في المتتالية الهندسية.</p> <p>متمم يمكن متم الحدث A من جميع النواتج في فضاء العينة والتي تكون غير متضمنة في نواتج الحدث A.</p> <p>إكمال المربع عملية تُستخدم لتحويل الترميز التربيعي إلى مربع كامل ثلاثي الحدود.</p> <p>مراقبان مركبان عددان عددان مركبان بأخذان الصورة $a + bi$ و $a - bi$، حيث $b \neq 0$.</p> <p>مستوى مركب مستوى يستخدم في تمثيل الأعداد المركبة بيانياً. يتم تمثيل المركب الحقيقي بعدد مركب بيانياً على المستوى الأفقي ويتم تمثيل المركب التخيلي على المحور الرأسي.</p> <p>عدد مركب أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$، حيث a و b عددان حقيقيان ويمثل i الوحدة التخيلية.</p> <p>صورة مركبة نتيجة نطه مركباته قائمة الزاوية بما أن نقطة بداية النجته هي $A(x_1, y_1)$ والنقطة الطرفية عند $B(x_2, y_2)$، إذا، يتم الوصول إلى صورة المركب باستخدام $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.</p>	<p>تركيبة الدوال تجميع الدوال باستخدام تابع دالة واحدة لتقدير دالة أخرى. تُحدد مجموعة الدوال المركبة f مع الدالة g باستخدام $[f \circ g](x) = f(g(x))$.</p> <p>فترة الثقة تقدير محدد للفترة في عملية تجربة ما يمكن إيجادها عند إضافة أقصى خطأ للتقدير إلى المتوسط الحسابي للعينة وطرحه منه.</p> <p>مستوى الثقة احتمال يحد بأن تقدير الفترة سيضمن معلنة فعلية للمجتمع الإحصائي.</p> <p>قطع مخروطي شكل يمكن أن يكون عندما يقطع المستوى مخروطاً قائماً مودوفاً، ويسمى أيضًا مخروطاً.</p> <p>محور مراق الخطعة المستقيمة المتعامدة على المحور المائل في القطع الزايف، وهم غير المتصحف، ويبلغ طوله $2b$ من الوحدات.</p> <p>نظرية الجذر المرافق عندما يكون لمعادلة كثيرة حدود في متغير واحد صفرًا على الصورة $a + bi$، حيث $b \neq 0$ فإن المرافق المركب لها، $a - bi$، يكون جذراً كذلك.</p>
--	---	---	--	--

definite integral An integral that has lower and upper bounds, given by $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

degenerate conic A point, a line, or two intersecting lines that are formed when a plane intersects the vertex of a double-napped right cone.

degrees of freedom (d.f.) Represent the number of values that are free to vary after a sample statistic is determined, and are equal to $n - 1$ in a sample of n values.

dependent When a system of linear equations has an infinite number of solutions.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

dependent variable In a function, the variable, usually y , that represents any value in the range.

depressed polynomial The quotient when a polynomial is divided by one of its binomial factors $x - c$.

derivative The derivative of the function $f(x)$ is the function

$$f'(x) \text{ given by } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Descartes' Rule of Signs A rule that gives information about the number of positive and negative real zeros of a polynomial function by looking at a polynomial's variations in sign.

determinant If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ the determinant of A , written $\det(A)$ or $|A|$, is the difference of the product of the two diagonals of the matrix, or $ad - cb$, if $B = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$, then $|B| = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & f \\ g & h \end{vmatrix}$.

difference quotient Given a secant line through the points $(x, f(x))$ and $(x + h, f(x + h))$, the difference quotient is the slope of the line, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

differential equation The result when finding the derivative of a function.

differential operator An operator such as $\frac{d}{dx}$, which specifies the action of taking the derivative of a function.

differentiation The process of finding the derivative of a function.

dilation A transformation in which the graph of a function is compressed or expanded vertically or horizontally.

تكامل محدد تكامل له حدود دنيا وعليا محددة بواسطة $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$.

مخروط متدهج نقطة أو مستقيم أو مستقيمان متقاطعان تم تشكيل أي منها عند قطع المستوى لسطح مخروط دائري مزدوج.

درجات الحرية (d.f.) تفضل عدد القيم التي يمكن تغييرها بعد تحديد إحصاء معينة، ويكون مساوية لـ $n - 1$ في عينة القيم n .

غير مستقل / تابع عندما يحوي نظام المعادلات الخطية على عدد لا نهائي من الحلول.

إحداثيات غير مستقلة إحداثان أو أكثر يؤثر نتيجة أحدهما في نتيجة الآخر.

متغير غير مستقل / تابع في الدالة، يكون المتغير، عادة y ، الذي يمثل أي قيمة في المجال.

كثيرة حدود متخفضة ناتج القسمة عندما يتم قسمة كثيرة الحدود على أحد عوامله ثابتة الحد $x - c$.

مشتقة مشتقة الدالة $f(x)$ هي الدالة $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

قاعدة "ديكارت" للإشارات قاعدة توفر معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص إشارة التوقعات لكثير الحدود.

محدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن محدد A ، يكتب $\det(A)$ أو $|A|$ ، هو فرق ناتج ضرب قطري المصفوفة، أو $ad - cb$ ، إذا كان $B = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$ فإن $|B| = \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & f \\ g & h \end{vmatrix}$.

ناتج قسمة الفرق باعطاء المستقيم الناطق من خلال النقاط $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ فإن ناتج قسمة الفرق هو ميل المستقيم، $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

ناتج قسمة الفرق النتيجة عند حساب مشتقة إحدى الدوال.

مشتق الفرق مشتق مثل $\frac{d}{dx}$ ، والذي يحدد إجراء اتخاذ مشتقة لإحدى الدوال.

تناقص عملية التغير على مشتقة إحدى الدوال.

تغيير الأبعاد / التمدد عملية تحويل يضغط فيها التمثيل البياني لدالة ما أو يحدد رأسيًا أو أفقيًا.

Glossary / القاموس G-08

co-vertices The endpoints of the minor axis of an ellipse.

Cramer's Rule A method that uses determinants to solve square systems of linear equations.

critical values The x -values that correspond to a particular confidence level.

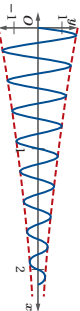
cross product If $a = a_1i + a_2j + a_3k$ and $b = b_1i + b_2j + b_3k$, the cross product of a and b is the vector $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

cubic function A function of the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^3$.

cumulative frequency The sum of a frequency and all frequencies of previous classes.

cumulative relative frequency The ratio of the cumulative frequency of the class to all the data

damped harmonic motion The motion of an object whose amplitude decreases with time due to friction.



damped oscillation The reduction in amplitude of a sinusoidal wave of a damped trigonometric function.

damped trigonometric function The function formed when a sinusoidal function $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ is multiplied by another function $y = f(x)$. A function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$.

damped wave A wave whose amplitude decreases, such as the graph of a damped trigonometric function.

damping factor In a damped trigonometric function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$, $f(x)$ is the damping factor.

decreasing Describes a function f over an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a negative change in $f(x)$.

دؤوس مرافقة نقاط النهاية للمحور الأصغر لقطع ناقص.

قاعدة كرامر طريقة تستخدم المحددات لحل نظام المعادلات الخطية.

قيم حرجية نيل القيم z التي تتطابق مع مستوى الثقة المحدد.

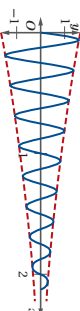
الضرب المتناظري ما أن $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$ ، الضرب المتناظري لـ a و b الناتجة $a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$.

دالة تكعيبية دالة ناتجة الصيغة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، حيث $a \neq 0$ ، باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^3$.

تكرار تراكمي مجموع التكرار وكل تكرارات البيانات السابقة.

تكرار نسبي تراكمي نسبة التكرار التراكمي للنسبة إلى جميع البيانات

الحركة التوافقية المتخافتة حركة جسم ما تنخفض سعته مع مرور الوقت بسبب الاحتكاك.



تذبذب متخاضل انخفاض في سعة الموجة الجيبية لدالة مثلثية متخافتة.

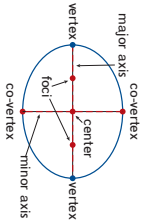
دالة مثلثية متخافتة دالة تنتج من ضرب دالة الموج الجيبية $y = \sin bx$ أو $y = \cos bx$ في دالة أخرى $y = f(x)$. دالة تأخذ الصيغة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$.

موجة متخافتة موجة تنخفض سعتها مثل التمثيل البياني للدالة المثلثية المتخافتة.

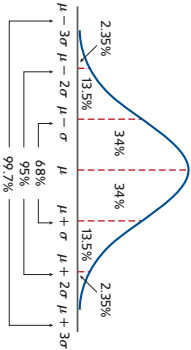
عامل التضاؤل في الدالة المثلثية المتخافتة التي تأخذ الصيغة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$ عامل التضاؤل.

تناقص يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها تغيير موجب في x في انخفاض إلى تغيير سالب في $f(x)$.

Glossary / القاموس G-07



empirical rule Describes areas under the normal curve over intervals that are one, two, and three standard deviations from either side of the mean. About 68% of the values are within one standard deviation of the mean, 95% are within two standard deviations from the mean, and 99.7% are within three standard deviations of the mean.



empty set A set with no elements, symbolized by { } or ∅.

end behavior Describes what happens to the value of $f(x)$ as x increases or decreases without bound.

equal matrices Two matrices that have the same dimensions and each element of one matrix is equal to the corresponding element of the other matrix.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

Euler's Formula For any real number θ , $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

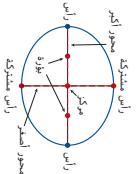
even function A function that is symmetric with respect to the y -axis.

expected value The mean of the random variable in a probability distribution.

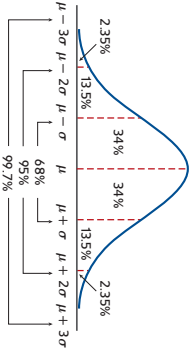
experiment A situation involving chance or probability that leads to specific outcomes.

explanatory variable The independent variable x in bivariate data.

exponential function A function of the form $f(x) = ab^x$, where x is any real number and a and b are real number constants such that $a \neq 0$, b is positive, and $b \neq 1$.



قاعدة تجريبية يوضح المناطق أسفل المنحني الطبيعي على فترات مثل: الحرافا معياريا واحدا أو الحرافاين أو ثلاثة الحرافا من جانب المتوسط الحسابي. يكون نسبة 68% من القيم ضمن حدود الحرافا معياريا واحد للمتوسط الحسابي، بينما تكون نسبة 95% ضمن حدود الحرافاين معياريين من المتوسط الحسابي، ونسبة 99.7% ضمن حدود ثلاثة الحرافاين معيارية للمتوسط الحسابي.



مجموعة خالية هي مجموعة لا تحتوي على عناصر، ويرمز لها بالرمز { } أو ∅.

سلوك طرفي يوضح ما الذي يحدث للقيمة $f(x)$ عندما يزيد x أو ينخفض بدون حد.

مصفوفات متساوية عبارة عن مصفوفتين لهما الأبعاد نفسها وكل عنصر في إحدى المصفوفتين يساوي العنصر المناظر في المصفوفة الأخرى.

متجهات متكافئة هي متجهات لها نفس المقدار والاتجاه.

صيغة أويلر بالنسبة إلى أي عدد حقيقي θ , $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

دالة زوجية دالة متماثلة من حيث محور الصادات.

قيمة التوقع عبارة عن المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي في توزيع الاحتمال.

تجربة عبارة عن موقف ما يتضمن فرصة أو احتمالية تؤدي إلى نتائج محددة.

المتغير التفسيري هو المتغير المستقل x في البيانات ذات المتغيرين.

دالة أسية هي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ab^x$ حيث x أي عدد حقيقي، $a \neq 0$ ، b ثابتان بحيث $b \neq 0$ ، b موجب، و $a \neq 1$.

Glossary/التاموس G-10

dimensions A description of the number of rows and columns of a matrix.

direction The directed angle between the vector and the horizontal line that could be used to represent the positive x -axis.

directrix A specific line from which all points on a parabola are equidistant.

direct substitution A method of evaluating the limit of a polynomial or rational function $f(x)$ as x approaches c by finding $f(c)$.

discontinuous function A function that is not continuous.

discrete random variable A random variable that can take on a finite number of possible values in a probability experiment.

diverge If a sequence does not have a limit, it is said to diverge.

dot product The dot product of vectors $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ is defined as $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

eccentricity A measure that determines how "circular" or "stretched" an ellipse will be. For anyellipse, $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ or $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ where $c^2 = a^2 - b^2$, the eccentricity $e = \frac{c}{a}$.

element 1. Each object or number in a set Z . Each entry in a matrix.

elementary row operations The operations shown below are used to transform an augmented matrix into an equivalent matrix.

- Interchange any two rows.
- Multiply one row by a nonzero real number.
- Add a multiple of one row to another row.

elimination method Eliminate one of the variables in a system of equations by adding or subtracting the equations.

ellipse The locus of points in a plane such that the sum of the distances from two fixed points, called foci, is constant.

Glossary/التاموس G-09

أبعاد وصف عدد الصفوف والأعمدة الموجودة في مصفوفة.

اتجاه الزاوية الموجبة بين الاتجاه والمستقيم الأفقي والتي يمكن استخدامها لتمثيل المحور الأفقي x الموجب.

دليل مستقيم يحدد بُعد عنه جميع النقاط على المنحني الكافلي بأكملها متساوياً.

تبدل مباشر أسلوب لتقييم نهاية كثيرة الحدود أو الدالة التناسبية $f(x)$ بينما تقرب x من c غير إيجاد $f(c)$.

دالة متقطعة دالة غير متصلة.

متغير ثابت متفصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عدداً متغيراً من القيم المحتملة في تجربة الاحتمال.

متباينة إذا لم نتحقق المتباينة على حد، يطلق عليها اسم "متباينة".

الضرب النقطي/التناسبي هو ناتج ضرب المتجهات $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ ويحدد $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

E

الإختلاف المركزي مقياس يحدد كيف سيكون المنحني الكافلي "دائرياً" أو "ممتداً". بالنسبة إلى أي قطع ناقص، $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، الاختلاف $e = \frac{c}{a}$.

العنصر 1. يمثل كل كائن أو عدد في مجموعة. كل مدخل في مصفوفة.

عمليات المصفوف الأولية تُستخدم العمليات التي تظهر أدناه في تحويل مصفوفة مربعة إلى مصفوفة مكالفة.

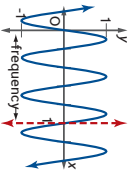
- تبديل أي صفين.
- ضرب صف واحد في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف صف واحد على صف آخر.

طريقة الحذف هي طريقة يتم فيها حذف واحد من المتغيرات في نظام المعادلات عن طريق جميع المعادلات أو طرحها.

قطع ناقص عبارة عن محل هندسي لمنحني للقطع في سطح مستوي بحيث يكون مجموع أبعاده عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوى، يطلق عليها البؤرتان، ثابتاً.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لمصالح مؤسسة

Glossary /
القاموس



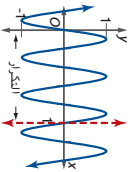
frequency distribution A table used to organize data by groups, classes or intervals.

function A relation that assigns to each element in the domain exactly one element in the range

function notation An equation of y in terms of x can be rewritten so that $y = f(x)$. For example, $y = 4x$ can be written as $f(x) = 4x$.

Fundamental Theorem of Algebra A polynomial function of degree n , where $n > 0$, has at least one zero (real or imaginary) in the complex number system.

Fundamental Theorem of Calculus If f is continuous on $[a, b]$ and $F(x)$ is any antiderivative of $f(x)$, then $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$.



توزيع تكراري هو جدول يُستخدم في تنظيم البيانات حسب المجموعات أو الفئات أو الفترات

دالة علاقة قائمة على تعيين عنصر واحد في المدى لكل عنصر في المجال.

رمز الدالة معادلة y في صورة x يمكن إعادة كتابتها بحيث $y = f(x)$. على سبيل المثال، يمكن كتابة $y = 4x$ على أنها $f(x) = 4x$.

نظرية الجبر الأساسية عبارة عن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n ، حيث n أكبر من 0، ويحتوي على صفر واحد على الأقل حقيقي أو تخيلي في نظام الأعداد المركبة.

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل إذا كان f متصلًا على $[a, b]$ هاكأن $F(x)$ أي عكس المشتقة للدالة $f(x)$ فإن $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$

Gaussian elimination Using the operations below to transform a system of linear equations into an equivalent system.

- Interchange any two equations.
- Multiply one of the equations by a nonzero real number.
- Add a multiple of one equation to another equation.

Gauss-Jordan Elimination Solving a system of linear equations by transforming an augmented matrix so that it is in reduced row-echelon form.

geometric means The terms between two nonconsecutive terms of a geometric sequence.

geometric sequence A sequence in which the ratio between successive terms is a constant

geometric series The sum of the terms of a geometric sequence.

greatest integer function Has the parent function $f(x) = [x]$, which is defined as the greatest integer less than or equal to x

حذف جاوس يتم باستخدام العمليات المذكورة أدناه لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ.

- ضرب إحدى المعادلات في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف معادلة واحدة على معادلة أخرى.

إخزرائز جاوس-جوردان طريقة لحل نظام المعادلات الخطية بحولها إلى مصفوفة موسعة بحيث تكون في نموذج الصف المخفض.

أوساط هندسية الحدود بين حددين غير متتاليين في متتالية هندسية.

متتالية هندسية متتالية تشير بيانات النسبة بين الحدود المتتالية.

متسلسلة هندسية مجموع حدود المتتالية الهندسية.

دالة أكبر عدد صحيح تحتوي على الدالة الأصلية $f(x) = [x]$ ، والتي تحدد على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه.

Glossary/القاموس G-12

exponential series The power series that approximates e^x as $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

extended principle of mathematical induction Instead of verifying that P_n is true for $n = 1$, as in the principle of mathematical induction, instead verify that P_n is true for the first possible case.

extraneous solution A solution that does not satisfy the original equation.

extrapolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions far outside the range of the x -values that were used to obtain the regression line.

extrema The maximum and minimum values of a function.

factorial If n is a positive integer, then $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

feasible solutions The set of possible solutions of a system of inequalities in a linear programming problem, which are points of the form (x, y) .

Fibonacci sequence A sequence in which the first two terms are 1 and each of the additional terms is the sum of the two previous terms.

finite sequence A sequence that has a finite number of terms.

finite series The sum of the first n terms of a finite or infinite sequence.

first differences Values obtained by subtracting each term in a sequence from its successive term.

five-number summary A statistic that includes the minimum value, lower quartile, median, upper quartile, and the maximum value of a data set.

foci Two fixed points used to define an ellipse or hyperbola. *See ellipse and hyperbola.*

focus *See parabola, ellipse, hyperbola.*

frequency For a sinusoidal function, the number of cycles the function completes in a one unit interval. The frequency is the reciprocal of the period. For $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$, frequency = $\frac{1}{\text{period}}$ or $\frac{|b|}{2\pi}$.

Glossary/القاموس G-11

متسلسلة أسية عبارة عن متسلسلة الأس التي تقرب من e^x حيث $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

المبدأ الممتد للاستنتاج الرياضي بدلاً من التحقق من أن P_n صحيح لـ $n = 1$ كما في مبدأ الاستنتاج الرياضي، تحقق من أن P_n صحيح للحالة الأولى المحتملة.

حل دخيل حل لا يحقق المعادلة الأصلية.

استكمال خارجي استخدام معادلة مستقيم الانحدار ذات المربعات الأقل لتحليل التنبؤات بعيدة عن مدى النم x المستخدمة في الحصول على مستقيم الانحدار.

قيم قصوى القيم والقيم أو القيم العظمى والصغرى لدالة معينة.

مضروب إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

حلول ممكنة مجموعة من الحلول الممكنة لنظام التباين في مسألة برمجية خطية، والتي هي نقاط من المنطقة (x, y) .

متتالية فيبوناتشي متتالية يكون أول حدين فيها 1 ويكون كل حد من الحدود التالية مساويًا لمجموع الحدين السابقين.

متتالية نهائية متتالية لها عدد منته من الحدود.

متسلسلة نهائية مجموع أول n من الحدود المتتالية النهائية أو اللانهائية.

فروق أولى القيم المحسوبة بواسطة طرح كل حد في متتالية من الحد التالي له.

ملخص الأعداد الخمسة إحصاء يتضمن القيمة الدنيا والرابع الأدنى والوسط والرابع الأعلى والقيمة القصوى لمجموعة بيانات.

نُقط بؤري عبارة عن نقاط ثابتة تستخدم في تحديد قطع ناقص أو قطع زائد. راجع **القطع الناقص والقطع الزائد**.

بؤرة راجع **القطع الناقص والقطع الزائد**.

تكرار بالنسبة إلى الدالة الجيبية، يمثل عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة الوحدة الواحدة. التكرار هو معكوس التردد. بالنسبة إلى $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$ ، التكرار = $\frac{1}{\text{الفترة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$.

Glossary/القاموس G-11

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة لصالح © والتأليف والطبع حقوق

<p>implied domain In a function with an unspecified domain, the set of all real numbers for which the expression used to define the function is real.</p> <p>inconsistent A system of equations that has no solutions.</p> <p>increasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a positive change in $f(x)$.</p> <p>indefinite integral The indefinite integral of $f(x)$ is defined by $\int f(x)dx = F(x) + C$, where $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ and C is any constant.</p> <p>independent When a system of linear equations has exactly one solution.</p> <p>independent events Events that do not affect each other.</p> <p>independent variable In a function, the variable, usually x, that represents any value in the domain.</p> <p>indeterminate form An expression obtained when evaluating a limit that does not give enough information to determine the original limit.</p> <p>inductive hypothesis In mathematical induction, assuming that something works for any particular case, or that assuming that P_k is true.</p> <p>inductive step In mathematical induction, showing that something works for the case after P_k or showing that P_{k+1} is true.</p> <p>inferential statistics A sample of data is analyzed and conclusions are made about the entire population.</p> <p>infinite discontinuity A characteristic of a function in which the absolute value of the function increases or decreases indefinitely as x-values approach c from the left and right.</p> <p>infinite sequence A sequence that has infinitely many terms.</p> <p>infinite series The sum of the terms of an infinite sequence.</p> <p>influential An individual data point that substantially changes a regression line.</p> <p>initial point The starting point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the tail of the vector.</p> <p>initial side The starting position of a ray when forming an angle.</p> <p>instantaneous rate of change For the graph of $f(x)$, the slope m of the line tangent at the point $(x, f(x))$ given by $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, provided the limit exists.</p> <p>instantaneous velocity The velocity achieved at a specific point in time.</p> <p>integration The process of evaluating an integral.</p>	<p>تكون مجال مضمين في إحدى الدوال ذات المجال غير المحدد. تكون مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يستخدم التعبير لها من أجل تحديد الدالة حقيقية.</p> <p>معادلات غير متوافقة نظام معادلات ليس له حلول.</p> <p>تزايد يوضح الدالة f أو فقرة في دالة ما يؤدي فيها التعبير الموجب في x لأي شخصين إلى تغيير موجب في $f(x)$.</p> <p>تكامل غير محدود هو تكامل غير محدود للدالة $f(x)$ يعرف بواسطة $F(x) + C = \int f(x)dx$ حيث $F(x)$ هو عكس المشتقة لـ $f(x)$، C هو أي ثابت.</p> <p>مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على حل واحد فقط.</p> <p>أحداث مستقلة أحداث ليس لها تأثير على بعضها.</p> <p>متغير مستقل في الدالة، هو التعبير x الذي يمثل أي قيمة في المجال.</p> <p>نموذج تفهم تعبير يظهر عند تفهم حد لا يعطي معلومات كافية لتحديد الحد الأصلي.</p> <p>فرضية الاستنتاج في الاستنتاج الرياضي، هي الافتراض بأن P_k صحيح، يعمل على حل أي مسألة معينة أو الافتراض بأن P_{k+1} صحيح.</p> <p>خطوة استقرائية في الاستقراء الرياضي، تظهر أن شيئاً ما يعمل على حل المسألة بعد P_k أو تظهر أن P_{k+1} صحيح.</p> <p>إحصاء استقرائي عبارة عن عينة من البيانات يجري تحليلها واستخلاص الاستنتاجات حول المجتمع الإحصائي بأكملها.</p> <p>انحلال لانهائي ميزة تتميز بها دالة ما تزداد فيها القيمة المطلقة للدالة أو تنخفض إلى ما لا نهاية عندما تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.</p> <p>متتالية لا نهائية متتالية بها عدد لا نهائي من الحدود.</p> <p>متشابهة لا نهائية مجموع الحدود لمتتالية لا نهائية.</p> <p>فقال نقطة بيانات فردية تغير من مستقيم الانحدار تقريباً جوهرياً.</p> <p>نقطة البداية هي نقطة البداية لنسجه يتم تشكيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجبة. تسمى أيضاً باسم ذيل المتجه.</p> <p>ضلع الإبتداء موقع بدء الشعاع عند تكوين زاوية ما.</p> <p>معدل التغير اللحظي للتبيل التام $f(x)$، هو الميل m لمستقيم التماس عند النقطة $(x, f(x))$ محدد بواسطة $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ بشرط وجود النهاية.</p> <p>سرعة لحظية هي السرعة الناتجة عند لحظة زمنية محددة.</p> <p>تكامل عملية حساب تكامل ما.</p> <p>G-14 التاموس/ Glossary</p>
<p>H</p> <p>Heron's Formula If $\triangle ABC$ has side lengths a, b, and c, then the area of the triangle is $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.</p> <p>holes Removable discontinuities on the graph of a function that occur when the numerator and denominator of the function have common factors. The holes occur at the zeros of the common factors.</p> <p>horizontal asymptote The line $y = c$ is a horizontal asymptote of the graph of f if $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.</p> <p>hyperbola The set of all points in a plane such that the absolute value of the differences of the distances from two foci is constant.</p>	<p>قاعدة هرون إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a, b, c، فإن مساحة المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.</p> <p>فجوات عبارة عن انقطاعات قابلة للإزالة على التمثيل البياني لدالة وحدثت عندما يحتوي بسط الدالة ومقامها على عوامل مشتركة. تحدث الفجوات في أصغر العوامل المشتركة.</p> <p>مستقيم معيار أفقي بعد المستقيم $y = c$ مستقيماً معياراً أفقياً في التمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$.</p> <p>قطع زائد مجموعة كل النقاط في المستوى بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين الواضعتين من بؤرتين ثابتة.</p>
<p>I</p> <p>hypothesis test Assesses evidence provided by data about a claim concerning a population parameter.</p> <p>identity An equation in which the left side is equal to the right side for all values of the variable for which both sides are defined.</p> <p>identity function The function $f(x) = x$, which passes through all points with coordinates (a, a).</p> <p>identity matrix The identity matrix of order n, I_n, is an $n \times n$ matrix consisting of all 1s on its main diagonal, from upper left to lower right, and 0s for all other elements. If A is an $n \times n$ matrix, then $A I_n = I_n A = A$.</p> <p>imaginary axis The vertical axis of a complex plane on which the imaginary component of a complex number is graphed.</p> <p>imaginary number Another name for a complex number of the form $a + bi$, when $b \neq 0$.</p> <p>imaginary part In an imaginary number $a + bi$, b is the imaginary part.</p> <p>imaginary unit i, or the principal square root of -1.</p>	<p>اختبار الفرضية يعمل على تقييم الأدلة المقدمة من البيانات حول الفرض متعلق بمعلنة المجتمع الإحصائي.</p> <p>معادلات معادلة يكون فيها الطرف الأيسر مساوياً للطرف الأيمن فيما يخص جميع قيم المتغير الذي يتم تحديد كل من الطرفين عن طريقه.</p> <p>الدالة المحايدة الدالة $f(x) = x$ التي تمر عبر كل النقاط باستخدام الإحداثيات (a, a).</p> <p>مصفوفة محايدة مصفوفة مربعة تحل البرية n, I_n، وهي مصفوفة $n \times n$ تتألف من جميع وحدات 1 على قطرها الرئيسي، بخلاف من الجانب العلوي الأيسر وصولاً إلى الجانب السفلي الأيمن. ولهم 0 لجميع العناصر الأخرى. إذا كان A عبارة عن مصفوفة $n \times n$ فإن $A I_n = I_n A = A$.</p> <p>محور تخيلي هو المحور الرأسى لمستوى مركب ينقل عليه المركب التخيلي لعدد مركب بيتانياً.</p> <p>عدد تخيلي اسم آخر لعدد المركب يظهر بالشكل $a + bi$ عندما تكون $b \neq 0$.</p> <p>جزء تخيلي في العدد التخيلي $a + bi$، يمثل a الجزء الحقيقي ووحدة تخيلية i، أو الجذر التربيعي الأساسي لـ -1.</p> <p>G-13 التاموس/ Glossary</p>



Glossary / القاموس

L

latus rectum The line segment that passes through the focus of a parabola, is perpendicular to the axis of symmetry, and has endpoints on the parabola.

Law of Cosines If $\triangle ABC$ has side lengths a , b , and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A , B , and C , respectively. Then the following are true.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$

Law of Sines If $\triangle ABC$ has side lengths a , b , and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A , B , and C , respectively, then $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

leading coefficient In a polynomial function, the coefficient of the variable with the greatest exponent.

leading term test Uses the power and coefficient of the leading term of a polynomial to determine the end behavior of a polynomial function.

least-squares regression line The line for which the sum of the squares of the residuals is at a minimum.

left-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu < k$.

level of significance The maximum allowable probability of committing a Type I error, denoted α .

lemniscates The graph of a polar equation of the form $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ or $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

limacon The graph of a polar equation of the form $r = a \pm b \cos \theta$ or $r = a \pm b \sin \theta$, where a and b are both positive.

limit The unique value that a function approaches as x -values of the function approach c from the left and right sides.

linear combination The sum of two vectors, each multiplied by a scalar, that is used to represent a vector with a given initial point and terminal point.

Linear Factorization Theorem If $f(x)$ is a polynomial function of degree $n > 0$, then f has exactly n linear factors and $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$, where a_n is some nonzero real number and c_1, c_2, \dots, c_n are the complex zeros (including repeated zeros) of f .

وتر ثلاثي عمودي هو الوتر الذي يمتد من القطب المركزي للمنحنى على محور التناظر، وله نقطه نهايه على المحاك المثلثي.

قانون جيب التمام إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a, b, c تمثل أطوال الأضلاع المتنايله للزاوية ذات القياسات A, B, C ، على التوالي، فإن، ما يلي صحيح:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$

قانون الجيب إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a, b, c مع شغل أطوال الأضلاع الواجبه للزاوية ذات القياس A, B, C ، على التوالي، فإن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

معامل رئيسي في الدالة كثيرة الحدود، يكون هو معامل المتغير ذو الأس الأكبر.

اختيار حد رئيسي يستخدم قوي وتقبل الحد الرئيسي للدالة كثيرة الحدود لتحديد السلوك النهائي لأي دالة كثيرة الحدود.

مستقيم الحدار ذو مربعات أقل المستقيم الذي يكون مجموع مربعات القيم المتبقية له أقل ما يمكن.

اختيار البديل المتجه إلى اليسار يختص به اختبار فرضية إذا كان $H_a: \mu < k$.

مستوى الدلالة الحد الأقصى المسموح به لاحتيايه ارتكاب خطأ من النوع الأول، ويرمز له بـ α .

منحنى ذو عروقتين التمثيل البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

منحنى قوس الشكل التمثيل البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r = a \pm b \cos \theta$ أو $r = a \pm b \sin \theta$ ، حيث يكون a و b عددين موجبين.

النهاية القيمة الوحيدة التي تقترب منها دالة حيث تقترب قيم x للدالة من c من الجانب الأيسر والجانب الأيمن.

توزيع خطي مجموع متجهين يتم ضرب كل منهما في كمية عديدة تستخدم لتمثيل متجه ما ينحني بداية ونهاية محددين.

نظرية تحليل العوامل الخطية إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثيرة حدود من الدرجة n حيث n أكبر من 0، إذا f لديها n من العوامل الخطية بالخصه و $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$ حيث a_n هي عدد حقيقي غير صمري و c_1, c_2, \dots, c_n هي الأضمار المركبة (إذا في ذلك الأضمار المكررة) لـ f .

interpolation To use the equation of the least-squares regression line to make predictions over the range of the data.

interquartile range The range of the middle half of a set of data. It is the difference between the upper quartile and the lower quartile.

intersection The intersection of sets A and B is all elements found in both A and B , written as $A \cap B$.

interval A data value or group of data values.

interval estimate A range of values used to estimate an unknown population parameter.

interval notation An expression that uses inequalities to describe subsets of real numbers.

inverse Let A be an $n \times n$ matrix. If there exists a matrix B such that $AB = BA = I_n$, then B is called the inverse of A and is written as A^{-1} .

inverse cosine If θ is an acute angle and $\cos \theta = x$, then the inverse cosine of x , or $\cos^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse function Two functions f and f^{-1} are inverse functions if and only if $f(f^{-1}(x)) = x$ for every x in the domain of $f^{-1}(x)$, and $f^{-1}(f(x)) = x$ for every x in the domain of $f(x)$.

inverse matrix The multiplicative inverse of a square matrix. The product of a matrix A and its inverse A^{-1} must equal the identity matrix I_n .

inverse relation Two relations are inverse relations if and only if one relation contains the element (b, a) whenever the other relation contains the element (a, b) .

inverse sine If θ is an acute angle and $\sin \theta = x$, then the inverse sine of x , or $\sin^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse tangent If θ is an acute angle and $\tan \theta = x$, then the inverse tangent of x , or $\tan^{-1} x$, is the measure of angle θ .

inverse trigonometric function The inverse sine of x or $\sin^{-1} x$, the inverse cosine of x or $\cos^{-1} x$, and the inverse tangent of x or $\tan^{-1} x$.

invertible matrix A matrix that has an inverse.

irreducible over the reals A quadratic expression that has real coefficients but no real zeros associated with it.

J

jump discontinuity A characteristic of a function in which the function has two distinct limit values as x -values approach c from the left and right.

استكمال داخلي يختص به لتستخدم معادلة مستقيم الحدار ذات المربعات الأقل لوضع التوقعات على مدى البيانات.

مدى زمني يمثل مدى النصف الأوسط من مجموعة بيانات، وهو الفرق بين الربع الأعلى والربع الأدنى.

تقاطع تقاطع المجموعتين A و B ، ويشمل كل العناصر الموجودة في كل من A و B ، وتكتب بالشكل $A \cap B$.

فترة قيمة البيانات أو مجموعة من قيمة البيانات.

تقدير الفترة عبارة عن مجموعة من القيم المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع الإحصائية للمجموعة.

توزيع الفترة تغيير يستخدم البيانات لوصف المجموعات المرعبة للأعداد الحقيقية.

معكوس يفرض أن A يمثل المصفوفة $n \times n$ ، إذا كانت هناك مصفوفة B بحيث $AB = BA = I_n$ ، فعدن B يسمى معكوساً لـ A وتكتب بالشكل A^{-1} .

معكوس الجيب إذا كانت θ زاوية حادة و $\cos \theta = x$ ، فعدن $\cos^{-1} x$ هو قياس الزاوية θ .

دالة عكسية عبارة عن دالتين f^{-1} و f يمثلان دالتين عكسيتين فقط إذا كان $x = f(f^{-1}(x)) = x$ لكل x في مجال $f(x)$.

مصفوفة عكسية هي المعكوس العكسي للمصفوفة ثر بعبة، يجب أن يكون ناتج ضرب المصفوفة A ومعكوسها A^{-1} مساوية للمصفوفة المحايدة I_n .

علاقة عكسية تكون العلاقات عكسيتين فقط إذا كانت إحداهما تحتوي على العنصر (a, b) ، والآخرى تحتوي على العنصر (b, a) .

معكوس الجيب إذا كانت θ زاوية حادة وكان $\sin \theta = x$ ، فعدن $\sin^{-1} x$ هو قياس الزاوية θ .

معكوس ظل الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة و $\tan \theta = x$ ، فعدن $\tan^{-1} x$ هو قياس الزاوية θ .

دالة عكسية معكوس الجيب لـ x أو $\sin^{-1} x$ ، بينما معكوس جيب التمام لـ x أو $\cos^{-1} x$ ، ومعكوس ظل الزاوية لـ x أو $\tan^{-1} x$.

مصفوفة قابلة للعكس هي مصفوفة لها معكوس.

جذور حقيقية غير قابلة للتبسيط تغيير تربيعي يحتوي على معاملات حقيقية لكن بدون أضمار حقيقية مقلدة به.

عدم الاتصال القوي ميزة تشبه بها الدالة وتحتوي فيها على قمتي حدود متميزتين عندما تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

<p>mean The sum of numbers in a set of data divided by the number of items in the data set.</p> <p>measure of central tendency A number that represents the center or middle of a set of data.</p> <p>measures of spread (or variation) A representation of how spread out or scattered a set of data is.</p> <p>median The middle number in a set of data when the data are arranged in numerical order. If the data set has an even number, the median is the mean of the two middle numbers.</p> <p>midline A horizontal axis that is the reference line about which the graph of a sinusoidal function oscillates.</p>	<p>متوسط حسابي مجموع الأعداد في مجموعة البيانات مقسوماً على عدد عناصر المجموعة.</p> <p>مقاييس النزعة المركزية العدد الذي يمثل مركز مجموعة البيانات أو متوسطها.</p> <p>مقاييس الانتشار (أو التباين) تمثيل لمدى انتشار مجموعة البيانات أو تباينها.</p> <p>وسيط العدد الأوسط في مجموعة البيانات عند ترتيب البيانات ترتيباً عددياً، وإذا كانت البيانات ذات عدد زوجي، فالأوسط هو متوسط العددين الأوسطين.</p> <p>خط متوسط محور أفقي يمثل خطاً مرجحياً يجذب حول التمثيل البياني للدالة الجيبية.</p>
	
<p>minimum For a function f, the least value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from decreasing to increasing.</p> <p>minor axis The segment through the center of an ellipse that is perpendicular to the major axis and has endpoints on the ellipse.</p> <p>mode The number(s) that appear most often in a set of data.</p> <p>modulus The absolute value of a complex number, the number r when a complex number is written in the form $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.</p> <p>monomial function A function that can be written as $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero constant real numbers.</p> <p>multiple optimal solutions Solutions that occur when the graph of the equation related to the objective function f to be optimized is coincident with one side of the region of feasible solutions.</p> <p>multiplicity If $(x - c)^m$ is the highest power of $(x - c)$ that is a factor of polynomial function f, then c is a zero of multiplicity m of f, where m is a natural number.</p> <p>multivariable linear system A system of linear equations in two or more variables, also called a <i>multivariate</i> linear system.</p> <p>natural base The irrational number e, which is approximately equal to 2.718281828....</p>	<p>نهاية صغرى بالنسبة إلى دالة f، أدنى القيمة الصغرى لـ $f(x)$. نقطة حرجية مثالية على التمثيل البياني للدالة ما يتغير فيها المنحني من التناقص إلى الزيادة.</p> <p>محور أصغر القطعة المستقيمة الواقعة من منتصف القطع الناقص والتي تتقاطع مع المحور الأكبر ولديها نقط نهاية على النقط الناقص.</p> <p>مذوال العدد (الأعداد) الأكثر تكراراً في مجموعة من البيانات.</p> <p>معامل القيمة المطلقة لعدد مركب، يساوي العدد r عند كتابة عدد مركب في الصورة $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.</p> <p>دالة أحادية البعد الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x) = ax^n$ أو $f(x) = ae^{nx}$، حيث a، حيث n عدنان حقيقيان ثابتان غير صفرين.</p> <p>حلل مثلث متعدد التحلل التي تحدث عندما يكون التمثيل البياني للدالة المرتبط بدالة الهدف f التي سيتم تحسينها متطابقاً مع جانب واحد من منطقة الحلول الممكنة.</p> <p>تحدد إذا كان $(x - c)^m$ يمثل أعلى قوة لـ $(x - c)$ الذي هو عامل للدالة كثيرة الحدود f، فإن c صفر محلو m مرة للدالة f، حيث m عدد طبيعي.</p> <p>نظام حلل متعدد المتغيرات نظام يمثل المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر، ويطلق عليه أيضاً النظام الخطي متعدد الدلائل.</p> <p>أساس طبيعي عدد غير نسبي يرمز له بالرمز e، ويساوي قيمته حوالي 2.718281828....</p> <p>G-18 Glossary/القاموس</p>
<p>linearize Transform data so that they appear to cluster about a line by applying a function to one or both of the variables in the data set.</p> <p>linear programming The process of finding a minimum or maximum value of a linear function for a region defined by linear inequalities.</p> <p>linear speed The rate at which an object moves along a circular path.</p> <p>line of best fit A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a <i>regression line</i>.</p> <p>line symmetry Describes graphs that can be folded along a line so that the two halves match exactly.</p> <p>locus A set of all points that fulfill a geometric property.</p> <p>logarithm In the function $x = b^y$, y is called the logarithm, base b, of x. Usually written as $y = \log_b x$ and is read <i>log base b of x</i>.</p> <p>logarithmic function with base b A function of the form $y = \log_b x$, where $b > 0$, $b \neq 1$, and $x > 0$, which is the inverse of the exponential function of the form $b^y = x$.</p> <p>logistic growth function A function that models exponential growth with limiting factors. Logistic growth functions are bounded by horizontal asymptotes $y = 0$ and $y = c$, where c is the limit to growth.</p> <p>lower bound A real number a that is less than or equal to the least real zero of a polynomial function.</p> <p>lower limit The lower bound of a definite integral.</p>	<p>تليويزر التحويل في صورة خطية لتحويل البيانات بحيث تظهر إلى تجمع يتلاق بمنحنى معين عن طريق تطبيق دالة على أحد المتغيرين في مجموعة البيانات أو كليهما.</p> <p>برمجة خطية عملية إيجاد القيم العظمى أو الصغرى للدالة الخطية للمنطقة محددة على المتباينات الخطية.</p> <p>سرعة خطية المعدل الذي يتحرك عنده جسم ما على امتداد مسار دائري.</p> <p>منحنى أفضل تنبؤ مستقيم مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير المتغير الاستجابة y كلما تغير المتغير التفسيري x، ويطلق عليه أيضاً منحنى الانحدار.</p> <p>تناظر محوري يوضح التماثلات البائية التي يمكن رسمياً بشكل منحني على مستقيم معين بحيث يتطابق نصف التمثيل تماماً.</p> <p>محل هندسي مجموعة من كل النقاط التي تحقق خاصية هندسية.</p> <p>لوغاريتم في الدالة $x = b^y$، y تسمى اللوغاريتم، b هي الأساس، لـ x، وعادة ما يكتب $y = \log_b x$ ويقرأ اللوغاريتم b من x.</p> <p>دالة لوغاريتمية ذات الأساس b دالة من الصيغة $y = \log_b x$، حيث $b > 0$ و $b \neq 1$ و $x > 0$، الذي يكون معكوس الدالة الأسية للصيغة $b^y = x$.</p> <p>دالة النمو اللوجستي دالة تمثل النمو الأسّي بمعامل محدد، وتتحدد دوال النمو اللوجستية بخطوط مقاربة أفقية $y = 0$ و $y = c$، حيث c هي حد النمو.</p> <p>حد أدنى عدد حقيقي أقل من أو يساوي أقل صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.</p> <p>حد أدنى الحد الأدنى لتكامل محدد.</p>
<p>magnitude The length of the directed line segment that represents the vector.</p> <p>major axis The segment that contains the foci of an ellipse and has endpoints on the ellipse.</p> <p>matrix Any rectangular array of variables or constants in horizontal rows and vertical columns.</p> <p>maximum For a function f, the greatest value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from increasing to decreasing.</p> <p>maximum error of estimate The maximum difference between the point estimate and the actual value of the parameter in an experiment.</p> <p>G-17 Glossary/القاموس</p>	<p>مقدار طول القطعة المستقيمة الموجبة التي تمثل النتيجة.</p> <p>محور أكبر القطعة التي تتضمن بؤرتي القطع الناقص ولديها نقاط نهاية عليه.</p> <p>مصفوفة أي مصفوفة مستطيلة للمتغيرات أو الثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية.</p> <p>نهاية عظمى بالنسبة إلى الدالة f، القيمة العظمى لـ $f(x)$. نقطة حرجية مثالية على التمثيل البياني للدالة ما يتغير فيها المنحني وينتج من الزايد إلى التناقص.</p> <p>أقصى خطأ لتقدير أقصى قيمة للفرق بين تقدير المنطقة والقيمة الفعلية للمنطقة في تجربة ما.</p>

one-sided limit The limit L_1 of $f(x)$ as x approaches c from the left or the limit L_2 of $f(x)$ as x approaches c from the right.

one-to-one 1. A function in which no x -value is matched with more than one y -value and no y -value is matched with more than one x -value. 2. A function whose inverse is a function.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

optimization The process of finding a minimum or maximum value for a specific quantity, usually to minimize costs in order to maximize profits in business.

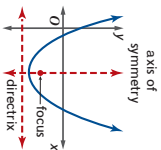
ordered triple Coordinates of the location of a point in space given by real numbers (x, y, z) .

orientation Plotting points of parametric equations in the order of increasing values of t traces the curve in a specific direction of the curve.

orthogonal Two vectors with a dot product of 0.

outliers Data that are more than 15 times the interquartile range beyond the upper and lower quartiles.

parabola The locus of points in a plane that are equidistant from a fixed point, called the focus, and a specific line, called the directrix.



parallelepiped A polyhedron with faces that are all parallelograms.

parallelogram method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tail of another. A parallelogram is drawn and the diagonal is the resultant vector.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction, but not necessarily the same magnitude.

parameter 1. Arbitrary values, usually time or angle measurement, used in parametric equations. 2. A measure that describes a characteristic of a population.

النهاية من طرف واحد الحد L_1 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من الشمال أو الحد L_2 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من اليمين.

واحد لواحد 1. عبارة عن دالة لا تتطابق فيها قيمة المتحور x مع أكثر من قيمة على المتحور y ولا تتطابق فيها قيمة المتحور y مع أكثر من قيمة على المتحور x . 2. دالة لا يكون معكوسها متباينة دالة.

متجهات معاكسة متجهات لها المقدار نفسه لكنها متضادة الاتجاه.

بحث عن الحل الأمثل عملية إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لكمية معينة. وغالبًا ما يكون ذلك لتطبيق التكاليف إلى أدنى حد بهدف زيادة الأرباح إلى أقصى حد في الشركة.

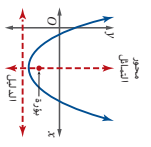
مجموعة مرتبة ثلاثية المتناسخ عبارة عن إحداثيات لموقع نقطة ما في المساحة المحددة بواسطة الأعداد الحقيقية (x, y, z) .

ترتيب رسم نقاط المعادلات الوسيطة في ترتيب قيم t المتزايدة بحيث المتجه في اتجاه معين من المتجه.

متعامد عبارة عن متجهين يكون ناتج الضرب النقطي أو الضاسي لهما 0.

قيم متطرفة بيانات تكون أكبر بمقدار مرة ونصف من المدى بين الربعين فوق الأرباع العليا والدنيا.

قطع مكافئ يمثل هندسي للنقاط التي أبعدتها عن نقطة ثابتة - تسمى البؤرة - مسافة تساوي أبعدتها عن مستقيم معين - يسمى المماس.



متوازي المستطيلات مجسم متعدد الوجود تأخذ كل وجوهه شكل متوازي الأضلاع.

طريقة متوازي الأضلاع طريقة لاكتشاف النتيجة الناتجة عن طريق نقل متجه واحد بحيث يلامس ذيله ذيل النتيجة الآخر يتم رسم متوازي الأضلاع وبعد النظر فيه متجهيًا يتأكد.

متجهات موازية متجهات لها الاتجاه نفسه أو اتجاه معاكس لكن ليس بالضرورة المقدار نفسه.

معطية 1. قيم معادلة عبارة عن قياس زمني أو قياس بالزاوية عادة وتستخدم في المعادلات الوسيطة. 2. نظام قياس يعطى سمة الجمعية الإحصائي.

Glossary/القاموس G-20

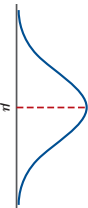
natural logarithm A logarithm with base e , written $\ln x$.

negatively skewed distribution In a data distribution, the mean is less than the median, the majority of the data are on the right, and the tail extends to the left.

nonremovable discontinuity Describes infinite and jump discontinuities because they cannot be eliminated by redefining the function at that point.

nonsingular matrix A matrix that has an inverse.

normal distribution A continuous probability distribution in which the graph of the curve is bell-shaped and symmetric with respect to the mean; the mean, median, and mode are equal and located at the center. The curve is continuous and approaches, but never touches, the x -axis; the total area under the curve is equal to 1 or 100%.



n th partial sum The sum of the first n terms of a finite or infinite series.

n th root For any real numbers a and b , and any positive integer n , if $a^n = b$, then a is an n th root of b .

null hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is not a significant difference between the sample value and the population parameter. The null hypothesis contains a statement of equality such as $=$, \geq , \leq , or \approx .

objective function A linear function of the form $f(x, y) = ax + by + c$ to be optimized in a two-dimensional linear programming problem.

oblique asymptote An asymptote that is neither horizontal nor vertical that occurs when the degree of the numerator of a rational function is exactly one more than the degree of the denominator. Also called a *slant asymptote*.

oblique triangle A triangle that is not a right triangle.

octants Eight regions into which the three axes of a three-dimensional coordinate system divide space.

odd function A function that is symmetric with respect to the origin.

Glossary/القاموس G-19

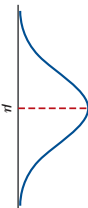
لو غاريتم طبيعي لوغاريتم يحتوي على الأساس e ويتم كتابته بالرمز $\ln x$.

توزيع متعلق سلبتي في توزيع البيانات، يكون المتوسط الحسابي أقل من الوسيط، ويكون غالبية البيانات على الجانب الأيمن، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيسر.

انقطاع غير قابل للإزالة يوضح الانقطاعات اللاإزالة وانقطاعات القفز نظراً لتغير الخصائص عن طريق إعادة تحديد الدالة عند تلك النقطة.

مصفوفة غير متباعدة مصفوفة لديها معكوس.

توزيع طبيعي توزيع احتمالي يمثل بأخذ فيه التمثيل البياني للنتائج شكل جرس ولكن مختلفاً من حيث المتوسط الحسابي والوسيط الحسابي والوسيط والنموال كلها متساوية وتقع في المنتصف، المنحنى متماثل ويقترب من المتحور x ولكنه لا يمسسه، بينما تتساوى المساحة الكلية أسفل المنحنى 1 أو 100%.



مجموع جزئي للعدد n مجموع n حذا الأولي في متسلسلة نهاية أو لا نهائية.

جذر بدوي بالنسبة إلى العدد الحقيقي a بأي عدد صحيح موجب n إذا كان العدد $a^n = b$ فنحنو a يساوي الجذر البوي (nth) للعدد b .

فرضية العدم فرضية من اثنين تفيد بضرورة إثبات صحة الفرض ما، انحص على عدم وجود فرق ملحوظ بين قيمة العينة ومعطية المجتمع الإحصائي، تتضمن فرضية العدم عبارة مساواة مثل أكبر من أو يساوي أو يساوي أو أقل من أو يساوي.

دالة الهدف دالة خطية للصفة c $ax + by$ $f(x, y) =$ لتحسينها في مسألة برمجة خطية ثنائية الأبعاد.

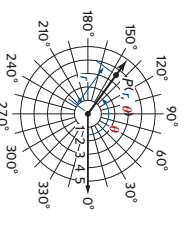
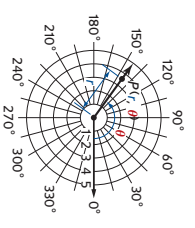
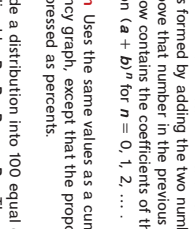
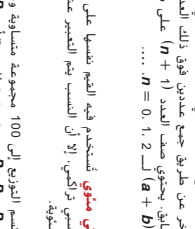
خط مقارب مائل خط مقارب ليس أفقياً أو رأسياً يتبع عندما تكون درجة السط في دالة نسبية أكثر من درجة المقام بمقدار الصنف شيئاً يقلل عليه أيضاً السط المقارب المائل.

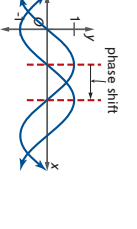
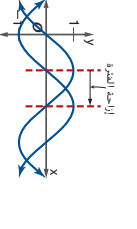
مائل مائل مثلث غير قائم الزاوية.

تُقس مكون من ثمانية قطاعات يبدأ قطرها ثلاثة محاور في مساحة معينة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

دالة فردية دالة متماثلة من حيث الأصل.

McGraw-Hill Education مؤسسة لمصالح محفوظة © المؤلف والطبع حقوق

<p>point estimate A single value estimate of an unknown population parameter.</p> <p>point symmetry Describes graphs that can be rotated 180° with respect to a point and appear unchanged.</p> <p>polar axis An initial ray from the pole in the polar coordinate system, usually horizontal and directed toward the right.</p> <p>polar coordinates Describes the location of a point $P(r, \theta)$ in the polar coordinate system, where r is the directed distance from the pole O to the point and θ is the directed angle from the polar axis to \overrightarrow{OP}.</p> <p>polar coordinate system A coordinate system in which the location of a point is identified by polar coordinates of the form (r, θ), where r is the distance from the center, or the pole, to the given point and θ is the measure of the angle formed by the polar axis and a line from the pole through the point.</p>		<p>تقدير النقطة تقدير قيمة فردية لمعلمة مجتمع إحصائي مجهولة.</p> <p>تناظر قطبي يوضح التماثلات البنائية التي يمكن تدويرها بمقدار 180° حول محور ما بالنسبة إلى نقطة تبدو غير معدلة.</p> <p>محور قطبي شعاع أولي يمتد من القطب من النظام الإحداثي القطبي. ويكون عادة أفقياً ومجهتاً نحو اليمين.</p> <p>إحداثيات القطب تصف موقع النقطة $P(r, \theta)$ في النظام الإحداثي القطبي، حيث يمثل r المسافة الموجبة من القطب O إلى النقطة ويمثل θ الزاوية الموجبة من المحور القطبي إلى \overrightarrow{OP}.</p>	
<p>polar form The complex number $z = a + bi$ written as $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, where $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, and $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.</p> <p>polar graph The set of all points with coordinates (r, θ) that satisfy a given polar equation.</p> <p>pole The origin of the polar coordinate system, O.</p> <p>polynomial function A function of the form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ where $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers.</p> <p>polynomial function of degree n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ where n is a nonnegative integer and $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers with $a_n \neq 0$.</p> <p>polynomial inequality An inequality of the form $f(x) \leq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \neq 0$, $f(x) > 0$, or $f(x) \geq 0$, where $f(x)$ is a polynomial function.</p> <p>population An entire group of living things or objects.</p>		<p>مصدر قوة قطبية العدد المركب $z = a + bi$ مكتوب كما يلي $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ حيث $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.</p> <p>تمثيل بياني قطبي مجموعة مكونة من كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تسوفي معادلة قطبية معينة.</p> <p>قطب نقطة الأصل في النظام الإحداثي القطبي.</p> <p>دالة كثيرة الحدود دالة تأخذ صورة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers.</p> <p>دالة كثيرة الحدود من الدرجة n $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers and $a_n \neq 0$.</p> <p>متباينة كثيرة الحدود متباينة تأخذ الصورة $0 < f(x) < 0$ أو $0 < f(x) < 0$ حيث $f(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq 0$.</p> <p>مجموع إحصائي عبارة عن مجموعة كاملة من الأشياء أو الكائنات الحية.</p>	

<p>parametric curve If f and g are continuous functions, then the set of ordered pairs $(f(t), g(t))$ is a plane curve with $x = f(t)$ and $y = g(t)$ as the parametric equations and t as the parameter.</p> <p>parametric equation An equation that can express the position of an object as a function of time.</p> <p>parent function The simplest function in a family of functions. A function that is transformed to create other members in a family of functions.</p> <p>partial fraction When a rational function is written as the sum of two fractions with denominators that are linear factors of the original denominator, each fraction in the sum is a partial fraction.</p> <p>partial fraction decomposition A rational expression rewritten as the sum of two simpler rational expressions.</p> <p>Pascal's triangle A triangular array of numbers such that the first and last numbers in each row are 1 and every other number is formed by adding the two numbers immediately above that number in the previous row. The $(n + 1)$th row contains the coefficients of the terms of the expansion $(a + b)^n$ for $n = 0, 1, 2, \dots$.</p> <p>percentile graph Uses the same values as a cumulative relative frequency graph, except that the proportions are instead expressed as percents.</p> <p>percentiles Divide a distribution into 100 equal groups and are symbolized by P_1, P_2, \dots, P_{99}. The nth percentile or P_n is the value such that $n\%$ of the data are lower than P_n.</p> <p>period For a function $y = f(t)$, the smallest positive number c for which $f(t + c) = f(t)$.</p> <p>periodic function A function with values that repeat at regular intervals. There exists a positive real number c such that $f(t + c) = f(t)$ for all values of t in the domain of f.</p> <p>permutation An arrangement of objects in which order is important.</p> <p>phase shift For a sinusoidal function, the difference between the horizontal position of a function and that of an otherwise similar sinusoidal function. For $y = a \sin(bx + c) + d$ and $y = a \cos(bx + c) + d$, phase shift $= -\frac{c}{b}$.</p>	
<p>مجموع وسيطي إذا كانت G, f دالتين متساويتين، فإن مجموعة الأوزان المرتبة $(f(t), g(t))$ عبارة عن مجموع مسطح تكون فيه $x = g(t)$ و $y = f(t)$ كمعادلات وسيطة وكوسيط.</p> <p>معادلة وسيطة معادلة تستطيع أن تفسر عن موقع جسم ما على أنه دالة زمنية.</p> <p>دالة أم الدالة الأيسر في مجموعة الدوال. دالة يتم تحويلها لإنشاء أعضاء آخرين في المجموعة الدوال.</p> <p>كسر جزئي عند كتابة دالة شبيهة في صورة مجموع كسور معالجها عوامل خطية للنظام الأصلي، يكون كل كسر في المجموع كسراً جزئياً.</p> <p>تجزئة الكسور تغيير نسبي مُعد كتابته في صورة مجموع تعبيرين شبيهين في صورة لسطح.</p> <p>مثلث باسكال مصفوفة لائحة الزوايا تتألف من أعداد بحيث تكون الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف تساوي 1 ويتم تكوين كل عدد آخر عن طريق جمع عددين فوق ذلك العدد مباشرة في الصف السابق. يحتوي صف العدد $(n + 1)$ على معاملات فترات التمدد $(a + b)^n$ لـ $n = 0, 1, 2, \dots$.</p> <p>تمثيل بياني موزني تستخدم فيه القيم نفسها على أنها تمثيل بياني ف تكرر نسبي راكن، إلا أن النسب يتم التعبير عنها بدلاً من ذلك بالنسب المئوية.</p> <p>المتكامل يقسم التوزيع إلى 100 مجموعة متساوية وتوزع لها بالمرور P_1, P_2, \dots, P_{99}. نسبة مئوية للعدد n و P_n هي القيمة بحيث يكون $n\%$ من البيانات أقل من P_n.</p> <p>دورة بالنسبة إلى الدالة $f(t) = f(t + c)$ أصغر عدد صحيح موجب هو c تكون فيه $f(t + c) = f(t)$.</p> <p>دالة دورية دالة ذات تكرر على فترات زمنية منتظمة. يوجد بها عدد حقيقي موجب c بحيث تكون $f(t + c) = f(t)$ لجميع قيم t الموجودة في مجال f.</p> <p>التناوب ترتيب الأشياء التي يكون الترتيب فيها مهماً.</p> <p>إزاحة التغير بالنسبة إلى الدالة الجيبية الفرق بين الوافق الأقصى للدالة ما يوافق دالة جيبية متساوية بصورة مختلفة. بالنسبة إلى $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$، $\frac{c}{b}$ = الإزاحة العكس.</p>	

quartic function A function that contains a fourth-degree polynomial.

quantities The values that divide a set of data into four equal parts.

R

radians A unit of angular measurement equal to $\frac{180^\circ}{\pi}$ or about 57.296°.

radical function A function that can be written as $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$, where n and p are positive integers greater than 1 that have no common factors.

random variable Represents a numerical value assigned to an outcome of a probability experiment

range The difference between the greatest and least values in a set of data.

rational function A function of the form $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ where $a(x)$ and $b(x)$ are polynomial functions, and $b(x) \neq 0$.

rational inequality An inequality that contains one or more rational expressions.

Rational Zero Theorem Describes how the leading coefficient and constant term of a polynomial function with integer coefficients can be used to determine a list of all possible rational zeros.

real axis The horizontal axis of a complex plane on which the real component of a complex number is graphed.

real part In an imaginary number $a + bi$, a is the real part

reciprocal function 1. A function of the form $f(x) = \frac{1}{a(x)}$, where $a(x)$ is a linear function and $a(x) \neq 0$, with parent function $f(x) = \frac{1}{x}$. 2. Trigonometric functions that are reciprocals of each other.

rectangular components Horizontal and vertical components of a vector.

recursive formula A formula used to determine the n th term of a sequence using one or more of the preceding terms.

reduced row-echelon form An augmented matrix in which the first nonzero element of each row of the coefficient portion of the matrix is 1 and the rest of the elements in the same column as this element are 0.

دالة من الدرجة الرابعة الدالة التي تحتوي على حدود من الدرجة الرابعة.

زيجيات قيم تقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.

قياس دائري (راديان) وحدة قياس زاوية تساوي $\frac{180}{\pi}$ درجة أو حوالي 57.296 درجة.

دالة جذرية الدالة التي يمكن كتابتها في صورة $f(x) = \sqrt[n]{x^p}$ ، حيث n و p أعداد صحيحة موجبة أكبر من العدد 1 الذي ليس له أي عوامل مشتركة.

متغير عشوائي يمثل قيمة عديدة معيَّنة تشير إلى نتيجة من نتائج تجربة الاحتمال.

مدى الفرق بين القيم الأكبر والأصغر في مجموعة من البيانات.

دالة نسبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ حيث $a(x)$ و $b(x)$ دوال كثيرة الحدود، و $b(x) \neq 0$.

متباينة نسبية هي متباينة تحتوي على واحد أو أكثر من المتغير النسبية.

نظرية الصفر النسبي توضح كيف يمكن استخدام الحساب الأساسي والحد الثالث لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

محور حقيقي المحور الأفقي يستوي مركب يتم تمثيل المركب الحقيقي بعدد مركب عليه بنقطة

جزء حقيقي في العدد الحقيقي $a + bi$ ، يمثل a الجزء الحقيقي.

دالة عكسية 1. دالة تأخذ الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ ، حيث يمثل $a(x)$ دالة خطية و $a(x) \neq 0$ باستخدام الدالة الأصلية حيث يمثل $f(x) = \frac{1}{x}$. 2. الدوال المتبادلة التي تتبادل مع بعضها البعض.

مركبات متعامدة هي مركبات النجيم الأفقية ورأسية.

متباينة تكرارية هي المتباينة المستخدمة لتحديد الحد الأدنى للمتباينة باستخدام حد أو أكثر من الحدود السابقة.

صفحة مستوي صف متخفي عبارة عن صفوف وأدلة يساوي فيها الحصر الأول غير الصغرى لكل صف من جزء معامل الصفوف العدد 1 يساوي باقي العناصر في الصف نفسه الموجود فيه هذا الحصر العدد 0.

Glossary/القاموس G-24

positively skewed distribution In a data distribution, the mean is greater than the median, the majority of the data are on the left, and the tail extends to the right

power function A function of the form $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero real numbers.

power series An infinite series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ where x and a_n can take on any values for $n = 0, 1, 2, \dots$.

principal n th root The nonnegative n th root

principle of mathematical induction Let P_n be a statement about a positive integer n . Then P_n is true for all positive integers n if and only if

- P_1 is true, and
- for every positive integer k , if P_k is true, then P_{k+1} is true.

probability distribution A table, equation, or graph that links each possible value for a random variable with its probability of occurring.

p th roots of unity Finding the p th roots of 1

p -value The lowest level of significance at which H_0 can be rejected for a given set of data.

pure imaginary number An imaginary number ($a + bi$), where $a = 0$.

quadrant bearing A directional measurement of a vector between 0° and 90° east or west of the north-south line.

quadrantal angle An angle in standard position that has a terminal side that lies on one of the coordinate axes.

quadratic equation A polynomial equation of degree two, in the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

quadratic form A polynomial expression that is written in the form $ax^2 + bx + c$ for any numbers a , b , and c , where $a \neq 0$ and u is some expression in x .

Quadratic Formula The solutions of a quadratic equation of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, are given by the Quadratic Formula, which is

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quadratic function A function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^2$.

توزيع ملو إحصائي في توزيع البيانات، أن يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسط. وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيسر. ويمتد الذيل إلى الجانب الأيمن.

دالة أسية تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$ ، حيث a و n أعداد حقيقية غير الصفر.

متسلسلة أسية متسلسلة لا نهائية تأخذ الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ حيث x تأخذ x و a_n أي قيم لـ $n = 0, 1, 2, \dots$.

الجذر البولي الرئيسي الجذر الوحي غير السالب.

مبدأ الاستقراء الرياضي بالنظر إلى أن P_n عدد صحيح موجب n ، إذا P_1 حقيقي لجميع الأعداد الموجبة n في الحالات التالية فقط

- P_1 حقيقي
- لكل عدد صحيح موجب k ، إذا كان P_k صواباً، إذاً P_{k+1} صواب.

توزيع احتمالي جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط كل قيمة موجبة للمتغير عشوائي باحتمالية حدوثه.

جذر p للوحدة إيجاد الجذور للعدد 1.

قيمة p مستوى الدلالة الأدنى الذي يمكن عندده رفض H_0 لمجموعة معينة من البيانات.

عدد تخيلي بحث عدد تخيلي ($a + bi$)، حيث $a = 0$.

اتجاه زمني هو قياس اتجاهي لنتيجة ما بين 0 درجة و90 درجة شرق المستقيم المتعلق من الشمال إلى الجنوب أو غربه.

زاوية ربعية هي زاوية في الوضع القياسي طلع إثنين، لها يقع على أحد محاور الإحداثيات.

معادلة تربيعية معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، في الصورة $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$.

صورة تربيعية تشير كثير الحدود يكتب في صورة $ax^2 + bx + c$ لأي أعداد a ، b ، و c ، حيث $a \neq 0$ يمثل بعض المتغيرات في x .

متباينة تربيعية أو التباين العام لحل المعادلات التربيعية الحلول المحددة للمعادلة تربيعية في الصورة $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ ، معطاة بواسطة الصيغة التربيعية، وهي $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

دالة تربيعية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^2$.

Glossary/القاموس G-23

متطابقة الجفاف هي متطابقة تنتج عند استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لإعداد كتابة التعبير البسيط الذي يساوي فيه إحدى الزوايا ناتج الضرب في 90° درجة أو $\frac{\pi}{2}$ قياس دائري (راديان).

زاوية إسناد هي الزاوية الحادة بواسطة صنع الإنشاء لزاوية ما في الوضع القياسي على المحور الأفقي x .

امتكاس تحويل هندسي يتم فيه إنشاء صورة طبق الأصل من الشكل البشري لدالة ما بالنسبة إلى مستقيم معين.

خط الجدار مستقيم مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضع بحيث يتغير متغير الاستجابة y كلما يتغير المتغير التفسيري x يطلق عليه أيضاً **المستقيم الأفضل** مثلاً.

تجزئة متقطعة في المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة، هي المسافة المقسمة إلى أجزاء متساوية.

تكرار نسبي في جدول التكرار، يمثل عدد مرات تكرار كل قيمة من قيم البيانات.

مجال نسبي في دالة ما، يمثل الجزء من المجال المتعلق بالمؤدج.

انقطاع قابل للإزالة ميزة في دالة ما تكون فيها الدالة متصلة إذا كانت باستثناء نقطة $x = c$.

متغير متكرر المتغير c الذي له صلة بالدالة حيث يتكرر العامل $(x - c)$ أكثر من مرة في النموذج التحليلي كلاً ($f(x)$).

قيمة متقطعة الفرق بين قيمة y التي تتم ملاحظتها في نقطة البيانات وقيمة y المتوقعة على خط الانحدار.

رسم بياني لقيمة متقطعة رسم بياني ممتد للقيم المتقطعة يتطابق فيه المستقيم الأفقي عند الصفر مع خط الانحدار.

قيمة إحصائية متناوبة هي قيمة إحصائية لا تتأثر كثيراً بوجود قيم البيانات العديدة عن المركز.

متغير الاستجابة المتغير التابع y في البيانات ذات المتغيرين.

محصلة نتيجة واحد ينتج عن إضافة متجهين أو أكثر.

مجموع ريمان **بيني** طريقة لتقريب المساحة التي تقع تحت المنحنى باستخدام القيم الموجودة في نقاط النهاية البيني.

اختبار الدليل الأيمن اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu > k$. **جذر** بالنسبة إلى الدالة $f(x)$ ، يمثل حل المعادلة $f(x) = 0$.

reduction identity An identity that results when a sum or difference identity is used to rewrite a trigonometric expression in which one of the angles is a multiple of 90° or $\frac{\pi}{2}$ radians.

reference angle The acute angle formed by the terminal side of an angle in standard position and the x-axis.

reflection A transformation in which a mirror image of the graph of a function is produced with respect to a specific line.

regression line A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a **line of best fit**.

regular partition In the area under the graph of a function, an interval that is subdivided into equal subintervals.

relative frequency In a frequency table, the frequency of occurrence for each data value.

relevant domain In a function, the part of the domain that is relevant to a model.

removeable discontinuity A characteristic of a function in which the function is continuous everywhere except for a hole at $x = c$.

repeated zero The related zero c of a function when a factor $(x - c)$ occurs more than once in the completely factored form of $f(x)$.

residual The difference between an observed y value of a data point and its predicted y -value on a regression line.

residual plot A scatter plot of the residuals in which the horizontal line at zero corresponds to the regression line.

resistant statistic A statistic that is not highly affected by the presence of outlying data values.

response variable The dependent variable y in bivariate data.

resultant A single vector that results when two or more vectors are added.

right Riemann sum A method for approximating the area under a curve by using the values at the right endpoints.

right-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu > k$.

root For a function $f(x)$, a solution of the equation $f(x) = 0$.

متجهي ودي التمثيل للبيان للمعادلة الخطية التي تأخذ الصورة $r = a \cos \theta$ أو $r = a \sin \theta$ حيث $r \geq 2$ حيث $n \geq 2$ عدد صحيح.

نموذج مستوى الصف مصفوفة في نموذج مستوى الصف في حال استبعاد الشروط التالية.

• **ظهور الصفوف التي تحتوي على جميع الأصفار** (إن وجدت) أسفل المصفوفة.

• **إن يكون أول مدخل غير صفري في أي صف من الصفوف هو العدد 1.**

• **بالنسبة إلى الصفين المتتاليين ذوي الإحداثيات غير الصفريّة، يكون العدد 1 الأساسي في الصف الأعلى أبعد من العدد 1 الأساسي في الصف الأدنى ناحية اليسار.**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

row matrix A matrix that has only one row.

sample A part of a population.

sample correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data that represent a sample of the population.

sampling distribution A distribution of the means of random samples of a certain size that are taken from a population.

sampling error Occurs when a sample is not a complete representation of the population and causes differences between sample means and the population mean.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

scalar A constant.

secant In a right triangle with acute angle θ , the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side adjacent to θ ; it is the reciprocal of the cosine ratio, or $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

secant line The line through two points on a curve.

second differences Differences that are found by subtracting consecutive first differences from one another.

sector In a circle, the region bounded by a central angle and its intercepted arc.

sequence An ordered list of numbers.

Glossary /
القاموس

standard normal distribution A normal distribution of z-values with a mean of 0 and a standard deviation of 1.

standard position 1. In the coordinate plane, an angle positioned so that its vertex is at the origin and its initial side is along the positive x-axis. 2. A vector that has its initial point at the origin.

statistics The science of collecting, analyzing, interpreting and presenting data.

step function A piecewise-defined function in which the graph is a series of line segments that resemble a set of stairs.

subset If every element of set *B* is contained in set *A*, then *B* is a subset of *A*.

substitution method A method of solving a system of equations in which one equation is solved for one variable in terms of the other.

symmetrical distribution In a data distribution, the data are evenly distributed on both sides of the mean.

synthetic division A shortcut for dividing a polynomial by a linear factor of the form *x* – *c*.

synthetic substitution The use of synthetic division to evaluate a function.

system of equations A set of equations with the same variables.

system of inequalities A set of inequalities with the same variables.

tangent 1. A line that intersects a circle at exactly one point. 2. In a right triangle with acute angle *θ*, the ratio comparing the length of the side opposite *θ* and the side adjacent to *θ*.

tangent line The tangent line to *f*(*x*) at *x* is the line passing through the point (*x*, *f*(*x*)) with slope *m*, where $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

t-distribution A family of curves that are dependent on a parameter known as the *degrees of freedom*.

term 1. The monomials that make up a polynomial. 2. Each number in a sequence or series.

terminal point The ending point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the *head* or *tip* of the vector.

terminal side The final position of a ray after rotation when forming an angle.

three-dimensional coordinate system A coordinate system formed by three perpendicular number lines, the *x*-, *y*-, and *z*-axes, that intersect at the origin *O*. Each point is represented by an ordered triple of real numbers (*x*, *y*, *z*).

توزيع طبيعي معياري توزيع طبيعي لقيم *z* باستخدام متوسط حسابي 0 والحراف المعياري 1.

وضع قياسي 1. في المستوى الإحداثي، يتم تحديد موقع الزاوية بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل. يقع الإبراء رأ على امتداد المحور *x* الموجب. 2. المنهج الذي يكون نقطة الإحداثية عند نقطة الأصل.

إحصاء العلم الذي يتم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وتبويبها.

دالة درجية دالة متعددة التერيف يكون فيها التمثيل البياني عبارة عن تسلسل من القطع المستقيمة التي تشبه مجموعة من الدرجات.

مجموعة جزئية بما أن كل عنصر في المجموعة *B* يوجد داخل المجموعة *A*، فإن *B* تعد مجموعة فرعية من المجموعة *A*.

طريقة التعويض طريقة لحل نظام المعادلات الذي يتم فيه حل معادلة واحدة للغير واحد بدلالة الأخر.

توزيع متساوي في توزيع المتساوي، تكون البيانات موزعة بالتساوي على كلا جانبي المتوسط الحسابي.

قسمة تركبسية طريقة مختصرة لقسمة الدالة كثيرة الحدود على عامل خطي للصفة *x* – *c*.

تعويض تركبسي استخدام النسبة التركيبية لحساب قيمة دالة معينة.

نظام المعادلات مجموعة المعادلات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

نظام المتباينات مجموعة المتباينات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

T

مماس 1. خط يتقاطع مع دائرة عند نقطة واحدة بالحدود. 2. في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة *θ*، فإنه يمثل النسبة التي تقارن بين طول الضلع المقابل للزاوية *θ* والضلع المجاور للزاوية *θ*.

خط المماس الخط المماس لـ *f*(*x*) عند *x* هو الخط المار عبر النقطة (*x*, *f*(*x*)) مع الميل *m* حيث $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

توزيع *t* مجموعة من المنحنيات التي تعتمد على معلمة تُعرف بـدرجات الحرية.

حد 1. أعداديات الحد التي تشكل دالة كثيرة الحدود. 2. كل عدد في متتالية أو متسلسلة.

نقطة طرفية نقطة النهاية لمنحني يتم تبويبها بواسطة قطعة مستقيمة موجبة. تُعرف أيضًا باسم رأس أو قمة المنحنى.

ضلع طرفي موقع بداية الشعاع بعد الدوران عند تكوين زاوية ما.

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد نظام إحداثي يتكون من ثلاثة خطوط أعداد متعامدة، هي المحاور *x* و*y* و*z*، والتي تتقاطع عند الأصل *O*. ويمثل كل نقطة مجموعة أعداد مرتبة ثلاثية المتناسق وهي (*x*, *y*, *z*).

Glossary/القاموس G-28

series The sum of all the terms of a finite or infinite sequence.

set A collection of objects or numbers, often shown using braces { } and usually named by a capital letter.

set-builder notation An expression that describes a set of numbers by using the properties of numbers in the set to define the set, for example {*x* | *x* ≥ 8, *x* ∈ *W*}.

sigma notation For any sequence *a*₁, *a*₂, *a*₃, ..., the sum of the first *k* terms is denoted $\sum_{n=1}^k a_n$, which is read *the summation from n = 1 to k of a_n*. Thus $\sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ where *k* is an integer value.

sign chart Used to determine on which intervals a polynomial function is positive or negative.

sine In a right triangle with acute angle *θ*, the ratio comparing the length of the side opposite *θ* and the hypotenuse.

singular matrix A matrix that does not have an inverse.

sineusoid Any transformation of a sine function. The general forms of sinusoidal functions are *y* = *a* sin (*bx* + *c*) + *d* and *y* = *a* cos (*bx* + *c*) + *d*, where *a*, *b*, *c*, and *d* are constants and neither *a* nor *b* is 0.

solve a right triangle To find the measures of all of the sides and angles of a right triangle.

spiral of Archimedes The graph of a polar equation of the form *r* = *aθ* + *b*.

square matrix A matrix with the same number of rows and columns.

square root function A function that contains a square root of the independent variable, with parent function *f*(*x*) = \sqrt{x} .

square system A system of linear equations that has the same number of equations as variables.

standard deviation The average amount by which individual items deviate from the mean of all the data found by taking the square root of the variance and represented by *σ*.

standard error of the mean The standard deviation of the sample means, given by $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

standard form A complex number written in the form of *a* + *bi*.

Glossary/القاموس G-27

متسلسلة مجموعة حدود المتتالية المتباينة أو اللانهائية.

مجموعة مجموعة من الأشياء، أو الأعداد التي تظهر غالباً بين قوسين { } وعادة ما يكتب اسمها بحروف كبيرة.

مجموعة الحل بذكر المسألة التمرية تغير يصف مجموعة الأعداد من خلال استخدام خصائص الأعداد في المجموعة لتحديد على سبيل المثال، $\{x \in W \mid x \geq 8\}$.

ترميز سيجما بالنسبة لأي متتالية *a*₁, *a*₂, *a*₃, ..., يرمز إلى مجموع حدود *k* الأولى بـ $\sum_{n=1}^k a_n$ ويُقرأ صيغة الجمع 1 إلى *k* من *a_n* وبالتالي $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ حيث *k* قيمة عدد صحيح.

جدول الإشارة يستخدم لتحديد على أي الفترات تكون الدالة كثيرة الحدود موجبة أم سالبة.

جيب الزاوية في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة *θ*، يمثل النسبة التي تقارن طول الضلع المقابل للزاوية *θ* والوتر.

مصفوفة مربعة المصفوفة التي ليس لها معكوس.

منحنى الجيب أي تحويل في دالة جيب الزاوية. إن الصيغة العامة لدوال منحنى الجيب هي *y* = *a* sin (*bx* + *c*) + *d* و *y* = *a* cos (*bx* + *c*) + *d* حيث *a* و*b* و*c* و*d* أعداد ثابتة ولا يساوي *a* أو *b* تساوي صفراً.

حل مثلث قائم الزاوية إيجاد قياسات كل أضلاع المثلث قائم الزاوية وزواياه.

حلزون أرشميدس التمثيل البياني لمعادلة قطبية للمصفوفة $r = a\theta + b$.

مصفوفة مربعة مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

دالة الجذر التربيعي الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي للمتغير المستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$.

نظام مربع نظام معادلات خطية يحتوي على معادلات بنفس عدد المتغيرات.

الحراف المعياري متوسط مقدار انحراف كل قيمة من القيم عن المتوسط الحسابي لجميع البيانات التي يتم إيجادها عن طريق أخذ الجذر التربيعي للتباين. ويغير عنه بالرمز *σ*.

خطاً معياري للمتوسط الحسابي الانحراف المعياري لمتوسطات الخية. ويتم الحصول عليه عن طريق $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

صيغة قياسية عدد مركب يُكتب بالصيغة *a* + *bi*.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظه © والتأليف والطبع والنشر

<p>turning point A point on the graph of a function that indicates where the graph changes from increasing to decreasing, or vice versa. The location of a relative maximum or minimum.</p> <p>two-sided limit The limit of $f(x)$ as x approaches c from the left and from the right, which exists only when both one-sided limits exist and are equal.</p> <p>two-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu \neq k$.</p>	<p>نقطة التحول نقطة على التمثيل البياني للدالة وهي تشير إلى مكان تغير التمثيل البياني من الزيادة إلى التناقص أو العكس. موقع الحد الأقصى أو الأدنى المسمى.</p> <p>النهاية من الطرفين هو حد $f(x)$ حيث x يقترب من c من ناحية اليسار واليمين ولكن نهاية الدالة موجودة عندما تتساوى النهاية من الطرفين.</p> <p>اختبار ذاتي الذيل اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu \neq k$.</p>
<p>unbounded A region formed by a system of linear inequalities in a linear programming problem that is not a polygon.</p> <p>union The union of sets A and B is all elements in both A and B, written as $A \cup B$.</p> <p>unit circle A circle of radius 1 centered at the origin of a coordinate system.</p> <p>unit vector A vector that has a magnitude of 1 unit.</p> <p>univariate data Data with one variable.</p> <p>universal set The set of all possible elements for a situation.</p> <p>upper bound A real number B that is greater than or equal to the greatest real zero of a polynomial function.</p> <p>upper limit The upper bound of a definite integral.</p>	<p>غير محدود منطقة تنتج عن نظام من المتباينات الخطية في مسألة برمجة خطية ولا تكون مختلفة.</p> <p>اتحاد اتحاد المجموعتين B, A حيث يشمل كل العناصر الموجودة في كل من B, A ويكتب بالصيغة $A \cup B$.</p> <p>دائرة الوحدة دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويكون مركزها عند نقطة أصل النظام الإحداثي.</p> <p>متجه الوحدة متجه طوله وحدة طولية واحدة .</p> <p>بيانات أحادية المتغير بيانات تتكون من متغير واحد.</p> <p>مجموعة شاملة المجموعة التي تشمل كل العناصر المحتملة لحالة ما.</p> <p>حد أعلى عدد حقيقي b أكبر من أو يساوي أكبر صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.</p> <p>الحد الأعلى الحد الأعلى لتكامل محدد.</p>
<p>variance The mean of the squares of the deviations from the arithmetic mean.</p> <p>vector A quantity that has both magnitude and direction.</p> <p>vector projection Let u and v be nonzero vectors, and let w_1 and w_2 be vector components of u such that w_1 is parallel to v. Then vector w_1 is called the vector projection of u onto v, denoted $\text{proj}_v u$ and $\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{ v ^2} \right) v$.</p>	<p>تباين متوسط مربعات الانحرافات عن المتوسط الحسابي.</p> <p>متجه كمية لها مقدار واتجاه.</p> <p>مستطع المتجه لنفرض أن u و v متجهين غير صفريين، وأن w_1 و w_2 مكونا المتجه u بحيث يكون w_1 موازيا لـ v عندئذ يسمى المتجه w_1 مستطع المتجه u على v ويشار إلى ذلك بـ $\text{proj}_v u$ و $\text{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{ v ^2} \right) v$.</p>
<p>torque A vector quantity that measures how effectively a force applied to a lever causes rotation along the axis of rotation.</p> <p>transcendental function A function that cannot be expressed in terms of algebraic operations, such as an exponential or logarithmic function.</p> <p>transformation A change in the position or shape of the graph of a parent function.</p> <p>translation A rigid transformation that has the effect of shifting the graph of a function</p> <p>transverse axis The segment that has a length of $2a$ units and connects the vertices of a hyperbola.</p> <p>triangle method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tip of another. The resultant vector is drawn to form a triangle.</p> <p>trigonometric form See <i>polar form</i>.</p> <p>trigonometric function Let θ be an acute angle in a right triangle and opp, adj, and hyp are the lengths of the side opposite θ, the side adjacent to θ, and the hypotenuse, respectively. Then the trigonometric functions of θ are defined below.</p> <p>$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$</p> <p>$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$</p>	<p>torque كمية متجهة تقيس مدى تأثير القوة المبدولة على قوة الدوران حول محور الدوران.</p> <p>transcendental function دالة لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية. مثل الدالة الأسية أو اللوغاريتمية.</p> <p>تحويل تغير في موقع أو شكل التمثيل البياني للدالة الأصلية.</p> <p>التحريك تحويل غير مرن يؤثر على إزاحة التمثيل البياني للدالة</p> <p>محور قاطع قطعة طولها $2a$ تصل بين رؤوس القطع الزائد.</p> <p>طريقة المثلثات طريقة لإيجاد متجه ناتج عن طريق سحب متجه واحد بحيث يلامس ذيله قمة المتجه الآخر. يرسم المتجه الناتج بحيث يكون شكل مثلث.</p> <p>هوية مثلثية النظر هوية قطبية.</p> <p>دالة مثلثية لنفرض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية وأن opp, adj, hyp هي أطوال الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ والوتر، على التوالي، فحينئذ نعرف الدوال المثلثية للزاوية θ كما يلي:</p> <p>$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$</p> <p>$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ $\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$ $\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$</p>
<p>trigonometric identity An equation that involves trigonometric functions that is true for all values of the variable.</p> <p>trigonometric ratios Ratios that are formed using the side measures of a right triangle and a reference angle θ.</p> <p>triple scalar product If $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, and $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, the triple scalar product is given by $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.</p> <p>A triple scalar product of vectors represents the volume of a parallelepiped.</p> <p>true bearing A directional measurement of a vector where the angle is measured clockwise from north.</p>	<p>متطابقة مثلثية معادلة تحتوي على دوال مثلثية حقيقية لجميع قيم المتغير.</p> <p>نسب مثلثية النسب التي تتكون باستخدام قياسات الأضلاع لمثلث قائم الزاوية وزاوية استناد θ.</p> <p>ناتج ضرب قياسي لثلاثة متجهات وما أن $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ يتم الحصول على ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات عن طريق $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$</p> <p>يمثل ناتج الضرب القياسي لثلاثة متجهات حجم متوازي المستطيلات.</p> <p>اتجاه حقيقي قياس اتجاهي لمتجه حيث يتم قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة من الشمال.</p>

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لمصالح مؤسسة Education McGraw-Hill

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لمصالح مؤسسة Education McGraw-Hill

verify an identity To prove that both sides of the equation are equal for all values of the variable for which both sides are defined.

vertex 1. The common endpoint of two or more noncollinear rays. 2. A point at which a parabola intersects its axis of symmetry. 3. The two endpoints of the major axis of an ellipse.

vertical asymptote The line $x = c$ is a vertical asymptote of the graph of f if $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.

vertical shift For a sinusoidal function, a vertical translation that is the average of the maximum and minimum values of the function.

vertices The endpoints of the major axis of an ellipse.

work If a constant force F acts on an object to move it from point A to point B , then the work done equals the dot product of the constant force F and the directed distance \overline{AB} , or $F \cdot \overline{AB}$.

zeros The x -intercepts of the graph of a function.

zero function The function sometimes known as the zero function is the constant function with constant $c = 0$. In other words, $f(x) = 0$.

zero matrix A matrix in which every element is zero.

zero vector The resultant when two opposite vectors are added, has a magnitude of 0 and no specific direction. Also called the *null* vector, denoted by 0 or $\mathbf{0}$.

z-axis a third axis in a three-dimensional coordinate system that passes through the origin and is perpendicular to both the x - and y -axes.

z-value Represents the number of standard deviations that a given data value is from the mean. Also known as the **z-score** and **z test statistic**.

إثبات صحة المتطابقة إثبات أن كلا طرفي المعادلة متساويان في جميع قيم المتغيرات المحدد بها كلا الطرفين.

رأس 1. نقطة النهاية المشتركة لمتعامدين أو أكثر ليسا على نفس الخط. 2. نقطة تقاطع منحني معهما الخطان مع محور شبائيه. 3. نقطة نهاية المحور الأكبر لتقطع ناقص.

خط مقارب رأسي يكون المستقيم $x = c$ خطاً مقارباً رأسيًا للتعبيل البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$.

إزاحة رأسيّة بالنسبة إلى الدالة الجيبية، تكون الإزاحة هي الانحساب الرأسي الذي يميل متوسط الدائم والعمودي للدالة.

رؤوس نقاط نهاية المحور الأكبر لتقطع ناقص.

شغل إذا كانت القوة الناتجة F متوازلة على جسم ما لتحركه من النقطة A إلى النقطة B ، فإن الشغل المبذول يساوي الناتج النقطي للقوة الناتجة F والمسافة الموجبة \overline{AB} أو $F \cdot \overline{AB}$.

Z

أصغار التقاطع مع المحور الأفقي x في التمثيل البياني للدالة.

دالة صفرية نحد الدالة التي تُعرف أحياناً بالدالة الصفرية دالة ثابتة ثابت $c = 0$. بمعنى أن $f(x) = 0$.

مصفوفة صفرية المصفوفة التي يساوي كل عنصر فيها صفراً.

متجه صفري هو متجه محصلة جميع متجهين متقابلين، ويكون وحدته الطولية 0 ولا يكون له اتجاه معين. ويُعرف أيضاً بالمتجه المنعدم، ويُشار إليه بالرمز $\mathbf{0}$.

محور Z المحور، الثالث في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد، ويمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامداً على كل من المحور x والمحور y .

قيمة Z نثيل عدد الانحرافات المعيارية التي تتحولها محددة عن المتوسط الحسابي، ويُعرف أيضاً باسم إشارَة **Z** و**احصاء** واختصار **Z**.

الدوال المثلثية والمتطابقات

الدوال المثلثية		
$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
قانون الجيب		$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
قاعدة هيرون		$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية		$v = \frac{s}{t}$
السرعة الزاوية		$\omega = \frac{\theta}{t}$
المتطابقات المثلثية		
$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
$\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$	$\tan 2\theta + 1 = \sec 2\theta$	$\cot 2\theta + 1 = \csc 2\theta$
$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan \theta = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec \theta = \csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot \theta = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc \theta = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\csc(-\theta) = -\csc \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	الجمع والطرح
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$	
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$	
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$	$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$	$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	زاوية مزدوجة
$\sin 2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos 2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	
$\tan 2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$		تبسيط القيمة الأسية
$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$	$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$	زاوية نصفية
$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$	$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$	
$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$		
$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$	$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$	نتائج الضرب إلى مجموع
$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	المجموع إلى ناتج الضرب
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	

الصيغ			
العمليات على الدوال			
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	الضرب	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	الجمع
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	القسمة	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	الطرح
دوال أسية ولوغاريتمية			
$N = N_0(1 + r)^t$	نمو أو تضائل أسي	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	فائدة مركبة
$N = N_0 e^{kt}$	نمو أو تضائل أسي مستمر	$A = Pe^{rt}$	فائدة مركبة متصلة
$\log_b x^p = p \log_b x$	خاصية القيمة الأسية	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية ناتج الضرب
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	تغيير الأساس	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية ناتج القسمة
$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$	نمو لوجستي		
مقاطع مخروطية			
$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	دائرة	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ أو $(y - k)^2 = 4p(x - h)$	قطع مكافئ
$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$	قطع زائد	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	قطع ناقص
$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$		دوران الأشكال المخروطية	
معادلات وسيطية			
$x = tv_0 \cos \theta$	مسافة أفقية	$y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	مسطح عمودي
متجهات			
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$	الجمع في الفراغ	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في المستوى
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ $= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$	الطرح في الفراغ	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في المستوى
$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$	ضرب الكميات غير المتجهة في الفراغ	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	ضرب الكميات غير المتجهة في المستوى
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2 - a_2b_1, a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3$	ناتج الضرب العددي في الفراغ	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1b_2 - a_2b_1$	ناتج الضرب العددي في المستوى
$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{v} ^2}\right) \mathbf{v}$	إسقاط \mathbf{u} على \mathbf{v}	$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	زاوية بين متجهين
$\mathbf{t} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$	ناتج الضرب الثلاثي لكميات غير متجهة	$ \mathbf{v} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	مقدار المتجهة
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$		ضرب تقاطعي	

الصيغ

الأعداد الأولية	
صيغة ناتج القسمة	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
صيغة ناتج الضرب	$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
صيغة الجذور المهيبة	$r^{\frac{1}{p}} \left(\cos \frac{\theta + 2m\pi}{p} + i \sin \frac{\theta + 2m\pi}{p} \right)$
نظرية دي موافر	$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$ أو $r^n \cos n\theta + i \sin n\theta$
المتتاليات والمتسلسلات	
مجموع المتسلسلات الحسابية المنتهية	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$
مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية	$S = \frac{a_1}{1-r}, r < 1$
متسلسلة القيمة الأسية	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
نظرية ذات حدين	$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}^nC_n a^0 b^n$
متسلسلة القوة لجيب تمام الزاوية وجيب الزاوية	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
الإحصاء	
قيم Z	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$
احتمالية ذات حدين	$P(X) = {}^nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x q^{n-x}$
فترة الثقة، التوزيع الطبيعي	$CI = \bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو $CI = \bar{x} \pm E$
معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right)$
اختبار معامل الارتباط t-معامل	$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, درجات من الحرية: $n-2$
الحدود	
ناتج الجمع	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
ضرب الكميات غير المتجهة	$\lim_{x \rightarrow c} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
ناتج القسمة	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
جذر العدد النوني	$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ حيث n عدد زوجي
السرعة	متوسط: $v_{\text{avg}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ لحظي: $v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$
مشتقات	
قاعدة القيمة الأسية	$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$ إذا كان
قاعدة ناتج الضرب	$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
قاعدة ناتج القسمة	$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
التكاملات	
تكامل غير محدود	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل	$\int f(x) dx = F(x) + C$

الرموز

\in	أحد عناصر	$f(x) = \llbracket x \rrbracket$	دالة أكبر عدد صحيح
\subset	مجموعة جزئية من	$[f \circ g](x)$	f من g من x تركيبة الدالتان f و g
\cap	تقاطع	f^{-1}	معكوس f
\cup	اتحاد	$\log_b x$	أساس اللوغاريتم b من x
\emptyset	مجموعة خالية	$\log x$	اللوغاريتم المشترك x
$n!$	n مضروب	$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x
${}_n P_r$	تبديل العناصر n في وقت ما لـ r	π	باي
${}_n C_r$	مجموعة من عناصر n في وقت ما لـ r	ω	أوميغا. سرعة الزاوية
Σ	سيغما (حرف كبير). المحصلة	α	ألفا. قياس الزاوية
μ	mu. متوسط المجتمع الإحصائي	β	بيتا. قياس الزاوية
σ	سيغما (حرف صغير). انحراف معياري للمجتمع الإحصائي	γ	جاما. قياس الزاوية
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي	θ	ثيتا. قياس الزاوية
s	انحراف معياري للعينة	λ	لامدا. طول الموجة
s^2	تنوع العينة	ϕ	فاي. قياس الزاوية
Q	الأعداد النسبية	$f(x, y)$	f من x و y
\mathbb{I}	الأعداد غير النسبية	$\langle a, b \rangle$	المتجه AB
\mathbb{Z}	الأعداد الصحيحة	a	المتجه a
\mathbb{W}	أعداد كلية	$ a $	مقدار المتجه a
\mathbb{N}	أعداد طبيعية	$\sum_{n=1}^k$	المحصلة لـ $n = 1$ إلى k
∞	لا نهاية	\bar{x}	العمود x . متوسط العينة
$-\infty$	لا نهاية سالبة	H_0	فرضية منعدمة
$[]$	نقطة النهاية موجودة	H_a	فرضية بديلة
$()$	نقطة النهاية غير موجودة	$f'(x)$	مشتق من $f(x)$
$\lim_{x \rightarrow c}$	تقترب نهاية مثل x من c	Δ	دلتا. متغيرة
m_{sec}	ميل خط القاطع	\int	تكامل غير محدود
$f(x) = \left\{ \right.$	دالة متقطعة	\int_a^b	تكامل محدود
$f(x) = x $	دالة بالقيمة المطلقة	$F(x)$	مشتق عكسي لـ $f(x)$

نسخة الطلاب

نسخة المعلم

Page vi: McGraw-Hill Education; **p. vii:** McGraw-Hill Education; **p. ix:** McGraw-Hill Education; **p. x:** Ermolaev Alexander/Shutterstock.com; **p. xi:** © Cultura Creative (RF)/Alamy Stock Photo; **p. xii:** underworld/Shutterstock.com; **p. P00:** Ermolaev Alexander/Shutterstock.com; **p. P26:** Huntstock/Disability Images/Alamy; **p. P34:** NFL/ASSOCIATED PRESS/AP Images; **p. 2:** © Cultura Creative (RF)/Alamy Stock Photo; **p. 4:** ollirg/Shutterstock.com; **p. 7:** Teri Virbickis/Shutterstock.com; **p. 27:** ©Dynamic Graphics Group/Creatas/Alamy; **p. 31:** Chuck Eckert/Alamy; **p. 37:** Kolvenbach/Alamy; **p. 41:** Everett - Art/Shutterstock.com; **p. 55:** A. Ramey/PhotoEdit; **p. 59:** Inti St. Clair/Digital Vision/Getty Images; **p. 62:** James Marvin Phelps/Shutterstock.com; **p. 74:** underworld/Shutterstock.com; **p. 76:** inga spence/Alamy; **p. 82:** ArtPix/Alamy; **p. 90:** Monkey Business Images/Shutterstock.com; **p. 95:** UpperCut Images/Glowimages; **p. 99:** Biosphoto/SuperStock; **p. 108:** Science and Society/SuperStock; **p. 113:** Jonathan Bachman/AP Images; **p. 118:** charleschen/Shutterstock.com; **p. 124:** Richard Paul Kane/Shutterstock.com.

شكر و تقدير

Page T6: McGraw-Hill Education; **p. T7:** (tr)David Dennison, (tl br)McGraw-Hill Education, (bl) Courtesy of Dinah Zike; **p. T8:** McGraw-Hill Education; **p. T13:** McGraw-Hill Education; **p. i:** Ermolaev Alexander/Shutterstock.com; **p. ii:** ra2studio/Shutterstock.com; **p. iii:** © Cultura Creative (RF)/Alamy Stock Photo; **p. iv:** underworld/Shutterstock.com.

